

纤维复合媒质中的超声衰减*

朱为勇 王耀俊 宁 伟

(南京大学声学研究所, 南京 210093)

(1994年10月7日收到)

为了精确估计纤维复合媒质中散射所引起的超声衰减, 必须计及纤维之间的多次散射现象. 本文提出了纤维复合媒质中任一点有效入射声场的计算方法. 当超声纵波传播方向与纤维轴线相垂直时, 散射横波并不影响有效入射声场; 导出了考虑多次散射后超声衰减系数的表达式; 数值计算了玻璃/金属铝复合媒质中纵波衰减系数随频率的变化关系.

PACC: 4320; 6265

1 引 言

为了评价纤维复合媒质中纤维/母材界面特性, 人们采用超声衰减测量技术^[1]. 纤维复合媒质中声波衰减主要来自纤维及纤维/母材界面层的超声散射. 已经发现, 对界面性能的变化超声衰减数值十分灵敏^[2,3]. 但在以前的研究中, 略去纤维散射声波的相互作用, 假定声波衰减系数正比于各个纤维(包括界面层)对声波散射能量的代数和. 事实上, 在复合媒质中, 一个纤维的散射声波可变为其它纤维的入射波而被再次散射, 形成多次散射. 当纤维之间距离较小(即纤维体积浓度比较大)时, 这种效应更为明显. 因此, 要计算复合媒质中任一点的有效入射声场, 必须计及原来入射波和多次散射波. 可以预料, 由于散射波中包含纵波和横波成分, 固体复合媒质中考虑了多次散射后的声场十分复杂.

钱祖文等人^[4-6]曾用不同方法研究过浓悬浮体中球形粒子之间的多次散射问题. 由于未考虑散射横波的影响, 他们的理论不能直接估计纤维复合媒质中的超声衰减. 本文将钱祖文的理论模型推广至纤维复合媒质, 比较了考虑和未考虑纤维之间多次散射后纵波衰减系数.

2 固体中单个圆柱状纤维的声散射

固体中弹性波场中质点位移 u 可用标量势 ϕ 和矢量势 ψ 表示:

$$u = \nabla \phi + \nabla \times \psi, \quad (1)$$

其中 ϕ 和 ψ 分别满足纵波和横波波动方程.

图1为某一纤维的横截面图. 纤维内径为 a , 纤维/母材厚度为 h , 纤维外径为 $b = a$

* 国家自然科学基金和高等学校博士学科点专项科研基金资助的课题.

+h, 建立如图 1 所示的柱坐标系. 入射平面纵波沿 x 方向传播, 这时应力振幅为 T_0 的入射纵波位移势 ϕ_{i0} 可表示为

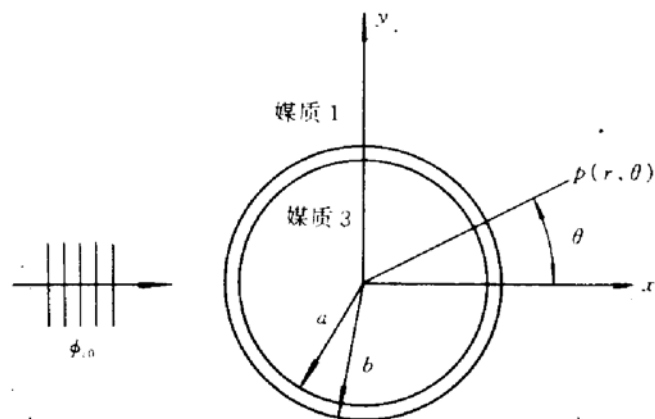


图 1 固体中圆柱状纤维的横截面和计算坐标系

$$\begin{aligned}\phi_{i0} &= \frac{T_0}{\rho_1 \omega^2} e^{-j\omega t} e^{jk_1 r \cos \theta} \\ &= \frac{T_0}{\rho_1 \omega^2} e^{-j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} e_n(j)^n J_n(k_1 r) \cos(n\theta),\end{aligned}\quad (2)$$

其中 ρ_1 为母材密度, k_1 为纵波波数 ($k_1 = \frac{\omega}{c_{l1}}$), e_n 为 Neumann 因子, J_n 为 n 阶 Bessel 函数.

鉴于问题的特殊性, 散射声波产生的位移在 $x-y$ 平面内. 这时矢量势 ψ_s 可写成 $\psi_s \hat{z}$ ($\hat{z}$ 为 z 方向单位矢量), 散射位移势 ϕ_s 和 ψ_s 可写成级数形式:

$$\begin{aligned}\phi_s &= T_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(k_1 r) \cos(n\theta), \\ \psi_s &= T_0 \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(K_1 r) \sin(n\theta),\end{aligned}\quad (3)$$

其中 A_n 和 B_n 为待定系数, $H_n^{(1)}$ 为 n 阶一类 Hankel 函数, K_1 为母材中横波波数 ($K_1 = \frac{\omega}{c_{t1}}$, c_{t1} 为横波速度). 类似地写出界面层和纤维中声场表达式, 利用 $r=a$ 和 $r=b$ 处应力和位移和连续的边界条件, 求解包括未知数 A_n 和 B_n 等的线性方程组, 可得散射波系数 A_n 和 B_n [3]. 纤维圆柱体每单位长度的散射声功率 P 依赖于 A_n 和 B_n

$$P = \frac{2(\rho_1 \omega^2)^2 I_0}{k_1} [2A_0 A_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* + B_n B_n^*)], \quad (4)$$

其中 I_0 为入射平面纵波声强.

如果垂直于纤维方向的单位截面积上有 n_0 个相同的纤维, 不考虑纤维散射波之间的相互作用, 平面纵波的声强衰减系数可表示为 [3]

$$\alpha_l = \frac{P n_0}{I_0} = \frac{2n_0(\rho_1 \omega^2)^2}{k_1} [2A_0 A_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* + B_n B_n^*)]. \quad (5)$$

3 纤维复合媒质中的声波多次散射

图 2 给出纤维 $o, s-1, s, s+1$ 的横截面. 建立如图 2 所示的坐标系, 其原点位于纤维 o 的中心, 入射平面波仍沿 x 方向传播, 散射波位移限于 $x-y$ 平面内. 单位截面积内有 n_0 个相同的圆柱纤维. p 点坐标, 第 s 个纤维中心坐标以及 p 点相对于第 s 个纤维中心位置的坐标分别为 $(r_0, \theta_0), (r_{os}, \theta_{os}), (r_s, \theta_s)$, 这样 p 点直接入射纵波 (应力振幅为 T_0) 的位移势 $\phi_{i0}(p)$ 可表示为

$$\phi_{i0}(p) = \frac{T_0}{\rho_1 \omega^2} e^{jk_1 r_o \cos \theta_o}. \quad (6)$$

第 s 个纤维处的入射波位移势可表示为

$$\phi_{i0}(s) = \frac{T_0}{\rho_1 \omega^2} e^{jk_1 r_{as} \cos \theta_{as}} = \frac{T_0}{\rho_1 \omega^2} e^{jk_1 r_{as} \cos \theta_{as}} e^{-jk_1 r_s \cos \theta_s}. \quad (7)$$

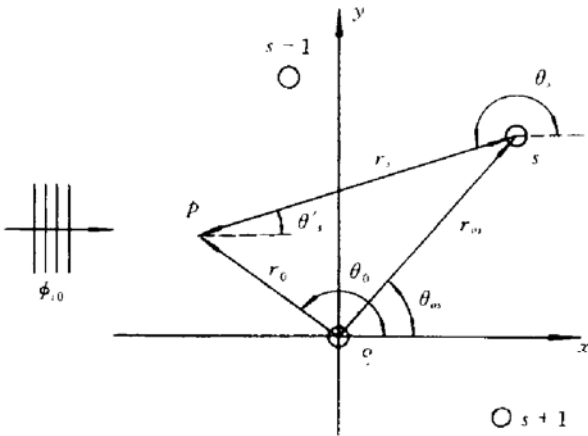


图2 计算圆柱纤维间多次散射的坐标系

比较(6)和(7)式,可知第 s 个纤维处的入射平面波位移势多了一个相位因子 $e^{-jk_1 r_s \cos \theta_s}$. 那么,第 s 个纤维的一次散射波在 p 点的位移势可表示为

$$\begin{aligned} \phi_s^{(1)}(p) &= T_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{jk_1 r_{as} \cos \theta_{as}} \\ &\quad \times H_n^{(1)}(k_1 r_s) \cos(n\theta_s), \\ \psi_s^{(1)}(p) &= T_0 \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{jk_1 r_{as} \cos \theta_{as}} \\ &\quad \times H_n^{(1)}(k_1 r_s) \cos(n\theta_s). \end{aligned} \quad (8)$$

而所有纤维在 p 点的总散射位移势为

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(p) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} n_0 \phi_s^{(1)}(p) r'_s dr'_s d\theta'_s, \\ \psi^{(1)}(p) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} n_0 \psi_s^{(1)}(p) r'_s dr'_s d\theta'_s, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 (r'_s, θ'_s) 为第 s 个纤维相对于 p 点的坐标,满足关系式:

$$r'_s = r_s, \quad \theta'_s = \theta_s - \pi. \quad (10)$$

将(8)和(10)式代入(9)式,有

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(p) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} n_0 T_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{jk_1 r_{as} \cos \theta_{as}} H_n^{(1)}(k_1 r_s) \cos(n\theta_s) r'_s dr'_s d\theta'_s \\ &= T_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{jk_1 r_{as} \cos \theta_{as}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} n_0 e^{jk_1 r'_s \cos \theta'_s} H_n(k_1 r'_s) \cos n(\theta'_s + \pi) r'_s dr'_s d\theta'_s \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n A_n \rho_1 \omega^2 \right) \frac{T_0}{\rho_1 \omega^2} e^{jk_1 r_{as} \cos \theta_{as}}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} n_0 e^{jk_1 r'_s \cos \theta'_s} H_n(k_1 r'_s) \cos n(\theta'_s + \pi) r'_s dr'_s d\theta'_s \\ &= \frac{(-j)^n 2\pi n_0}{k_1^2} \int_0^{\infty} J_n(k_1 r'_s) H_n(k_1 r'_s) k_1 r'_s d(k_1 r'_s). \end{aligned} \quad (12)$$

由于复合媒质中总存在声衰减,故无限远处的散射波贡献为零^[4],上式积分结果为

$$\gamma_n = \frac{(-j)^{n+1} 2\pi n_0}{k_1^2}. \quad (13)$$

因为 $\sin(n\theta)$ 为奇函数,可以证明合成的散射横波势恒为零,即

$$\psi^{(1)}(p) = 0. \quad (14)$$

由此得到一次散射声波在 p 点的合位移势的表达式为

$$\phi^{(1)}(p) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n A_n \rho_1 \omega^2 \right) \phi_{i0}(p), \quad (15)$$

$$\psi^{(1)}(p) = 0.$$

以此类推,第一次散射波重新作为入射波,产生第二次散射波,重复上面的运算,可得第 m 次散射波在 p 点合位移势:

$$\begin{aligned}\phi^{(m)}(p) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n A_n \rho_1 \omega^2 \right)^m \phi_{i0}(p), \\ \psi^{(m)}(p) &= 0.\end{aligned}\quad (16)$$

考虑多次散射以后,任一点的等效入射波位移势可表示为

$$\begin{aligned}\phi_i &= \phi_{i0} + \sum_{m=1}^{\infty} \phi^{(m)} = \phi_{i0} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n A_n \rho_1 \omega^2 \right)^m, \\ \psi_s &= \sum_{m=1}^{\infty} \psi^{(m)} = 0.\end{aligned}\quad (17)$$

在一般情况下,散射波振幅总小于入射波振幅,即 $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n A_n \rho_1 \omega^2 \right| < 1$, 由级数求和可得

$$\phi_i = \frac{1}{\gamma_1} \frac{T_0}{\rho_1 \omega^2} e^{jk_1 r_0 \cos \theta_0}, \quad (18)$$

其中

$$\gamma_1 = 1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n A_n \rho_1 \omega^2 \right) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-j)^{n+1} n \delta}{\pi (k_1 b)^2} A_n \rho_1 \omega^2, \quad (19)$$

而 $\delta = n_0 \pi b^2$ 为纤维体积比.

根据以上讨论可知,考虑了多次散射后, p 点的等效入射波仍为平面纵波,但幅值有所变化,而横波位移势恒为零.

应力振幅为 T_0 的平面入射纵波声强为

$$I_0 = \frac{T_0^2}{2P_1 c_{11}}. \quad (20)$$

由于纤维的多次散射,等效入射纵波声强为

$$I'_0 = \frac{1}{|\gamma_1|^2} \frac{T_0^2}{2P_1 c_{11}}. \quad (21)$$

这样,可定义考虑了多次散射后声强衰减系数为^[4]

$$\alpha'_1 = \frac{P_{n0}}{I'_0} = \frac{2n_0(\rho_1 \omega^2)^2 |\gamma_1|^2}{k_1} \left[2A_0 A_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* + B_n B_n^*) \right]. \quad (22)$$

由此可见,考虑了纤维间多次散射效应的平面纵波声强衰减系数 α'_1 中多了因子 $|\gamma_1|^2$, 本文将它定义为修正因子. 有

$$\alpha'_1 = |\gamma_1|^2 \alpha_1. \quad (23)$$

4 数值计算

作为例子,我们具体计算了金属基(铝)玻璃纤维复合材料不考虑多次散射时的超声衰减系数,以及考虑多次散射时的超声衰减系数和引进的修正因子 $|\gamma_1|^2$. 假定铝和纤维之间有一很薄的界面层(厚度为 h 的环氧树脂胶),计算时所取参数如下:对铝, $\rho_1 = 2.7$

g/cm^3 , $c_{11} = 6.26 \text{ km/s}$, $c_{11} = 3.08 \text{ km/s}$; 对玻璃纤维, $\rho_3 = 1.18 \text{ g/cm}^3$, $c_{13} = 2.7 \text{ km/s}$, $c_{13} = 1.30 \text{ km/s}$, 纤维外径 $b = 70 \mu\text{m}$; 对环氧树脂胶, $\rho_2 = 1.201 \text{ g/cm}^3$, $c_{12} = 2.0 \text{ km/s}$, $c_{12} = 1.03 \text{ km/s}$, 厚度 $h = 0.07 \mu\text{m}$. 所有纤维半径相同, 纤维在复合媒质中的体积百分比为 $\delta = n_0 \pi b^2$ (n_0 为垂直于纤维单位横截面积上纤维个数), 取 $\delta = 0.1$.

由图 3 可见, 在纤维半径远小于声波波长时(即 $k_1 b \ll 1$), 散射衰减系数随频率增加而急剧增加, 这相当于弹性球瑞利散射区域; 当频率较高时, 散射衰减系数出现起伏, 这与固体中异质圆柱体对超声波的共振散射有关^[7].

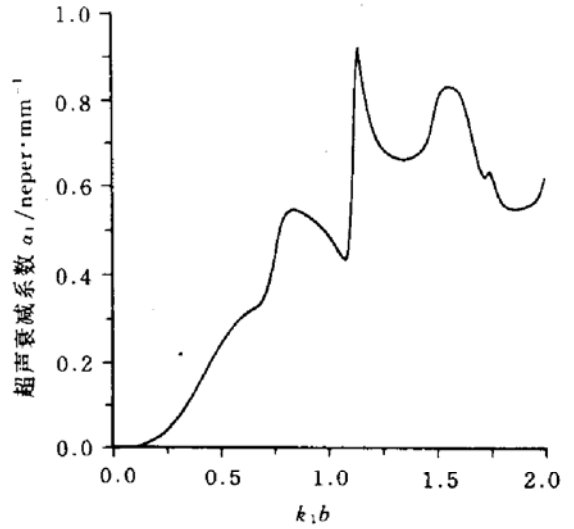
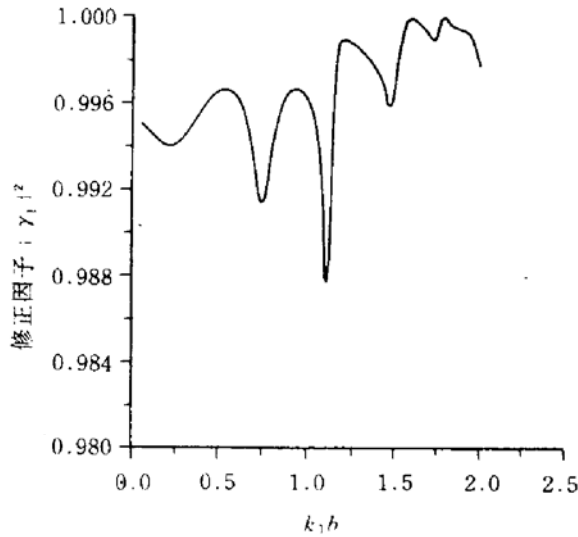
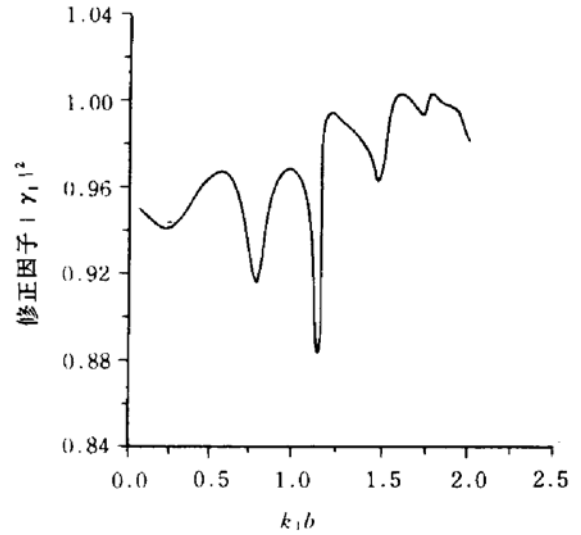


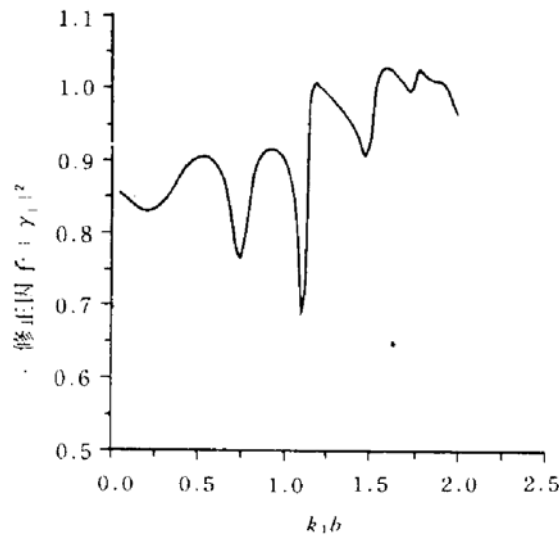
图 3 不考虑多次散射时超声纵波衰减系数随 $k_1 b$ 的变化曲线 k_1 为母材中纵波波数



(a) $\delta = 0.01$



(b) $\delta = 0.11$



(c) $\delta = 0.3$

图 4 考虑多次散射后引进的修正因子 $|\gamma_1|^2$ 在 $\delta = 0.01, 0.1, 0.3$ 三种情况下的变化曲线

图 4 反映不同纤维体积比 δ 条件下多次散射修正因子 $|\gamma_1|^2$ 随 $k_1 b$ 的变化. 由图 4 可见, 随着 δ 的增加, $|\gamma_1|^2$ 值不断降低, 表示 δ 较大时, 多次散射会使超声散射衰减系数明显降低. 但对于较大的 δ 值, 在某频率范围, $|\gamma_1|^2$ 值可能大于 1 (见图 4(c)). 物理上反映了在某些频率范围, 多次散射波声场的线性迭加, 可能引起有效入射声场幅值的降低, 因而由 (22) 式计算的衰减系数反而增大.

5 讨 论

利用上述理论模型, 在平面纵波入射情况下引进修正因子 $|\gamma_1|^2$, 得到考虑了多次散射影响的超声散射衰减系数 α'_1 . 按同样方法, 得到平面横波入射情况下的修正因子 $|\gamma'_t|^2$. 这样, 考虑了多次散射影响后超声散射衰减系数 α'_t 为

$$\alpha'_t = |\gamma_t|^2 \alpha_t, \quad (24)$$

其中

$$|\gamma_t|^2 = \left| 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-j)^{n+1} n \delta}{\pi (k_1 b)^2} B_n \rho_1 \omega^2 \right|^2, \quad (25)$$

$$\alpha_t = \frac{2\delta(\rho_1 \omega^2)^2}{\pi b^2 K_1} [2B_0 B_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* + B_n B_n^*)], \quad (26)$$

而 α_t 为不考虑多次散射的超声散射衰减系数.

如果考虑纤维几何尺寸的不均匀性和复合媒质本身的声吸收, 那么修正因子的形式就会改变. 有关工作将在下一步进行.

感谢钱祖文教授对本工作给予的帮助和具体建议.

- [1] W. Huang and S. I. Rokhlin, Presentation Abstract in Review of Progress in QNDE (August, 1993, U. S. A.).
- [2] Wang Yaojun, Ou Xianhua and Ning Wei, *Chin. Phys. Lett.*, **11**(1994), 211.
- [3] Wang Yaojun, Ning Wei and Ou Xianhua, *Chin. J. Acoust.*, **13**(1994), 193.
- [4] 钱祖文, 物理学报, **30**(1981), 433.
- [5] 赵松令, 声学学报, **11**(1986), 223.
- [6] 王耀俊、刘长盛, 科学通报, **31**(1986), 1382.
- [7] L. Flax, G. C. Gaunard and H. Uberall, *Physical Acoustics*, eds. by W. P. Mason and R. N. Thurston (Academic Press, N. Y. 1981), p. 191.

ULTRASONIC ATTENUATION IN FIBER REINFORCED COMPOSITES

ZHU WEI-YONG WANG YAO-JUN NING WEI

(*Institute of Acoustics, Nanjing University, Nanjing 210093*)

(Received 7 October 1994)

ABSTRACT

In order to evaluate the attenuation in fiber reinforced composites due to scattering, the multiple scattering should be taken into account when the volume concentration of fibers is large. This paper presents a method for calculating the effective incident wave field in the composites. The contribution of the scattered transverse waves to the incident longitudinal wave propagating perpendicularly to the fiber axis is shown to be zero. An explicit expression for ultrasonic attenuation coefficient with the multiple scattering included is derived. The influence of multiple scattering on the attenuation coefficient is numerically evaluated in a fiber/aluminum composite.

PACC: 4320;6265