

带量子位相的谐振子及其表示

李锦苗¹⁾ 曾高坚

(湖南师范大学物理系,长沙 410006)

(1993年12月9日收到;1994年7月13日收到修改稿)

说明带量子位相的谐振子可以为场的量子化提供一条新的途径,重点研究这种谐振子的数学特性,即它的表示理论.讨论它的 Fock 空间表示(它是有限维的)和相干态表示,定义了统计学特性完全不同的两类相干态.

PACC: 0365;0210;0530

1 带量子位相的谐振子在统计学上的意义

众所周知,在通常的量子场的研究中,运用了两种统计,即 Bose 统计和 Fermi 统计.与这两种统计相应的代数分别叫 Bose 代数和 Fermi 代数,它们分别由对易关系 $[a, a^+] = 1$ 和反对易数关系 $\{a, a^+\} = 1$ 决定.按 Fermi 统计,一个态中最多只能容纳一个粒子,而按 Bose 统计,一个态中容许的粒子的数目可以多至无穷.

我们用 s 表示在一个态中能容许的粒子的最大数目, s 是否可以不为 1 也不为无穷,也就是说, s 是否可以取任意有限正整数值,我们把这个 s 不受限制的统计称为无限统计,这种统计是否存在,这是人们长期思考着的一个问题.

1953年, Green 在量子场的研究中,提出了一个比 Bose 统计和 Fermi 统计更一般的统计^[1],称为 para 统计.它包含了 Bose 统计和 Fermi 统计.这种统计是运用粒子的产生算符和湮没算符之间的三线性对易(反对易)关系来描述并以正数 p 来表征,其三线性对易(反对易)关系为

$$[[b_k^\pm, b_i]_\pm, b_m] = -2\delta_{km}b_i, \quad (1a)$$

$$[[b_k, b_i]_\pm, b_m] = 0, \quad (1b)$$

这里 $[b_i, b_j]_\pm = b_i b_j \pm b_j b_i$, \pm 号分别对应 parabose 和 parafermi 算符.对这些算符, Green 给出这样一个表示,即令

$$b_k = \sum_{\alpha=1}^p b_k^{(\alpha)}, \quad (2)$$

并假定 $b_k^{(\alpha)}$ 满足

$$[b_k^{(\alpha)}, b_i^{(\beta)}]_\pm = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ki}, \quad (3)$$

这里数 p 为 Green 指标 α 的可能取值数目,称 para 统计的“级”.在这种表示里,对于

¹⁾ 原在郴州师范专科学校物理系工作,现为湖南师范大学访问学者.

级为 p 的 parabosons, 在一个反对称态里, 最多能容许 p 个粒子; 对于级为 p 的 parafermions, 在一个对称态里, 最多能容许 p 个粒子, 特别是在同一个态里最多能有 p 个粒子. 当 $p = 1$ 时, 这种统计就相应于 Bose 统计和 Fermi 统计.

30 多年来, 人们对 Green 的场论模型作了广泛的研究^[2,3], 特别是研究了 p 为非正数的情况^[4,5]. 也出现了一些与 Green 的场论模型相类似的工作, 例如 Ignatiev 和 Kuzmin^[4] 构造了一个类似于 Fermi 振子的模型, 它由下式定义:

$$\begin{aligned} a^+|0\rangle &= |1\rangle, & a|0\rangle &= 0, \\ a^+|1\rangle &= \beta|2\rangle, & a|1\rangle &= |0\rangle, \\ a^+|2\rangle &= 0, & a|2\rangle &= \beta|1\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

他们给出的振子的三线性对易关系为

$$a^2a^+ + \beta^2a^+a^2 = \beta^2a, \quad (5a)$$

$$a^2a^+ + \beta^4a^+a^2 = \beta^2aa^+a, \quad (5b)$$

$$a^3 = 0, \quad (5c)$$

加上厄密共轭关系.

近几年来, 量子代数开始进入物理学领域并获得了很大发展, 人们猜测, q 谐振子同无限统计或 para 统计可能会有某种联系. 文献[6]研究了下列形式的 q 谐振子代数:

$$aa^+ - qa^+a = 1, \quad (6)$$

这里 q 为实数. 他判断这个代数能在正定空间中实现, 并给出一个由四个粒子态构成一个表示空间的例子. Mohapatra^[7] 研究了(6)式形式的 q 谐振子, 也研究了下列形式的 q 谐振子:

$$aa^+ - qa^+a = q^{-2N}, \quad (7)$$

这里 $-1 \leq q \leq 1$. 当 $q = -1$ 时, (6)和(7)式都化为 Fermi 代数. Mohapatra 发现, 若 $q = -1 + \varepsilon$, 这里 ε 为无限小量, 则(6)和(7)式与 Fermi 代数的性质完全不同. 这时, 表示空间的态可能是无限多的, 于是, 只要 q 稍偏离 -1 , 则 Pauli 不相容原理就会遭到严重破坏.

(7)式中的 q 可为实数, 也可为复数, 对 q 为实数时的情况, 人们已做了广泛深入的研究^[8,9], 然而 q 为复数时的情况则研究较少. 阎宏等人对 $q^k = 1$ 时的谐振子做了详细研究^[10]. 我们在研究中发现, 当 q 为单位根时, q 谐振子在 Fock 空间中的表示就是有限维的; 在一个态中, 粒子数的最大值可以是一个任意有限的正整数. 这就导致前面说的无限维统计或 para 统计的概念. 可以认为此时的 q 谐振子类似于 para 统计中的粒子.

单位根实际上是一个量子位相, 本文旨在研究带这种量子位相的谐振子. 我们认为带量子位相的谐振子可以为场的量子化提供一条新的途径, 文中侧重对带量子位相的谐振子的数学特性即表示理论进行研究. 首先讨论它的 Fock 空间表示, 详细说明量子位相 q 怎样使谐振子的 Fock 空间表示为有限维的, 其次讨论它的相干态表示. 我们定义了两类相干态, 并初步讨论了这两类相干态的统计学特性, 人们将看到带量子位相的谐振子的相干态与 Glauber 相干态以及当 q 为实数时的 q -Glauber 相干态具有完全不同的性质.

2 带量子位相的谐振子的 Fock 空间表示

现在为人们普遍讨论的 q 变形的谐振子的代数具有这样的形式, 其产生和湮没算符以及数算符 N 满足下列对易关系^[8,9]:

$$aa^+ - qa^+a = q^{-N}, \quad (8)$$

$$[N, a^+] = a^+, \quad [N, a] = -a. \quad (9)$$

本文也运用这种形式, 这种 q 变形谐振子在 Fock 空间中的表示早已为人们确定^[8,9], 表示的基矢为

$$|n\rangle = (a^+)^n / ([n]!)^{1/2} |0\rangle. \quad (10)$$

它是 N 的本征值为 n 的本征矢, 这里 $[n]! = [n][n-1]\cdots[1]$, q 数由下式定义:

$$[x] = (q^x - q^{-x}) / (q - q^{-1}). \quad (11)$$

算符 a, a^+ 对基矢的作用为

$$a|n\rangle = \sqrt{[n]}|n-1\rangle, \quad a^+|n\rangle = \sqrt{[n+1]}|n+1\rangle. \quad (12)$$

q 变形谐振子在 Fock 空间中的表示(10)–(12)式不论 q 为实数还是复数都适用. 当 q 为实数时, n 的取值可以大至无穷, 所以表示为无限维的.

现在我们考虑 q 为一个相因子的情况, 这时 $q = e^{i\tau}$, 这里 τ 为实数, i 为虚数单位, 而

$$[x] = \sin \tau x / \sin \tau. \quad (13)$$

如果 q 取单位根, 则 τ 应为 2π 的有理倍数, 即 $\tau = 2\pi(k/s)$, 这里 k 和 s 均为自然数, 且 $0 \leq k < s$, k 与 s 的最大公约数为 1^[10]. 在这种情况下, $[x]$ 有可能为 0. 若令 $[s+1] = 0$, 则 $\sin \tau(s+1) / \sin \tau = 0$. 设 $\sin \tau \neq 0$, 于是有 $\sin \tau(s+1) = 0$, $\tau(s+1) = \pi, 2\pi, \dots$.

构造 q 谐振子的表示(10)–(12)式时, 一般是先假定存在一态矢 $|0\rangle$, 要求它满足 $a|0\rangle = 0$, 而后把算符 a^+ 一次又一次地作用在 $|0\rangle$ 上, 于是就得到 $|1\rangle, |2\rangle, \dots$, 当 q 为一单位根时, 这个态矢序列将会在某一项以后终止, 设序列在 $n = s$ 处终止, 由(12)式可见, 终止的一般条件为

$$\tau(s+1) = \pi, \quad (14)$$

所以 q 为单位根时, q 谐振子的 Fock 表示空间为有限的, 其态矢为 $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |s\rangle$, 且有 $a|0\rangle = 0, a^+|s\rangle = 0$.

作为例子, 现研究 $s = 1$ 和 $s = 2$ 的情况, 当 $s = 1$ 时, Fock 空间表示只有两个态矢 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$, a 和 a^+ 对态矢的作用为

$$\begin{aligned} a^+|0\rangle &= |1\rangle, & a^+|1\rangle &= 0, \\ a|0\rangle &= 0, & a|1\rangle &= |0\rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

当 $s = 2$ 时, Fock 空间表示有 3 个态矢 $|0\rangle, |1\rangle$ 和 $|2\rangle$, a 和 a^+ 对态矢的作用为

$$\begin{aligned} a^+|0\rangle &= |1\rangle, & a^+|1\rangle &= |2\rangle, & a^+|2\rangle &= 0, \\ a|0\rangle &= 0, & a|1\rangle &= |0\rangle, & a|2\rangle &= |1\rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

不难看出, $s = 1$ 时, 带量子位相的谐振子的表示与费密子的表示非常相似. $s = 2$ 时,

带量子位相的谐振子的表示与 L.K 模型[见(4)式]非常相似。

根据 $r(s+1) = \pi$ 和 $q = e^{i\pi}$, 我们以后总把 q 取成形式 $q = e^{i\pi/(s+1)}$, 由此容易证明 $[1] = [s]$, $[2] = [s-1]$, \dots , $[n] = [s-n+1]$. 这个关系对我们以后的工作是有用的。

3 带量子位相的谐振子的相干态表示

大家知道, 对于通常的谐振子, 只能定义一种相干态, 它是湮没算符的本征态。但对于带量子位相的谐振子, 可以定义两类相干态, 它们具有完全不同的性质。

3.1 第一类相干态

定义第一类相干态为

$$|z\rangle_{q_1} = N_1(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(za^+)^n}{[n]_1} |0\rangle, \quad (17)$$

这里 z 为复数, $N_1(z)$ 为归一化系数。注意到 $(a^+)^n |0\rangle = \sqrt{[n]_1} |n\rangle$, 则 $|z\rangle_{q_1}$ 可表示成

$$|z\rangle_{q_1} = N_1(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{[n]_1}} |n\rangle. \quad (18)$$

令 ${}_{q_1}\langle z|z\rangle_{q_1} = 1$, 可求得归一化系数为

$$N_1(z) = \{\exp_{q_1}(|z|^2)\}^{-1/2}, \quad (19)$$

这里引入了函数

$$e_{q_1}^x \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_1}. \quad (20)$$

它可理解为高次项即 $s+1$ 项以后的项全部被截断了的 q 指数函数, 不难看出, 如令 $s \rightarrow \infty$, 则(8)式化为普通的谐振子代数, 由(17)式定义的相干态也化为普通的谐振子的相干态, 即所谓 Glauber 相干态。

现在来研究相干态的完备条件。这里的问题是寻找这样一个权函数 $\sigma_q(x)$, 使得有

$$\int d_q^2 z \sigma_q(x) |z\rangle_{q_1} {}_{q_1}\langle z| = 1, \quad (21)$$

这里的微分和积分分别为 q 微分和 q 积分。为了寻找 $\sigma_q(x)$, 令 $z = |z|e^{i\theta}$, $d_q^2 z = d_q x d\theta$ ($x = |z|^2$, $\theta = \arg z$), 把(18)式代入(21)式等号左边, 完成对 θ 的积分并要注意到^[12]

$$\int_0^{2\pi} e_q^{-iz} x^n d_q x = [n]_1 \quad (22)$$

可得到权函数 $\sigma_q(x)$ 和相干态的完备条件分别为

$$\sigma_q(x) = \{1/(2\pi)\} \exp_{q_1}(|z|^2) \exp_q(-|z|^2), \quad (23)$$

$$\{1/(2\pi)\} \int d_q^2 z \{\exp_{q_1}(|z|^2)\} \{\exp_q(-|z|^2)\} |z\rangle_{q_1} {}_{q_1}\langle z| = 1. \quad (24)$$

运用相干态的完备条件(24)式, 可把任意态 $|\psi\rangle$ 表示为

$$|\Psi\rangle = \int_{q_1} \langle z|\Psi\rangle \sigma_q(z)|z\rangle_{q_1} d_q^2 z = \int \Psi_{q_1} \sigma_q(z)|z\rangle_{q_1} d_q^2 z, \quad (25)$$

这里 $\Psi_{q_1} = {}_{q_1}\langle z|\Psi\rangle$.

下面研究算符 $Q(Q \in a, a^+)$ 对相干态的作用, 运用(24)式有

$$Q|z'\rangle_{q_1} = \int_{q_1} \langle z|Q|z'\rangle_{q_1} \sigma_q(z)|z\rangle_{q_1} d_q^2 z, \quad (26)$$

这里 ${}_{q_1}\langle z|Q|z'\rangle_{q_1}$, 当 Q 分别为 a, a^+ 时, 可分别表示为

$${}_{q_1}\langle z|a|z'\rangle_{q_1} = z' \{ \exp_{q_1}(|z|^2) \}^{-1/2} \{ \exp_{q_1}(|z'|^2) \}^{-1/2} \exp_{q_1-1}(\bar{z}z'), \quad (27)$$

$${}_{q_1}\langle z|a^+|z'\rangle_{q_1} = \bar{z} \{ \exp_{q_1}(|z|^2) \}^{-1/2} \{ \exp_{q_1}(|z'|^2) \}^{-1/2} \exp_{q_1-1}(\bar{z}z'). \quad (28)$$

3.2 第二类相干态

定义第二类相干态为

$$|z\rangle_{q_2} = N_2(z) \sum_{n=0}^s \frac{(za)^n}{[n]_1} |s\rangle. \quad (29)$$

因为 $a^n|s\rangle = \sqrt{[s][s-1]\cdots[s-n+1]}|s-n\rangle$ 和 $[s-n+1] = [n]$, $|z\rangle_{q_2}$ 可化为

$$|z\rangle_{q_2} = N_2(z) \sum_{n=0}^s \frac{z^n}{\sqrt{[n]_1}} |s-n\rangle, \quad (30)$$

由(36)式很容易证明, $|z\rangle_{q_2}$ 的归一化系数 $N_2(z)$ 与 $N_1(z)$ 完全相同,

$$N_2(z) = \left(\sum_{n=0}^s \frac{|z|^{2n}}{[n]_1} \right)^{-1/2} = \{ \exp_{q_1}(|z|^2) \}^{-1/2} = N_1(z). \quad (31)$$

$|z\rangle_{q_2}$ 的完备性条件与 $|z\rangle_{q_1}$ 的也有完全相同的形式, 即

$$\{1/(2\pi)\} d_q^2 z \{ \exp_{q_1}(|z|^2) \} \{ \exp_{q_1}(-|z|^2) \} |z\rangle_{q_2} \langle z| = 1. \quad (32)$$

(32)式的正确性是容易验证的, 把(30)和(31)式代入(32)式等号左边, 运用(22)式即可得到(32)式.

运用相干态的完备条件(32)式, 可把任意态 $|\Psi\rangle$ 表示为

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \int_{q_2} \langle z|\Psi\rangle \{ \exp_{q_1}(|z|^2) \} \{ \exp_{q_1}(-|z|^2) \} |z\rangle_{q_2} d_q^2 z \frac{1}{2\pi} \\ &= \int \Psi_{q_2} \{ \exp_{q_1}(|z|^2) \} \{ \exp_{q_1}(-|z|^2) \} |z\rangle_{q_2} d_q^2 z \frac{1}{2\pi}, \end{aligned} \quad (33)$$

这里 $\Psi_{q_2} = {}_{q_2}\langle z|\Psi\rangle$.

现在来研究算符 $Q(Q \in a, a^+)$ 对第二类相干态的作用, 运用(32)式, 有

$$Q|z'\rangle_{q_2} = \int_{q_2} \langle z|Q|z'\rangle_{q_2} \{ \exp_{q_1}(|z|^2) \} \{ \exp_{q_1}(-|z|^2) \} |z\rangle_{q_2} d_q^2 z \frac{1}{2\pi}, \quad (34)$$

这里 ${}_{q_2}\langle z|Q|z'\rangle_{q_2}$, 当 Q 分别为 a, a^+ 时, 可分别表示为

$${}_{q_2}\langle z|a|z'\rangle_{q_2} = \bar{z}' \{ \exp_{q_1}(|z|^2) \}^{-1/2} \{ \exp_{q_1}(|z'|^2) \}^{-1/2} \exp_{q_1-1}(\bar{z}z'), \quad (35)$$

$${}_{q_2}\langle z|a^+|z'\rangle_{q_2} = z' \{ \exp_{q_1}(|z|^2) \}^{-1/2} \{ \exp_{q_1}(|z'|^2) \}^{-1/2} \exp_{q_1-1}(\bar{z}z'). \quad (36)$$

3.3 两类相干态的比较

从上述讨论中清楚地看到, 两类相干态有相同的地方也有不同的地方. 它们具有完全相同的归一化系数, 它们的完备条件也有完全相同的形式, 但算符 a 和 a^+ , 对它们的作用是不相同的. 两类相干态并不相互正交, 因为

$$\begin{aligned} {}_{q_1}\langle z' | z \rangle_{q_2} &= \{ \exp_{q_1}(|z'|^2) \}^{-1/2} \{ \exp_{q_2}(|z|^2) \}^{-1/2}, \\ &\sum_{n=0}^s \frac{\bar{z}'^n z'^{-n}}{\sqrt{[n]! [s-n]!}} \neq 0. \end{aligned} \quad (37)$$

可是正因为这一点, 也因为两类相干态均分别为完备的, 所以一种相干态是可用另一种相干态来表达

$$|z\rangle_{q_2} = \{1/(2\pi)\} \int d'_z z' \{ \exp_{q_1}(|z'|^2) \} \{ \exp_{q_2}(-|z'|^2) \} {}_{q_1}\langle z' | z \rangle_{q_2} |z'\rangle_{q_1}, \quad (38)$$

$$|z\rangle_{q_1} = \{1/(2\pi)\} \int d'_z z' \{ \exp_{q_2}(|z'|^2) \} \{ \exp_{q_1}(-|z'|^2) \} {}_{q_2}\langle z' | z \rangle_{q_1} |z'\rangle_{q_2}, \quad (39)$$

这里要着重指出两类相干态具有完全不同的统计学特性. 为了说明这一点, 现来考察相干态中光子的概率分布和光子数的平均值. 在第一类相干态 $|z\rangle_{q_1}$ 中, 光子的概率和光子数的平均值分别为

$$P_n^1(z) = \{ \exp_{q_1}(|z|^2) \}^{-1} \frac{|z|^{2n}}{[n]!}, \quad (40)$$

$$\bar{n}_1 = \sum_{n=0}^s n P_n^1(z). \quad (41)$$

在第二类相干态 $|z\rangle_{q_2}$ 中, 光子的概率和光子数的平均值分别为

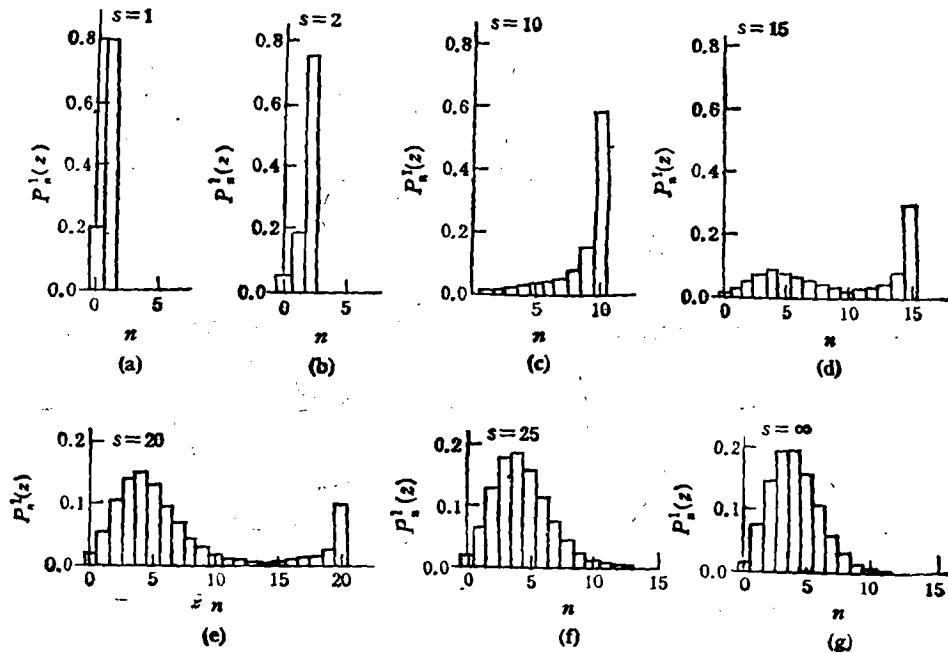


图1 $z=2$ 时, $P_n^1(z)$ 与 n 的关系曲线

$$P_n^2(z) = \{\exp_q(|z|^2)\}^{-1} \frac{|z|^{2(n-s)}}{[s-n]_1}, \quad (42)$$

$$\bar{n}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n^2(z). \quad (43)$$

图 1 和图 2 分别对不同的 s 示出 $P_n^1(z)$ 和 $P_n^2(z)$ 随 n 的变化关系。图 3 和图 4 则分别示出 \bar{n}_1 和 \bar{n}_2 随 s 的变化关系。在绘制这些图时, 对 z 我们假定它为实数, 并选择了一个特定值 $z=2$ 。这并不损害一般性, 从图 1 可见, 当 s 很小时, $P_n^1(z)$ 随 n 的增大而增大, 但当 s 较大时, 如 $s=20$ 等, $P_n^1(z)$ 随 n 的增大中间有一极大值, 又有一极小值。当 s 很大时, 特别是当 $s \rightarrow \infty$ 时, 曲线在中间的极小值消失, 光子数的概率趋于 Poisson 分布。这是很自然的, 因为当 $s \rightarrow \infty$ 时, $q \rightarrow 1$, 我们的 q 谐振子便变为普通谐振子。相干态 $|z\rangle_{q1}$ 便变为普通的相干态, 即所谓 Glauber 相干态, 图 2 显示的 $P_n^2(z)$ 的曲线的特

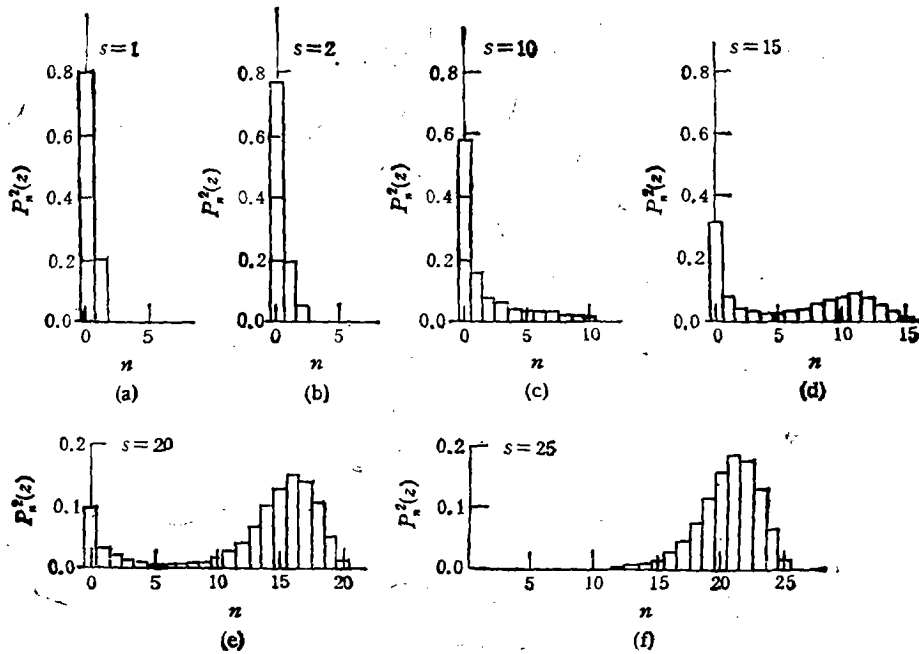


图 2 $z=2$ 时, $P_n^2(z)$ 与 n 的关系曲线

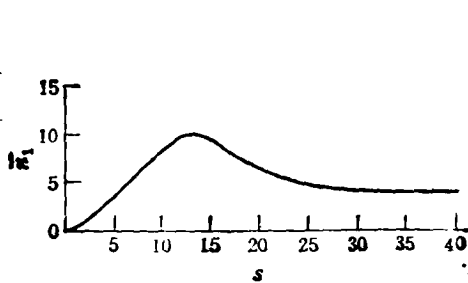


图 3 $z=2$ 时, \bar{n}_1 与 s 的关系曲线

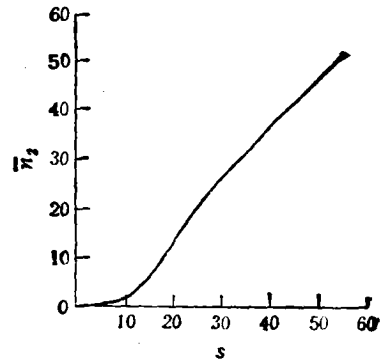


图 4 $z=2$ 时, \bar{n}_2 与 s 的关系曲线

性则与 $P!(x)$ 的完全相反。又从图 3 可见, \bar{n}_1 随着 s 的增加开始增加, 并达一最大值而后再减少, 当 s 很大时, 则趋于一常数。而从图 4 可见, \bar{n}_2 在 s 较大时随 s 增加而线性增加, 这些分析都是初步的, 但它表明, 两类相干态确实具有不同的统计学特性。

- {1] H.S. Green, *Phys. Rev.*, **90**(1953), 270.
- {2] O.W. Greenberg and A.M.L. Messiah, *Phys. Rev.*, **136**(1969) B248; O.W. Greenberg and K.I. Macrae, *Nucl. Phys.*, **B219**(1983), 358.
- {3] S.Doplicher, R. Haag and J. Roberts, *Commun. Math. Phys.*, **23**(1971), 199; Y. Ohnuki and S. Kamefuchi, *Quantum Field Theory and Parastatistics* (Springer Berlin, 1982).
- {4] A. Ignatiev and V. Kuzmin, *Yad. Fys.*, **46**(1987), 786.
- {5] O.W. Greenberg and R.N. Mohapatra, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 2507.
- {6] O.W. Greenberg, *University of Maryland Preprint* (1989).
- {7] R.N. Mohapatra, *Phys. Lett.*, **B242**(1990), 407.
- {8] L.C. Biedenharn, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**(1989), L873.
- {9] A.J. Macfarlane, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**(1989), 4581.
- {10] 阎宏、陈卫、常哲、郭汉英, *物理学报*, **40**(1991), 329.
- {11] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis and K. Kokkotas, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24**(1991), L795.
- {12] R.W. Gray and C.A. Nelson, *J. Phys. A*, **23**(1990), L945.

ON THE HARMONIC OSCILLATOR WITH QUANTUM PHASE AND ITS REPRESENTATION

LI JIN-HUI ZENG GAO-JIAN

(Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha 410006)

(Received 9 December 1993; revised manuscript received 13 July 1994)

ABSTRACT

The paper first shows that the harmonic oscillator with quantum phase may provide a new way for quantization of field, then mainly studies the mathematical characteristics of the harmonic oscillator with quantum phase, i.e., its representation theory. The representation in Fock space (being finite-dimensional) and two kinds of coherent states are discussed. It is shown that the statistical properties of the two kinds of coherent states are entirely different.

PACC: 0365; 0210; 0530