

sine-Gordon 系统中的相图*

许伯威 章豫梅¹⁾ 陈志坚 丁国辉

(上海交通大学物理系, 上海 200030)

¹⁾(同济大学物理系, 上海 200092)

(1994 年 4 月 17 日收到)

讨论二维欧氏空间的 sine-Gordon 相图. 应用泛函积分标准方法, 引入各种不同的截断因子, 得到不同的相图, 进行了比较和讨论.

PACC: 1110; 0370

1 引 言

低维 sine-Gordon (缩写为 s-G) 系统非线性量子场论中十分重要. 可以证明, 它等价于各种低维的费密系统模型^[1-4]. 这些模型在场论和凝聚态物理以及在严格求解方法^[5,6]中占有举足轻重的地位. s-G 系统中的 Coleman 相变和凝聚态低维系统中的 Kosterlitz-Thouless 相变的密切联系更引起普遍兴趣并得到广泛应用^[7-9]. 应用高斯波泛函方法^[10]研究 s-G 系统, 可得到有关基态、激发态等一些有意义的结果^[11-14]. 特别是给出了基态相图, 指出除 K-T 相变外尚存在一级相变, 而这种相变已在数值计算中得到证实^[15], 并有迹象表明它可以描述超导系统的涡流行为^[16]. 相图的给出是与紫外截断因子的引入分不开的, 紫外因子的物理背景对应格点模型中格点的间距^[17]或相当于粒子的某种电荷分布宽度^[18]. 因而它的引入有着实在的物理基础, 也就是说, 截断因子是低维模型的一个不可缺少的因素. 不少低维系统经场论化后, 严格说来对应的是二维欧氏空间的 s-G 系统. 而在场论处理中通常将其中一个坐标进行 Wick 转动, 将之纳入 1+1 维的闵氏空间中的形式. 如果不考虑截断因子, 这二种处理方法显然是等价的. 如果考虑截断因子, 其结果就不一定相同. 本文将对此作较详细的研究, 除给出通常截断因子的结果外, 还引入由某些分布函数描述的截断, 并进而对它们对应的相图作了比较和讨论, 指出异同之处, 这在实际应用上无疑是有意义的.

2 sine-Gordon 系统

s-G 系统的泛函积分形式为^[9,17]

* 国家自然科学基金资助的课题.

$$Z_J^{-G} = e^{-W[J]} = \int D\phi e^{-S_J}, \quad (1)$$

其中 S_J 为 s - G 系统在欧氏空间的作用量

$$S_J = \int d^2r \left[-\frac{1}{2} \phi \partial^2 \phi(r) - \frac{\alpha}{\beta^2} \cos \beta \tilde{\phi}(r) - J \tilde{\phi}(r) \right]. \quad (2)$$

我们考虑的是普遍的场论形式,并不涉及具体的物理模型,所以参量按通常取为 α 和 β . 非局域场量 $\tilde{\phi}(r)$ 的定义为

$$\tilde{\phi}(r) = \int d^2r' f(r, r') \phi(r'), \quad (3)$$

$f(r, r')$ 即为描述非点状粒子而引进的归一化分布函数. 如分布函数取为点状分布 $\delta(r - r')$, 则 $\tilde{\phi}(r) = \phi(r)$, 这就对应于通常的 s - G 系统, 显然这样的系统是紫外发散的. 为与实验比较, 必须引入截断因子, 这也是常规的做法. 如 $f(r, r')$ 假定是非点状的某种分布, 则显然截断因子已包含在分布函数中, 这样的截断较为自然. 以下采用场论标准的作法, 求出有效势, 讨论在选取不同截断因子情况下的相图, 进行比较和分析.

场量的平均值为

$$\Phi = \frac{1}{Z_J^{-G}} \int D\phi \phi e^{-S_J} = \frac{\delta}{\delta J} \ln Z_J^{-G} = -\frac{\delta}{\delta J} W[J], \quad (4)$$

其中

$$\tilde{J}(r) = \int d^2r' f(r, r') J(r'). \quad (5)$$

有效势 $V(\Phi)$ 为

$$\Gamma(\Phi) = \int d^2r V(\Phi) = W[J] + \int d^2r \tilde{J}(r) \phi(r). \quad (6)$$

设

$$\phi(r) = \phi'(r) + \Phi(r), \quad (7)$$

因此 S_J 可写成

$$S_J = S_J^{(0)} + S_J^{(1)} + S^{(2)}, \quad (8)$$

其中

$$S_J^{(0)} = \int d^2r \left[-\frac{1}{2} \phi \partial^2 \phi - J \tilde{\phi} \right], \quad (9)$$

$$S_J^{(1)} = \int d^2r \left[-\frac{1}{2} \phi' \partial^2 \phi' + \frac{1}{2} m^2 \phi'^2 - J \tilde{\phi}' \right], \quad (10)$$

$$S^{(2)} = \int d^2r \left[-\frac{1}{2} m^2 \phi'^2 - \frac{\alpha}{\beta^2} (\cos \beta \tilde{\phi}' \cos \beta \tilde{\phi} - \sin \beta \tilde{\phi}' \sin \beta \tilde{\phi}) \right], \quad (11)$$

m^2 项是为了消除红外发散而引入的参量, 其数值由变分法来确定. 因此(1)式可写为

$$Z_J^{-G} = e^{S_J^{(0)}} \int D\phi e^{-S_J^{(1)} - S^{(2)}} = e^{-S_J^{(0)}} \int D\phi e^{-S_J^{(1)}} \langle e^{-S^{(2)}} \rangle. \quad (12)$$

为了书写简便, 从(12)式开始将 ϕ' 写成 ϕ . 而(12)式等号右端最后的因子表示场量 $e^{-S^{(2)}}$ 在自由场系统中的平均值, 第二个因子即为自由场积分泛函, 不难求得为

$$Z_J^{-1} = \int D\phi e^{-S_J^{(1)}} = \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^2r D \right) \cdot \exp \left(\frac{1}{2} \int d^2r d^2r' \tilde{J}(r) G(r - r') \tilde{J}(r') \right), \quad (13)$$

其中

$$D = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2p \ln(p^2 + m^2), \quad (14)$$

$$G(r, r') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2p \frac{e^{i p \cdot (r-r')}}{p^2 + m^2}. \quad (15)$$

现应用 Peierls 不等式^[10], 则(12)式满足

$$Z^{e-G} \geq e^{-S^{(0)}} Z_J^{\sigma} e^{-S^{(2)}}. \quad (16)$$

由于以下在求有效势 $V(\Phi)$ 中采用变分法求极值, 所以可近似将(16)式上限取为等式. 而计算场量 $S^{(2)}$ 的平均值显然容易得多. 例如 $S^{(2)}$ 中的 ϕ^2 和 $e^{i\beta\phi}$ 的平均值分别为

$$\langle \phi^2(r) \rangle = \frac{1}{Z_J^{\sigma}} \frac{\partial}{\partial \tilde{J}} \frac{\partial}{\partial \tilde{J}} Z_J^{\sigma} \Big|_{\tilde{J}=0} = G(r, r'), \quad (17)$$

$$\langle e^{i\beta\phi(r)} \rangle = \frac{(Z_J^{\sigma})_{J \rightarrow J+i\beta\tilde{G}(r,r')}}{Z_J^{\sigma}} \Big|_{J=0} = e^{-\frac{1}{2}\beta^2 \tilde{G}(r,r')}, \quad (18)$$

其中

$$\tilde{G}(r, r) = \int d^2r' d^2r'' f(r, r') G(r', r'') f(r'', r). \quad (19)$$

引入傅里叶变换

$$f(r, r') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2p e^{i p \cdot (r-r')} f(p), \quad (20)$$

则

$$\tilde{G}(r, r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2p \frac{f^2(p)}{p^2 + m^2}. \quad (21)$$

将以上结果代入(6)式, 并取常数解 $\Phi(r) = \Phi$, 最后得到有效势

$$V(\Phi) = \frac{1}{2} D - \frac{m^2}{2} G - \frac{\alpha}{\beta^2} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 \tilde{G}} \cos \beta \Phi. \quad (22)$$

对 m^2 求变分并取极值, 得

$$m^2 = \frac{\partial \tilde{G} / \partial m^2}{\partial G / \partial m^2} \alpha e^{-\frac{1}{2}\beta^2 \tilde{G}} \cos \beta \Phi, \quad (23)$$

给出了质量 m^2 和场量 Φ 的表达式. 又将 $V(\Phi)$ 对 Φ 变分取极值有

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = \frac{\alpha}{\beta} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 \tilde{G}} \sin \beta \Phi = 0. \quad (24)$$

不失一般性给出 $\Phi = 0$. 所以重整化质量为

$$\mu^2 \equiv m^2(\Phi = 0) = \frac{\partial \tilde{G} / \partial \mu^2}{\partial G / \partial \mu^2} \alpha e^{-\frac{1}{2}\beta^2 \tilde{G}}. \quad (25)$$

解的稳定条件为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 \mu^2} = \frac{1}{2} \alpha e^{-\frac{1}{2}\beta^2 \tilde{G}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial^2 \mu^2} - \frac{1}{2} \beta^2 \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \mu^2} \right)^2 \right] \geq 0, \quad (26)$$

其临界条件即为

$$\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial^2 \mu^2} - \frac{1}{2} \beta^2 \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \mu^2} \right)^2 = 0. \quad (27)$$

现考虑各种形式截断使 \tilde{G} 不发散。不管选取哪种截断，总会引入量纲为 $[L]$ 的截断 a 。例如

(a) 各向同性的尖锐截断

取

$$f(p) = \begin{cases} 1 & p \leq 1/a; \\ 0 & p > 1/a, \end{cases} \quad (28)$$

$$\tilde{G} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{1/a} \frac{p dp}{p^2 + \mu^2} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1 + \mu^2 a^2}{\mu^2 a^2}, \quad (29)$$

代入(25)和(27)式，消去 $\mu^2 a^2$ ，即得到稳定条件 ($\alpha a^2, \gamma = \beta^2/8\pi$) 的边界线。边界线包括垂直线(0,1)至(1,1)，以及单调曲线

$$\alpha a^2 = \frac{1}{4} \frac{(\gamma + 1)^{\gamma+1}}{(\gamma - 1)^{\gamma-1}}. \quad (30)$$

该曲线在 $\gamma \geq 1$ 区域。当 $\gamma = 1$ 时 $\alpha a^2 = 1$ ；当 $\gamma \approx \infty$ 时 $\alpha a^2 \approx \frac{1}{4} e^2 \gamma^2$ 。在 $\gamma < 1$ 区域重整化质量不为零。当由左趋于垂直线时，重整化质量趋于零，对应于 $K-T$ 相变。曲线上重整化质量不为零，对应一级相变边界。(1,1)即为三临界点。

(b) 高斯分布

取

$$f(p) = e^{-\frac{1}{2} a^2 p^2} \quad (31)$$

$$\tilde{G} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 p \frac{e^{-a^2 p^2}}{p^2 + \mu^2} = -\frac{1}{4\pi} e^{\mu^2 a^2} \text{Ei}(-\mu^2 a^2), \quad (32)$$

$\text{Ei}(x)$ 为指数积分函数。

对应的(25),(27)式分别为

$$\mu^2 = \alpha \exp\{\gamma e^{\mu^2 a^2} \text{Ei}(-\mu^2 a^2)\} (1 + \mu^2 a^2 e^{\mu^2 a^2} \text{Ei}(-\mu^2 a^2)), \quad (33)$$

$$\gamma = \frac{1 - \mu^2 a^2 - \mu^4 a^4 e^{\mu^2 a^2} \text{Ei}(-\mu^2 a^2)}{[1 + \mu^2 a^2 e^{\mu^2 a^2} \text{Ei}(-\mu^2 a^2)]^2}. \quad (34)$$

由(33),(34)式无法写出边界线 ($\alpha a^2, \gamma$) 之显式，但可数值求解。其三临界点为 ($e^{-c} \approx 0.5615, 1$)，其中 c 为欧拉常数。当 $\gamma \approx \infty$ 时 $\alpha a^2 \approx \frac{1}{4} e^2 \gamma^2$ 。

(c) 指数分布

取

$$f(p) = e^{-\frac{1}{2} a p} \quad (35)$$

$$\tilde{G} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 p \frac{e^{-a p}}{p^2 + \mu^2} = -\frac{1}{2\pi} [\text{Ci}(\mu a) \cos(\mu a) + \text{Si}(\mu a) \sin(\mu a)], \quad (36)$$

其中 $\text{Ci}(x)$ 和 $\text{Si}(x)$ 分别为余弦积分和正弦积分函数。对应的(25),(27)式分别为

$$1 = 2\alpha a^2 J_2(\mu^2 a^2) e^{-2\gamma J_1(\mu^2 a^2)}, \quad (37)$$

$$\gamma = \frac{J_3(\mu^2 a^2)}{[J_2(\mu^2 a^2)]^2}, \quad (38)$$

其中

$$J_+(x^2) = \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-t}}{(t^2 + x^2)^2}. \quad (39)$$

同样可用数值求解边界线。其三临界点为 $(e^{-2\epsilon}, 1)$ 。当 $\gamma \approx \infty$ 时 $\alpha a^2 \approx \frac{1}{2} e^{2\gamma^2}$ 。

(d) 各向异性尖锐截断

在情况 (a) 中,实际上取的是径向截断,二个方向的动量积分是同等处理的。如果分别处理,将其中之一积分趋于无限,而引入另一动量积分的截断因子,相当于闵氏空间的截断,即为

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1/\epsilon}^{1/\epsilon} dp_1 \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 \frac{1}{p^2 + \mu^2} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1/\epsilon}^{1/\epsilon} \frac{dp_1}{(p_1^2 + \mu^2)^{1/2}} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \mu^2 a^2}}{\mu a} \end{aligned} \quad (40)$$

由(25),(27)式得

$$\alpha a^2 = \frac{[3 + \sqrt{2\gamma^2 + 3 + 2\gamma(\gamma^2 + 3)^{1/2}}]^{2\gamma} \sqrt{2\gamma^2 + 3 + 2\gamma(\gamma^2 + 3)^{1/2}}}{27[2\gamma^2 - 6 + 2\gamma(\gamma^2 + 3)^{1/2}]^{\gamma-1}}. \quad (41)$$

当 $\gamma \approx 1$ 时 $\alpha a^2 \approx 4$; 当 $\gamma \approx \infty$ 时 $\alpha a^2 \approx \frac{8}{27} \gamma^3$, 而三临界点为 $(4, 1)$ 。

在通常的场论处理中,相当取 $f(r, r') = \delta(r - r')$, 这时 $\tilde{G} = G$, 然而对 G 的动量积分取截断,这时对应的质量公式(25)和临界条件(27)则分别为^[11,13,14]

$$\mu^2 = \alpha e^{-\frac{1}{2}\beta^2 G}, \quad (42)$$

$$1 + \frac{\beta^2}{2} \mu^2 \frac{\partial G}{\partial \mu^2} = 0. \quad (43)$$

(e) 常规各向同性尖锐截断

将(29)式代入(42)和(43)式得

$$\alpha a^2 = \frac{\gamma^\gamma}{(\gamma - 1)^{\gamma-1}}. \quad (44)$$

当 $\gamma = 1$ 时 $\alpha a^2 \approx 1$; 当 $\gamma \approx \infty$ 时 $\alpha a^2 \approx c\gamma$ 。三临界点为 $(1, 1)$ 。

(f) 常规各向异性尖锐截断

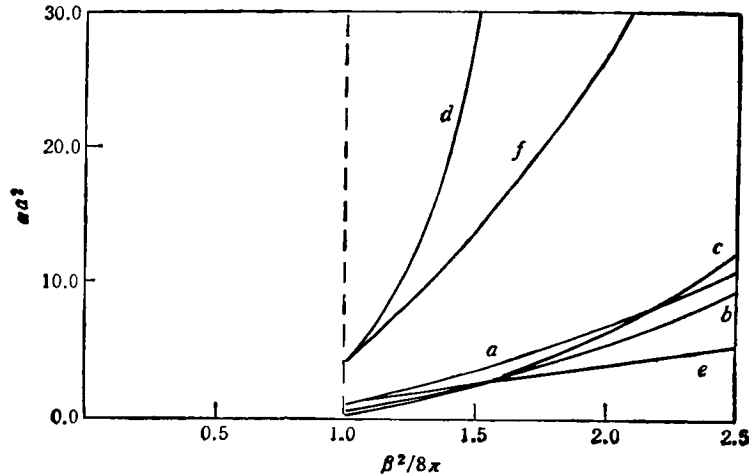
将(40)式代入(42)和(43)式得

$$\alpha a^2 = \frac{(\gamma + 1)^{\gamma+1}}{(\gamma - 1)^{\gamma-1}}. \quad (45)$$

这就是熟知的在闵氏空间的结果。当 $\gamma = 1$ 时, $\alpha a^2 = 4$; 当 $\gamma \approx \infty$ 时, $\alpha a^2 = e^{2\gamma^2}$ 。三临界点为 $(4, 1)$ 。

3 讨 论

以上 6 种截断情况对应的相图边界线如图 1 所示。由于不同截断情况下截断因子 a 的定义并不相同,因此在 $\gamma \approx 1$ 处,三临界点 αa^2 的绝对数值没有直接的意义,但值得注意的是它们都不为零。垂直线部分对应 $K-T$ 相变的边界线。而曲线部分分别对应一级

图1 各种截断情况下的 s - G 系统相图

相变的边界线。 γ 很大时,曲线的渐近行为是令人感兴趣的。曲线 e 为 γ 的线性函数,曲线 d 与 γ^3 成比例,其余 a, b, c, f 曲线都与 γ^2 成比例。前三种截断都具有各向同性的特征,较为合理。而各向异性的截断 d 和 f 似乎并不真实反映了物理的内涵。但值得注意的是曲线 f 具有前三种情况相同的渐近行为,与曲线 a 只相差因子 4。另外想指出的是文献[17]讨论的库仑气体模型所得到的相图即对应曲线 e 。因此对应低温时曲线趋于有限值,而其它几种情况,在低温时都趋于无穷。截断因子的引入意味必须考虑小间距内的物理性质,选取不同的截断因子等价于对小间距的物理性质作了不同的假定。相图的结果表明它们之间有共同之处。例如相变边界线都起始于 $\gamma = 1$, 且都有三临界点。但也有不同之处,例如 γ 很大时,边界线的渐近行为。当然这一切最终将从模型的内涵及实验结果来判断。在讨论具体的物理模型时,例如库仑气体模型,将参量 aa^2 , γ 分别对应模型的平衡态物理量,即得到可与实验比较的相应的相图。

- [1] S. Mandelstam, *Phys. Rev.*, **D11** (1975), 3026.
- [2] S. Samuel, *Phys. Rev.*, **D18** (1978), 1916.
- [3] A. Luther, *Phys. Rev.*, **B14** (1976), 2153.
- [4] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systems* (Addison Wesley, 1991), p. 84.
- [5] L. Faddeev, *Recent Advance in Field Theory and Statistical Mechanics*, eds. J. B. Zuber and R. Stora (North-Holland, 1984), p. 561.
- [6] H. B. Thacker, *Rev. Mod. Phys.*, **53**(1981), 253.
- [7] S. Coleman, *Phys. Rev.*, **D11** (1975), 2088.
- [8] M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *J. Phys. C*, **6** (1973), 1181.
- [9] P. Minnhagen, *Rev. Mod. Phys.*, **59** (1987), 1001.
- [10] R. Ingermansson, *Nucl. Phys.*, **B266** (1986), 620.
- [11] B. W. Xu and Y. M. Zhang, *J. Phys. A*, **25** (1992), L1039.
- [12] W. F. Lu, B. W. Xu and Y. M. Zhang, *Phys. Lett.*, **B309** (1993), 109.
- [13] G. H. Ding, B. W. Xu and Y. M. Zhang, *Phys. Lett.*, **B317** (1993), 107.
- [14] 许伯威、章豫梅、卢文发, *物理学报*, **42**(1993), 1573.
- [15] J. M. Caillio and D. Levesque, *Phys. Rev.*, **B33** (1986), 499.
- [16] F. Mila, *Phys. Rev.*, **B47** (1993), 442.
- [17] G. J. Ni, S. Y. Lou, S. Q. Chen and H. C. Lee, *Phys. Rev.*, **B41** (1990), 6947.
- [18] H. Falk, *Physica*, **29** (1963), 1114.

PHASE DIAGRAM OF sine-GORDON SYSTEM

XU BO-WEI ZHANG YU-MEI¹⁾ CHEN ZHI-JIAN DING GUO-HUI
(Department of Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)
1) (Department of Physics, Tongji University, Shanghai 200092)
(Received 17 April 1994)

ABSTRACT

The phase diagrams of sine-Gordon theory in 2D Euclidean space are studied. With the standard functional integral approach, the phase diagrams obtained from various kinds of cutoff are compared.

PACC: 1110; 0370