

混沌系统的小波基控制^{*}

王忠勇

(郑州大学电子工程系, 郑州 450052)

蔡远利 贾 冬

(西安交通大学自动控制系统, 西安 710049)

(1998 年 3 月 6 日收到; 1998 年 8 月 2 日收到修改稿)

基于小波在紧支集中能够任意逼近非线性连续函数的特性, 采用小波基展开的方法实现了混沌运动的控制. 通过对 Duffing 等典型混沌运动的控制仿真表明, 该方法可行, 控制效果较好.

PACC: 0545

1 引 言

自 1990 年 Ott 等人^[1]提出 OGY 控制混沌运动方法以来, 混沌控制的研究成为了非线性科学的一个新的研究方向, 它吸引了众多学者在这个领域开展工作. 到目前为止, 已报道了不少控制混沌的方法. 从控制理论角度来看, 所有这些方法, 无外乎分为两种: 一种是非反馈即开环控制方法, 如参数扰动^[2]、传递和转移控制^[3]及周期激振力^[4]方法等; 另一种是有反馈即闭环控制方法, 如 OGY^[1], OPF^[5], VFC^[6]及自适应控制方法^[7]等等. 本文即是依据反馈控制原理, 结合小波分析理论, 提出了一种基于小波基展开的控制混沌运动的方法. 这种方法只需给出控制的目标轨道(或目标点), 就可实现混沌的控制, 并且系统很快就能达到控制目标. 通过对 Duffing 等典型混沌运动的控制仿真表明, 小波基控制方法是一种可行的控制混沌的方法, 其控制效果较好.

2 小波基控制方法简介

小波是目前许多科学和工程技术领域研究的极为活跃的热门问题之一. 小波可以作为表示函数的一种基底, 也可以作为时间-频率分析的一种技术. 在用小波表示函数方面, Zhang 等^[8]依据神经网络的思想, 构造出了以小波函数为基底的网络, 即小波网络. 这种网络是一种局部基函数网络, 由于基函数是具有可调的分辨尺度函数, 使得网络具有较强的非线性逼近能力. 利用这种网络 Cao 等^[9]成功地实现了混沌的预测. 本文是在 Zhang 的小波网络基础上通过选取小波基函数, 然后将这些小波函数进行适当地加权组合来实现混沌的控制.

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 19402011)资助的课题.

利用小波基网络实现对系统的控制,其原理是将小波基网络作为系统的控制器,以系统的状态(或输出),或者是系统的目标值与输出值之差作为网络的输入,网络的输出 u 作为控制信号,通过一定的规则去调整权增益,从而实现系统的控制.下面给出小波基网络构造的基本原理和方法.

设 n 维离散混沌系统为 $y(k+1) = f[y(k)]$, 加控制信号 $u(k)$ 后变为 $y(k+1) = f[y(k)] + u(k)$. 其中 k 代表离散系统中差分的步数. $n \times 1$ 向量 $y(k)$ 表示 k 步时刻系统的状态变量, $u(k)$ 即表示小波网络输出. 小波基网络如图 1 所示. 由图中结构可得

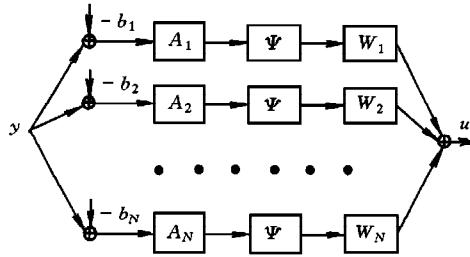


图 1 小波基网络结构

$$u = \sum_{i=1}^N w_i f_i, \quad (1)$$

其中权系数 w_i 为 $n \times 1$ 向量; $f_i = \phi[A_i(y - b_i)] = \phi(z_i)$, 这里 ϕ 为 $R^n \rightarrow R$ 上的小波函数, 取为 Morlet 小波; $A_i = \text{diag} \left[\frac{1}{a_{i1}}, \dots, \frac{1}{a_{in}} \right]$ 为 $n \times n$ 的矩阵; 小波函数的平移因子 b_i 为 $n \times 1$ 的列向量; 小波函数的伸缩因子 $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})^T$ 为 A_i 的相关向量.

设 y_r 为目标点, u^* 为相应的控制输入. k 时刻系统状态为 $y(k)$, 对时刻 $k+1$ 有

$$y(k+1) = f[y(k)] + u(k), \quad (2)$$

$$y_r(k+1) = f[y(k)] + u^*(k). \quad (3)$$

定义 $e(k+1) = y(k+1) - y_r(k+1)$, 则有 $e(k+1) = u(k) - u^*(k)$. 又定义能量函数为 $E(k+1) = \frac{1}{2} e^T(k+1) e(k+1)$, 则有

$$\frac{\partial E(k+1)}{\partial w_i(k)} = \frac{\partial E(k+1)}{\partial e(k+1)} \frac{\partial e(k+1)}{\partial u(k)} \frac{\partial u(k)}{\partial w_i(k)} = e(k+1) f_i = e(k+1) \phi(z_i).$$

由此可得权系数修正公式为

$$w_i(k+1) = w_i(k) - \eta \frac{\partial E(k+1)}{\partial w_i(k)}, \quad (4)$$

$$\text{即} \quad w_i(k+1) = w_i(k) - \eta e(k+1) \phi(z_i), \quad (5)$$

η 为修正因子, 初始权值 $w_i(0)$ 可选为 0.

对连续系统类似地可以推得同样公式.

在这里可以看出利用小波基控制系统接下来的问题就是如何选取 a_i 和 b_i . 因为如果伸缩因子 a_i 和平移因子 b_i 选择不适当, 那末 ϕ 就不能对所要求的非线性映射进行逼近. 一般而言, 实际系统的输出(或状态)范围往往可以得到. 若单变量系统状态的变化区间为 $[f_{\min}, f_{\max}]$, b_1 是该区间的某一点, 即 $b_1 = \xi_1(f_{\max} + f_{\min})$, a_1 则相应地取为区间的收缩, 有 $a_1 = \xi_2(f_{\max} - f_{\min})$, ξ_1 和 ξ_2 的典型值即是 0.5, 这样间隔 $[f_{\min}, f_{\max}]$ 就分成了两个子区间; 然后再在每个子区间, 重复同样的步骤, 进行第二、第三次划分, 并选取 a_2, b_2 和 a_3, b_3 , 以此类推, 直到所有的小波都被初始化. 这样变量使用到的小波元个数为 $N =$

$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^m$ 个, m 为区间划分的次数, 此时所需学习的权系数也为 N 个. 同理也可将区间 $[f_{\min}, f_{\max}]$ 分成 3 部分来选取 a_i 和 b_i . 当然也可以将两种方法混合使用. 对于 n 维变量情况 a_i 和 b_i 实际为向量 (a_{ij}) 和 $(b_{ij}, j = 1, 2, \cdots, n)$, 这两者可以按单变量的方法, 对各分量进行独立处理, 然后对这样独立处理后得到的 (a_{ij}) 和 (b_{ij}) 进行所有的组合.

对大部分系统, 每一个变量一般取 2 次划分即可. 当然小波数目取得越多, 控制的效果会越好. 只是网络的结构会变复杂, 但当小波的数目多到一定程度后, 个数的增加对系统的控制作用影响不大, 此时只能增加网络的复杂程度.

下面给出 Logistic 映射和 Duffing 方程混沌运动控制的实现过程. 前者是一个离散系统, 本文用系统状态作为小波网络输入, 将其控制到不稳定平衡点; 后者是一个二维的非自治系统, 本文用误差作为小波网络的输入, 将其稳定到周期轨道.

2.1 控制混沌系统到目标点

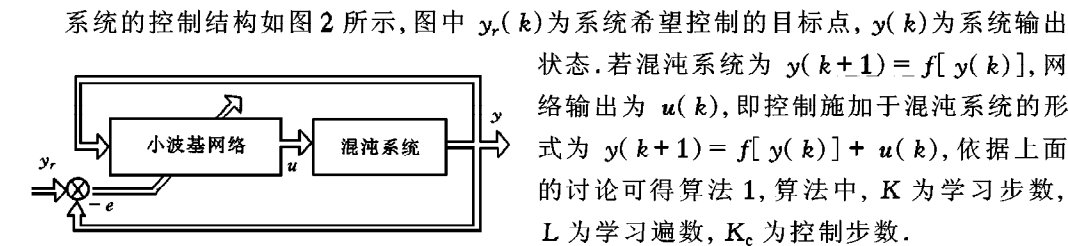


图 2 混沌系统小波基控制结构图(I)

2.1.1 学习算法

- 选取伸缩系数 a_i 和平移因子 b_i , 小波元个数 N ;
- 令权系数 w_i 的初始值为 0, 并给定修正因子 η 数值;
- 令学习遍数 $l=0$;
- 随机选取混沌系统初值, 并去掉暂态过程, 给定系统目标值 y_r ;
- 令学习步数 $k=0$;
- 依据(5)式修正权系数;
- 若 $k < K$, 则 $k = k + 1$, 返回(6), 否则转至(8);
- 若 $l < L$, 则 $l = l + 1$, 返回(4), 否则结束.

2.1.2 控制算法

- 给定系统初值 $y(0)$ 及系统目标值 y_r , 并令 $k=0$;
- 以系统状态 $y(k)$ 作为网络输入, 用学习好的权系数按(1)式计算控制 $u(k)$, 同时计算系统输出 $y(k+1)$;
- 若 $k < K_c$, 则 $k = k + 1$, 返回(2), 否则转至(4);
- 以时间 t 为横轴, $y(k)$ 和 y_r 为纵轴绘制曲线, 若经过一定时间后, 两曲线重合 (误差允许范围内), 则输出结果, 系统控制结束; 否则重新调整学习因子 η , 或者增大 L , K , 返回学习算法中的(3).

算例 1 Logistic 映射是具有一维相空间的系统, 它描述了生物群体的演化, 具有如下形式

$$y(k+1) = \mu y(k)(1 - y(k)). \quad (6)$$

已经证明, 当 $3.57 < \mu \leq 4.0$ 系统呈现混沌运动状态.

考虑 $\mu = 4.0$ 的情况, 此时平衡点为 $\bar{y} = 0.75$, 加上控制后, 系统方程变为

$$y(k+1) = 4.0 y(k)(1 - y(k)) + u(k), \quad (7)$$

依据算法 1, 取 $K = 100$, $L = 1000$, $\eta = 0.1$, 小波的个数为 3, $\xi_1 = \xi_2 = 0.5$, 同时考虑到 y 在 $(0, 1)$ 的范围内变化, 得 $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.25$, $a_3 = 0.25$, $b_1 = 0.5$, $b_2 = 0.25$, $b_3 = 0.75$. 若控制时取初始点 $y(0) = 0.05$, 目标点为平衡点即 $y_r = 0.75$, 则可得施加控制后系统的轨迹如图 3 所示. 由图可见, 系统经过两步, 即控制到了目标点, 而且从此以后一直稳定在该点.

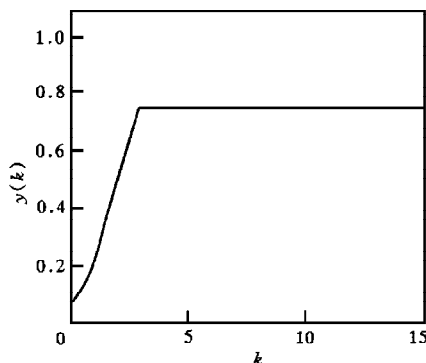


图 3 Logistic 映射的小波基控制

2.2 控制混沌系统到周期轨道

图 4 给出了另一种混沌控制结构, 图中 $y_r(t)$ 为系统期望轨道, $y(t)$ 为系统的状态输出.

$e(t)$ 是期望轨道和输出轨道之差. 若期望轨道的周期为 T 秒, 采样周期为 Δt , 则期望轨道一周期内的采样点数为 $L = T/\Delta t$, 若学习步数为 K , 控制步数为 K_c , 则有

算法 2 期望目标为周期轨道

2.2.1 学习算法

(1) 选取伸缩系数 a_i , b_i 和小波元个数 N ;

(2) 选定期望周期轨道 $y_r(t)$;

(3) 取定混沌系统的初值, 并去掉暂态过程, 给定学习因子 η ;

(4) 令 $k = 0$;

(5) 令 $J = 0$;

(6) 令 $l = 0$;

(7) 计算 $e(l) = y_r(l) - y(l)$, $J = J + e^2(l)$;

(8) 计算 $z_i(l) = A_i(e(l) - b_i)$, 并依据(5)式修正权系数, 同时计算网络输出和系统输出;

(9) 若 $l < L$, 则返回(7), 否则转至(10);

(10) 如果 J 未达到最小, 令 $k = k + 1$, 返回(5), 否则结束.

2.2.2 控制算法

(1) 给定系统初值 $y(0)$ 和目标轨道 $y_r(t)$;

(2) 令 $k = 0$;

(3) 计算 $e(k) = y_r(k) - y(k)$;

(4) 用学习好的权值计算小波网络输出, 并计算混沌系统输出 $y(k)$;

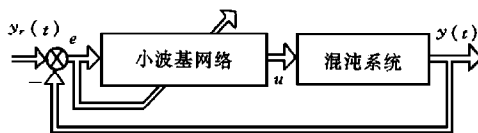


图 4 混沌系统的小波基控制结构图(II)

(5) 若 $k < K_c$, 则 $k = k + 1$, 否则, 转至(6);

(6) 以时间 t 为横轴, $y_r(t)$ 和 $y(t)$ 为纵轴绘制曲线, 若经过一定时间后, 两曲线重合 (误差允许范围内), 则输出结果, 系统控制结束, 否则重新调整学习因子 η , 或重新取系统初值, 返回学习算法中的(3).

算例 2 受迫 Duffing 振子是工程中典型的非线性振动问题, 无量纲化后的数学描述为

$$\ddot{y} + k\dot{y} + y^3 = B\cos t. \quad (8)$$

它是没有线性恢复力的受迫 Duffing 方程, 代表了一个受简谐激励结构的大弹性变形的运动. 已经证明 $B=10.0$, $k=0.1$ 时系统处于混沌运动状态. 将上式化为状态方程, 并施加控制 u 作用于 B , 则系统方程变为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -0.1 y_2 - y_1^3 + (10.0 + u)\cos t. \end{aligned} \quad (9)$$

控制时, 以 $B=14.35$ 时的轨道作为目标轨道, 其周期 $p=1$, 时间为 6.28 s. 由系统相图知, 混沌轨迹位于 y_1 和 y_2 两坐标的 $[-4.0, 4.0] \times [-6.0, 6.0]$ 区域内, 采用第二种划分方式, 可分别计算出 a_{ij} 和 b_{ij} , 有 $a_{11} = a_{21} = 8/3$, $a_{12} = a_{22} = 4.0$, $b_{11} = -4/3$, $b_{21} = 4/3$, $b_{12} = -2.0$, $b_{22} = 2.0$. 向量 a_i 和 b_i 为 $a_1 = [a_{11}, a_{12}]^T$, $a_2 = [a_{11}, a_{22}]^T$, $a_3 = [a_{21}, a_{12}]^T$, $a_4 = [a_{21}, a_{22}]^T$ 和 $b_1 = [b_{11}, b_{12}]^T$, $b_2 = [b_{11}, b_{22}]^T$, $b_3 = [b_{21}, b_{12}]^T$, $b_4 = [b_{21}, b_{22}]^T$, 小波基网络的结构如图 5 所示.

训练时取初始点 $y_1(0) = 0.3$, $y_2(0) = 0.4$, 并去掉 100 s 的暂态过程, 采样时间为 0.01 s, 取 $L=628$, $K=100$, $K_c=15000$, $\eta=0.29$. 则控制后系统相轨迹如图 6 中的曲线 1 所示, 图中曲线 2 为期望的目标轨道. 由图可见, 控制效果较好.

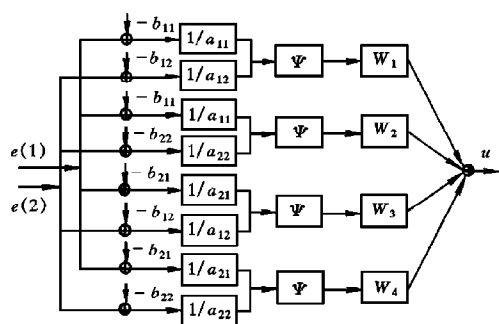


图 5 小波网络结构

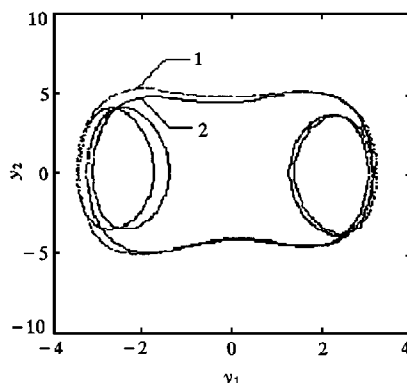


图 6 Duffing 系统施加控制后的相轨迹

2.3 分析与讨论

(1) 控制方案不唯一性 前面利用图 2 的控制方案将 Logistic 的混沌运动控制到了不动点, 同样也可用图 4 的原理去控制它. 这里以 Lorenz 混沌系统为例来阐明图 4 原理也可控制混沌运动到目标点, 依据算法 1, 取 $K=100$, $L=7000$, $\eta=0.1$, 小波元个数取为

7, 采样时间为 0.1 s , 积分步长为 0.01 s . 若控制时取初始点为 $(-8.49, -8.49, 27.00)$, 目标点为平衡点即 $(8.49, 8.49, 27.00)$, 则可得施加控制后 Lorenz 系统的响应曲线如图 7 所示, 系统大约经过 2 s , 即控制到了目标点, 而且从此以后一直稳定在该点, 控制效果较为满意. 当然也可用图 2 原理框图控制混沌运动到周期轨道.

(2) 关于控制目标 控制混沌系统到目标点时, 该目标点不仅仅限于系统的不动点, 也可以是混沌区域内的其他点.

(3) 关于控制信号 图 8 中曲线 2 为 $4.0y(k)(1-y(k))$, 曲线 3 为小波网络输出信号 $u(k)$, 曲线 1 是曲线 2 和曲线 3 的叠加, 即为 $4.0y(k)(1-y(k)) + u(k)$. 由曲线 1 容易说明, $(0, 1)$ 区间内的任意初始点都将收敛于 0.75 处, 即此时系统由混沌运动状态变为了规则运动状态. 曲线 1 的平坦区域则使控制响应的过渡过程缩短.

(4) 关于噪声对系统的影响 对 Duffing 方程的小波控制, 在 y_1, y_2 两式右端加入均值为 0 , 方差为 1 的扰动 δ_1 和 δ_2 , δ_1 和 δ_2 彼此互相独立, 并且具有高斯型概率分布密度. 有

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + A_1 \delta_1, \\ \dot{y}_2 &= -0.1 y_2 - y_1^3 + (10.0 + u)\cos t + A_2 \delta_2, \end{aligned} \quad (10)$$

取噪声幅值 A_1, A_2 均为 1.5 , 可得控制后, 系统的相轨迹如图 9 所示, 它与 OGY 方法控

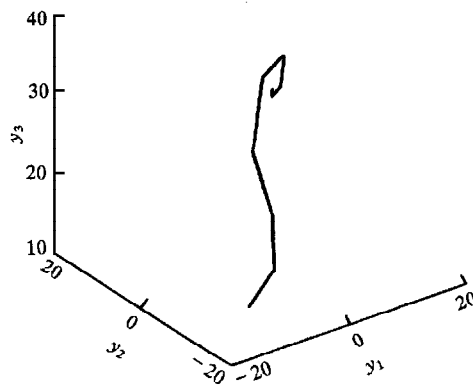


图 7 Lorenz 系统施加控制后的相轨迹

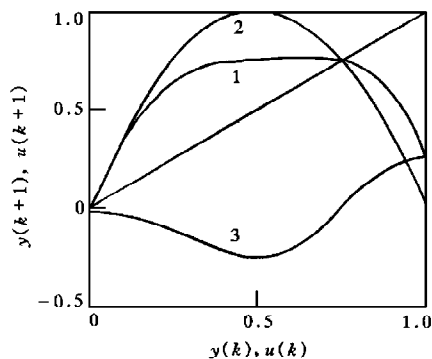


图 8 控制曲线 $u(k)$ 与输出状态 $y(k)$

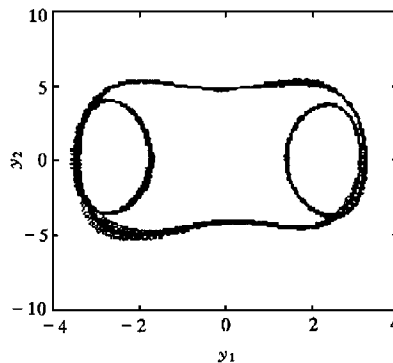


图 9 噪声对系统的影响

制时, A_1, A_2 取 0.5 时的效果差不多. 可见小波控制系统的抗噪性比 OGY 控制方法要好. 对 Logistic 映射同样可施加扰动, 经仿真可得, 当噪声幅值为 0.05 时, 系统输出 $y(k)$ 在目标值 $y_r \pm 0.2$ 范围内变化, 当噪声幅值为 0.02 时, 系统输出 $y(k)$ 在目标值 $y_r \pm 0.05$ 范围内变化.

3 结 束 语

从以上讨论可以看出,基于小波基网络的混沌控制由于其控制作用采用闭环形式,再加之网络中权系数可以自学习,使得这种方法的适用面较广,控制精度较高;又由于只学习了各小波元的权系数,网络学习时参数调整少,加之小波基函数具有紧支集,小波元间的互相影响小,因此网络学习速度较快,系统的过渡过程时间较短。

- [1] E. Ott *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 1196.
- [2] R. Lima *et al.*, *Phys. Rev.*, **A41**(1990), 726.
- [3] E. A. Jackson, *Physica*, **D50**(1991), 341.
- [4] Y. Braiman *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **66**(1991), 2545.
- [5] B. Peng *et al.*, *J. Phys., Chem.*, **95**(1991), 4957.
- [6] G. Hu *et al.*, *J. Phys., Int. J. Bifurcation and chaos.*, **5**(1995), 901.
- [7] B. A. Huberman *et al.*, *IEEE Trans. On CAS.* **37**(1990), 547.
- [8] Q. Zhang *et al.*, *IEEE Trans. On Neural Network*, **3**(1992), 889.
- [9] L. Y. Cao *et al.*, *Physica* **D85**(1995), 225.

WAVELET BASE CONTROL FOR CHAOS MOTION*

WANG ZHONG-YONG

(Department of electronic engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052)

CAI YUAN-LI JIA DONG

(Department of automatic control, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

(Received 6 March 1998; revised manuscript received 2 August 1998)

ABSTRACT

Based on the property that the wavelet can approximate any nonlinear continuous function in the compact supporting set, a new method is presented to control chaos. By this method the trajectories of some typical chaotic systems, such as Duffing equation, Lorenz model, etc., are controlled to the target orbits or points. It is proved that the wavelet base control algorithm is feasible and control effect is better.

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19402011).