

有限维希尔伯特空间含时谐振子的 时间演化及 Berry 相位

李志坚 程建刚 梁九卿

(山西大学物理系,太原 030006)

(1998 年 12 月 25 日收到;1999 年 4 月 10 日收到修改稿)

研究了有限维希尔伯特空间含时谐振子的时间演化.通过适当的含时规范变换得到有限维含时谐振子量子态时间演化的封闭解,并给出量子态的 Berry 相位.最后讨论了驱动项对相干态压缩特性的影响.

PACC: 0413; 0365

1 引 言

有限维希尔伯特空间量子系统有普遍意义,例如自旋系统,量子光学中有限能级的原子等.近来由于量子密码,量子通讯以及量子计算等领域研究的快速进展,有限维希尔伯特空间谐振子研究倍受关注.有限维希尔伯特空间的谐振子代数,相干态的构造已被许多作者广泛地研究^[1-4].最近,一个十分有趣的研究进展是,发现选择适当的谐振子代数可以实现有限维希尔伯特空间谐振子坐标表示^[1].这一谐振子代数在大 N (希尔伯特空间维数)极限下趋于通常的谐振子代数,波函数变为通常谐振子本征波函数,即厄米多项式.本文把这一坐标表示实现的谐振子扩展到含时情况,给出其精确含时解和时间演化算符.我们也讨论了周期演化的 Berry 相位^[5]及含时相干态的压缩特性.含时系统的研究有重要的实际意义,例如,交变外场驱动下的有限维希尔伯特空间量子系统.

2 有限维希尔伯特空间谐振子

考虑由态 $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |N\rangle$ 展开的 $(N+1)$ 维希尔伯特空间.文献 1 指出如果选取下列谐振子代数

$$[\hat{K}_0, \hat{A}] = -\hat{A} [\hat{K}_0, \hat{A}^\dagger] = \hat{A}^\dagger, \\ [\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 1 + N - 2\hat{K}_0, \quad (1)$$

则有

$$\hat{K}_0 |n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle, \quad (2)$$

$$\hat{A}|0\rangle = \hat{A}^\dagger|N\rangle = 0, \quad (3)$$

$$\hat{A}|n\rangle = \sqrt{n(N-n+1)}|n-1\rangle, \quad (4)$$

$$\hat{A}^\dagger|n\rangle = \sqrt{(n+1)(N-n)}|n+1\rangle. \quad (5)$$

(2) 式为谐振子本征方程.算符 \hat{K}_0 有 $(N+1)$ 个本征态,因此可以看作有限维谐振子的哈密顿算符.相应地,算符 \hat{A} 和 \hat{A}^\dagger 是有限维谐振子的湮没算符和产生算符.而且,可以实现有限维希尔伯特空间谐振子的坐标表示.其中波函数是

$$\Phi_n^N(\zeta) = \zeta |n\rangle = d_n^{-1} K_n^p(\zeta |pN + h^{-1}\zeta, N) \\ \times \rho^{1/2}(\zeta |pN + h^{-1}\zeta), \quad (6)$$

其中 $0 \leq n \leq N$, $h^{-1} = \sqrt{2pqN}$, $-pN \leq h^{-1}\zeta \leq qN$, $p+q=1$. $K_n^p(x, N)$ 是 n 次 Kravchuk 多项式^[6]. d_n 和 $\rho(x)$ 分别是多项式的归一化因子和权重函数. Kravchuk 多项式满足相应的正交关系:

$$m |n\rangle = \sum_{i=0}^N \Phi_m^N(\zeta_i) \Phi_n^N(\zeta_i) = \delta_{mn}, \quad (7) \\ m, n = 0, 1, 2, \dots, N; \zeta_i = (i - pN)h,$$

并且当 $n > N$ 时, $\Phi_n^N = 0$. $\hat{K}_0, \hat{A}^\dagger, \hat{A}$ 的相应算符形式也在文献 1 中给出.

这样,我们就获得了具有 $(N+1)$ 个能级的有限维希尔伯特空间谐振子系统.

3 量子态的时间演化和 Berry 相位

本文把坐标表示实现的有限维希尔伯特空间谐振子推广到含时情况,为此构造下列含时哈密顿算符

$$\hat{H}(t) = \omega(t)\hat{K}_0 + G(t) [\hat{A}^\dagger e^{i\alpha(t)} + \hat{A} e^{-i\alpha(t)}], \quad (8)$$

$$\hat{K}_0 = \frac{1}{2}[(\hat{A}^\dagger \hat{A} - \hat{A} \hat{A}^\dagger) + N + 1], \quad (9)$$

其中 \hat{K}_0 由(1)式给出, $\omega(t)$, $G(t)$ 和 $\varphi(t)$ 是时间的任意实函数.(8)式右边第一项是有限维希尔伯特空间自由谐振子的含时哈密顿算符, 第二项表示外场驱动相互作用. 量子态的时间演化遵循含时薛定谔方程

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (10)$$

其中使用了自然单位 $\hbar = c = 1$. 我们考虑如下含时规范变换,

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{R}(t) |\Psi'(t)\rangle, \quad (11)$$

$$\hat{H}(t) = \hat{R}^{-1}(t) \hat{H}(t) \hat{R}(t) - i \hat{R}^{-1}(t) \frac{\partial}{\partial t} \hat{R}(t). \quad (12)$$

含时么正算符的定义为

$$\hat{R}(t) = \exp\left[\frac{\chi(t)}{2}(\hat{A}^\dagger e^{-i\chi(t)} - \hat{A} e^{i\chi(t)})\right], \quad (13)$$

其中待定实参数 $\chi(t)$ 和 $\beta(t)$ 与哈密顿算符中的 $G(t)$, $\varphi(t)$ 和 $\omega(t)$ 有关, 在含时规范变换下, 薛定谔方程形式不变

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi'(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi'(t)\rangle. \quad (14)$$

如果 $\chi(t)$ 和 $\beta(t)$ 满足下方程

$$\dot{\gamma} = 2G \sin(\varphi + \beta), \quad (15)$$

$$\frac{1}{2}(\dot{\beta} - \omega) \sin \gamma = G \cos \gamma \cos(\varphi + \beta), \quad (16)$$

则含时规范变换的哈密顿算符 \hat{H}' 是对角的, 即

$$\hat{H}(t) = f(t) \left(\hat{K}_0 - \frac{N+1}{2} \right) + \frac{1}{2}(N+1)\omega, \quad (17)$$

其中

$$f(t) = \omega \cos \gamma - 2G \sin \gamma \cos(\beta + \varphi) + 2\dot{\beta} \sin^2 \frac{\gamma}{2}. \quad (18)$$

(17)式的计算过程中, 使用了下面的关系式,

$$\begin{aligned} \hat{R}^\dagger(t) \hat{A}^\dagger \hat{R}(t) &= \hat{A}^\dagger \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \hat{A} e^{2i\beta} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2}(2\hat{K}_0 - N - 1) e^{i\beta} \sin \gamma, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{R}^\dagger(t) \hat{A} \hat{R}(t) &= \hat{A} \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \hat{A}^\dagger e^{-2i\beta} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2}(2\hat{K}_0 - N - 1) e^{-i\beta} \sin \gamma, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\hat{R}^\dagger(t) \hat{K}_0 \hat{R}(t) = \frac{1}{2}(\hat{A}^\dagger e^{-i\beta} + \hat{A} e^{i\beta}) \sin \gamma$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2}(2\hat{K}_0 - N - 1) \cos \gamma \\ &+ \frac{1}{2}(N+1), \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{R}^\dagger(t) \left[i \frac{\partial}{\partial t} \hat{R}(t) \right] &= -\alpha \hat{K}_0 - (N-1)\dot{\beta} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \\ &+ \hat{A}^\dagger e^{-i\beta} \left(i \frac{\dot{\gamma}}{2} + \frac{\dot{\beta}}{2} \sin \gamma \right) \\ &+ \hat{A} e^{i\beta} \left(-i \frac{\dot{\gamma}}{2} + \frac{\dot{\beta}}{2} \sin \gamma \right). \quad (22) \end{aligned}$$

(14)式的一般解可表示为

$$|\Psi'(t)\rangle = \sum_n C_n e^{-i(t) \hat{K}_n - \frac{N+1}{2}} e^{-i\delta} |n\rangle \quad (23)$$

其中

$$\delta(t) = \int_0^t dt' f(t'),$$

$$\alpha(t) = \int_0^t dt' \frac{1}{2}(N+1)\omega(t'), \quad (24)$$

K_n 是算符 \hat{K}_0 的本征值 $n + \frac{1}{2}$; C_n 是与时间无关的叠加系数, 由 $|\Psi(t)\rangle$ 和 $\hat{R}(t)$ 的初始条件决定. 因此, 原薛定谔方程(10)的一般解可通过么正变换(11)式得到. 很容易证明

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{R}(t) e^{-i(t) \hat{K}_0 - \frac{N+1}{2}} e^{-i\alpha(t)} \hat{R}^\dagger(0) |\Psi(0)\rangle, \quad (25)$$

其中 $|\Psi(0)\rangle = \sum_n C_n \hat{R}(0) |n\rangle$, 则时间演化算符为

$$\hat{U}(t, 0) = \hat{R}(t) e^{-i\alpha(t)} e^{-i(t) \hat{K}_0 - \frac{N+1}{2}} \hat{R}^\dagger(0), \quad (26)$$

并且满足么正演化算符的特性

$$\hat{U}^\dagger(t, 0) = \hat{U}(0, t) = \hat{R}(0) e^{i\alpha(t)} e^{i(t) \hat{K}_0 - \frac{N+1}{2}} \hat{R}^\dagger(t), \quad (27)$$

$$\hat{U}(t_2, t_1) = \hat{U}(t_2, 0) \hat{U}^\dagger(t_1, 0). \quad (28)$$

假定初始时刻系统 \hat{H} 处于 \hat{K}_0 的本征态 $|n\rangle$ 且 $\hat{R}(0) = 1$ 即初始时刻无驱动, 则系统总相位为

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= - \int_0^t dt' \left[f(t') \left(K_n - \frac{N+1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(N+1)\omega(t') \right] \\ &= \int_0^t dt' n \left[\hat{R}^\dagger(t') i \frac{\partial}{\partial t} \hat{R}(t') \right. \\ &\quad \left. - \hat{R}^\dagger(t') \hat{H}(t') \hat{R}(t') \right] |n\rangle. \quad (29) \end{aligned}$$

系统 \hat{H} 由初态 $|n\rangle$ 开始演化的动力学相位

$$\theta_D = - \int_0^t dt' \langle \Psi(t') | \hat{H}(t') | \Psi(t') \rangle$$

$$= - \int_0^t dt' \langle n | \hat{R}^\dagger(t') \hat{H}(t') \hat{R}(t') | n \rangle \quad (30)$$

恰为(29)式中第二项.

接着我们考虑绝热近似下的 Berry 相位. 在绝热条件下(15)式和(16)式中的时间微分项 $\dot{\gamma}$, $\dot{\beta}$ 可忽略, 因而

$$\beta = k\pi - \varphi + \frac{1}{2}\omega \sin\gamma + (-1)^k G \cos\gamma = 0, \quad (31)$$

其中 k 为任意整数. 由(19)(20)(21)和(31)式很容易证明

$$\begin{aligned} \hat{R}^\dagger(t) \hat{H}(t) \hat{R}(t) &= \left(\frac{1}{2}\omega \cos\gamma - (-1)^k G \sin\gamma \right) \\ &\times (2\hat{K}_0 - N - 1) + \frac{1}{2}\omega(N + 1), \quad (32) \end{aligned}$$

因此, 在绝热条件下, $|\hat{R}(t)\rangle|n\rangle$ 成为哈密顿 $\hat{H}(t)$ 的瞬时本征态. 按照文献[5, 7, 8]中的定义(29)式中的第一项正是系统 $\hat{H}(t)$ 随时间演化而出现的 Berry 相位. 如果 $\hat{R}(T) = \hat{R}(0)$ 则

$$\begin{aligned} \theta_B &= \int_0^T dt' \langle n | \hat{R}^\dagger(t') \dot{\hat{R}}(t') | n \rangle \\ &= \int_0^T dt' \left[-(2K_n - N - 1)\dot{\beta} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right] \\ &= - \oint (2K_n - N - 1) \sin^2 \frac{\gamma}{2} d\beta \\ &= (2n - N) \oint \sin^2 \frac{\gamma}{2} d\varphi, \quad (33) \end{aligned}$$

其中

$$\sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\mp \omega + \sqrt{\omega^2 + 4G^2}}{\sqrt{\omega^2 + 4G^2}} \right]. \quad (34)$$

可见, 有限维希尔伯特空间谐振子 Berry 相位与空间维数有关, 当空间维数为奇数时, 存在 Berry 相位恒为 0 的量子态 $|\frac{N}{2}\rangle$.

另外, 我们看到系统 $\hat{H}(t)$ 的总相位 $\theta_T(t)$ 正是系统 $\hat{H}(t)$ 的动力学相位. 事实上, 动力学相位和 Berry 相位就其根源来说都是动力学的^[8], 哈密顿量 $\hat{H}(t)$ 和 $\hat{H}'(t)$ 由规范变换相联系, 在规范变换下 Berry 相位被转化为动力学相位, 但总相位保持不变^[9, 10].

4 含时相干态的压缩特性

我们讨论驱动项对有限维希尔伯特空间谐振子系统相干态压缩特性的影响. 文献[1]中构造了有限维希尔伯特空间谐振子系统的相干态

$$\begin{aligned} |\mu\rangle &= \exp(\mu \hat{A}^\dagger - \mu^* \hat{A}) | 0 \rangle \\ &= (1 + |\mu|^2)^{-N/2} \exp(\mu \hat{A}^\dagger) | 0 \rangle \\ &= (1 + |\mu|^2)^{-N/2} \sum_{n=0}^N \sqrt{C_N^n} \mu^n | n \rangle, \quad (35) \end{aligned}$$

其中 μ 是复数. 用 $\sqrt{N}\hat{A}$ 和 $\frac{\mu}{\sqrt{N}}$ 分别代替 \hat{A} 和 μ , 当 $N \rightarrow \infty$ 时就变为通常谐振子的相干态.

利用时间演化算符(26)式, 仍选取 $\chi(0) = 0$, 湮没算符和产生算符的时间演化由下式给出,

$$\begin{aligned} \hat{A}(t) &= \hat{A}f_1(t) + \hat{A}^\dagger f_2(t) \\ &\quad + (2\hat{K}_0 - N - 1)f_3(t), \quad (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}^\dagger(t) &= \hat{A}^\dagger f_1^*(t) + \hat{A} f_2^*(t) \\ &\quad + 2(\hat{K}_0 - N - 1)f_3^*(t), \quad (37) \end{aligned}$$

其中

$$f_1(t) = e^{-i\epsilon} \cos^2 \frac{\gamma}{2}, \quad (38)$$

$$f_2(t) = -e^{-i\epsilon} e^{-2i\beta} \sin^2 \frac{\gamma}{2}, \quad (39)$$

$$f_3(t) = -\frac{1}{2} e^{-i\beta} \sin\gamma. \quad (40)$$

\hat{K}_0 的时间演化为

$$\begin{aligned} \hat{K}_0(t) &= \frac{1}{2} [\hat{A}^\dagger e^{i\epsilon} e^{-i\beta} \sin\gamma + \hat{A} e^{-i\epsilon} e^{i\beta} \sin\gamma \\ &\quad + (2\hat{K}_0 - N - 1) \cos\gamma + (N + 1)]. \quad (41) \end{aligned}$$

我们定义两个含时正交厄米算符,

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2} [\hat{A} e^{i\epsilon} + \hat{A}^\dagger e^{-i\epsilon}], \quad (42)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{2i} [\hat{A} e^{i\epsilon} - \hat{A}^\dagger e^{-i\epsilon}]. \quad (43)$$

对易关系为

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \frac{1}{2i} [\hat{A}^\dagger, \hat{A}] = \frac{1}{2i} (2\hat{K}_0 - N - 1). \quad (44)$$

利用(36)(37)式得到

$$\begin{aligned} \hat{X}_1(t) &= g_{11}(t) \hat{A} + g_{12}(t) \hat{A}^\dagger \\ &\quad + g_{13}(t) (2\hat{K}_0 - N - 1), \quad (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_2(t) &= g_{21}(t) \hat{A} + g_{22}(t) \hat{A}^\dagger \\ &\quad + g_{23}(t) (2\hat{K}_0 - N - 1), \quad (46) \end{aligned}$$

其中

$$g_{11} = \frac{1}{2} (f_1 e^{i\epsilon} + f_2^* e^{-i\epsilon}), \quad (47)$$

$$g_{12} = \frac{1}{2} (f_2 e^{i\epsilon} + f_1^* e^{-i\epsilon}), \quad (48)$$

$$g_{13} = \frac{1}{2} (f_3 e^{i\epsilon} + f_3^* e^{-i\epsilon}), \quad (49)$$

$$g_{21} = \frac{1}{2i}(f_1 e^{i\alpha} - f_2^* e^{-i\alpha}), \quad (50)$$

$$g_{22} = \frac{1}{2i}(f_2 e^{i\alpha} - f_1^* e^{-i\alpha}), \quad (51)$$

$$g_{23} = \frac{1}{2i}(f_3 e^{i\alpha} - f_3^* e^{-i\alpha}). \quad (52)$$

令 $V(\hat{X}_i(t)) = \langle \mu | \hat{X}_i(t) | \mu \rangle - \langle \mu | \hat{X}_i(t) | \mu \rangle^2$, 由 (45) (46) 式得到

$$\begin{aligned} V(\hat{X}_i(t)) = & -N(1 + |\mu|^2)^{-2} (g_{i1}^2 \mu \mu + g_{i2}^2 \mu^* \mu^* \\ & + 2g_{i1}g_{i2} \mu \mu^*) \\ & - 4N(1 + |\mu|^2)^{-2} |\mu|^2 (g_{i3}^2 \mu \mu^* \\ & + g_{i1}g_{i3} \mu + g_{i2}g_{i3} \mu^*) \\ & + 2N(1 + |\mu|^2)^{-1} (g_{i1}g_{i2} + g_{i1}g_{i3} \mu \\ & + g_{i2}g_{i3} \mu^* + g_{i1}g_{i2} \mu \mu^* + 2g_{i3}^2 \mu \mu^*) \\ & - Ng_{i1}g_{i2}, \end{aligned} \quad (53)$$

其中利用了对易关系式 (1) 和下面的关系式,

$$\langle \mu | \hat{A} | \mu \rangle = N(1 + |\mu|^2)^{-1} \mu, \quad (54)$$

$$\langle \mu | \hat{A}^\dagger | \mu \rangle = N(1 + |\mu|^2)^{-1} \mu^*, \quad (55)$$

$$\langle \mu | \hat{K}_0 | \mu \rangle = N(1 + |\mu|^2)^{-1} \mu \mu^* + \frac{1}{2}, \quad (56)$$

$$\langle \mu | \hat{A}\hat{A} | \mu \rangle = (N^2 - N)(1 + |\mu|^2)^{-2} \mu \mu, \quad (57)$$

$$\langle \mu | \hat{A}^\dagger \hat{A}^\dagger | \mu \rangle = (N^2 - N)(1 + |\mu|^2)^{-2} \mu^* \mu^*, \quad (58)$$

$$\langle \mu | \hat{A}\hat{A}^\dagger | \mu \rangle = (N^2 - N)(1 + |\mu|^2)^{-2} \mu^* \mu + N(1 + |\mu|^2)^{-1}, \quad (59)$$

$$\langle \mu | \hat{A}\hat{K}_0 | \mu \rangle = (N^2 - N)(1 + |\mu|^2)^{-2} \mu^* \mu \mu + \frac{3}{2}N(1 + |\mu|^2)^{-1} \mu, \quad (60)$$

$$\langle \mu | \hat{K}_0 \hat{A}^\dagger | \mu \rangle = (N^2 - N)(1 + |\mu|^2)^{-2} \mu^* \mu^* \mu + \frac{3}{2}N(1 + |\mu|^2)^{-1} \mu^*, \quad (61)$$

$$\langle \mu | \hat{K}_0 \hat{K}_0 | \mu \rangle = (N^2 - N)(1 + |\mu|^2)^{-2} \mu^* \mu^* \mu \mu + 2N(1 + |\mu|^2)^{-1} \mu^* \mu + \frac{1}{4}, \quad (62)$$

另外, 可算得

$$\begin{aligned} & |\langle \mu | [\hat{X}_1(t), \hat{X}_2(t)] | \mu \rangle| \\ = & \left| \frac{1}{2i} N(1 + |\mu|^2)^{-1} \mu^* e^{i\alpha} e^{-i\beta} \sin \gamma \right. \\ & + \frac{1}{2i} N(1 + |\mu|^2)^{-1} \mu e^{-i\alpha} e^{i\beta} \sin \gamma \\ & \left. + \frac{1}{2i} [2N(1 + |\mu|^2)^{-1} \mu^* \mu \cos \gamma - N \cos \gamma] \right|. \end{aligned} \quad (63)$$

定义压缩度

$$S_{\chi}(t) = \frac{2V(\hat{X}_1(t)) - |\langle \mu | [\hat{X}_1(t), \hat{X}_2(t)] | \mu \rangle|}{|\langle \mu | [\hat{X}_1(t), \hat{X}_2(t)] | \mu \rangle|}. \quad (64)$$

如果 $S_1 < 0$ 或 $S_2 < 0$, 就表示相干态 $|\mu\rangle$ 具有正交压缩特性. 可以看出, 如果 $\chi(t) \equiv 0$, $S_{\chi}(t)$ 退化到文献 [1] 的结果. 文献 [1] 中已经表明: 恰当选取 μ 的值, 相干态 $|\mu\rangle$ 呈现正交压缩特性. 在这里我们用特例讨论哈密顿 (8) 式中驱动项对相干态 $|\mu\rangle$ 压缩效应的影响.

我们假定 $\varphi(t)$ 的形式为

$$\varphi(t) = -\int_0^t dt' \omega(t') + \varphi_0, \quad (65)$$

其中 φ_0 是初相位. 基于这种假设, 辅助方程 (15), (16) 式有下面形式的特解,

$$\chi(t) = 2\int_0^t dt' G(t'),$$

$$\beta(t) = \frac{1}{2}\pi - \varphi_0 + \int_0^t dt' \omega(t'). \quad (66)$$

把 (66) 式代入 (18) 和 (24) 式得到 $\epsilon(t) = \int_0^t dt' \omega(t')$. 所以

$$f_1(t) = e^{-i\alpha} \cos^2 \frac{\gamma}{2}, \quad (67)$$

$$f_2(t) = e^{-i\alpha} e^{2i\varphi_0} \sin^2 \frac{\gamma}{2}, \quad (68)$$

$$f_3(t) = \frac{1}{2} i e^{-i\alpha} e^{i\varphi_0} \sin \gamma. \quad (69)$$

令 $\mu = r e^{i\theta}$, 当 $r = \frac{1}{2}$, $\theta = 0$ 时, 从文献 [1] 中看到 $S_1 < 0$, 即 $t = 0$ 时厄米算符 $\hat{X}_1(t)$ 被压缩. 现在我们选取特定的 φ_0 , 看 $\chi(t)$ 对其的影响.

选取 $\varphi_0 = 0$, 由 (47)–(53) (63) 式得到

$$V(\hat{X}_1(t)) = \frac{9N}{100}, \quad (70)$$

$$V(\hat{X}_2(t)) = N \left(\frac{4}{25} \sin^2 \gamma + \frac{1}{4} \cos^2 \gamma \right), \quad (71)$$

$$|\langle \mu | [\hat{X}_1(t), \hat{X}_2(t)] | \mu \rangle| = \frac{3N}{10} |\cos \gamma|. \quad (72)$$

选取 $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$, 由 (47)–(53) (63) 式得到

$$\begin{aligned} V(\hat{X}_1(t)) = & N \left(\frac{1}{4} \sin^4 \frac{\gamma}{2} + \frac{9}{100} \cos^4 \frac{\gamma}{2} + \frac{2}{25} \sin^2 \gamma \right) \\ & - N \frac{3\sqrt{2}}{25} \cos \gamma \sin \gamma, \end{aligned} \quad (73)$$

$$V(\hat{X}_2(t)) = N \left(\frac{9}{100} \sin^4 \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4} \cos^4 \frac{\gamma}{2} + \frac{2}{25} \sin^2 \gamma \right), \quad (74)$$

$$|\mu[\hat{X}_1(t), \hat{X}_2(t)]\mu| = \left| \frac{\sqrt{2}}{5} \sin \gamma - \frac{3}{10} \cos \gamma \right|. \quad (75)$$

选取 $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, 由(47)-(53)(63)式得到

$$V(\hat{X}_1(t)) = N \left(\frac{4}{25} \sin^2 \gamma + \frac{9}{100} \cos^2 \gamma - \frac{6}{25} \sin \gamma \cos \gamma \right), \quad (76)$$

$$V(\hat{X}_2(t)) = \frac{N}{4}, \quad (77)$$

$$|\mu[\hat{X}_1(t), \hat{X}_2(t)]\mu| = \frac{4N}{5} \left| \frac{1}{2} \sin \gamma - \frac{3}{8} \cos \gamma \right|, \quad (78)$$

产生压缩的条件 $S_i(t) < 0$ 等价于 $V(\hat{X}_i(t)) < \frac{1}{2} |\mu[\hat{X}_1(t), \hat{X}_2(t)]\mu|$ 图 1 2 3 分别给出三

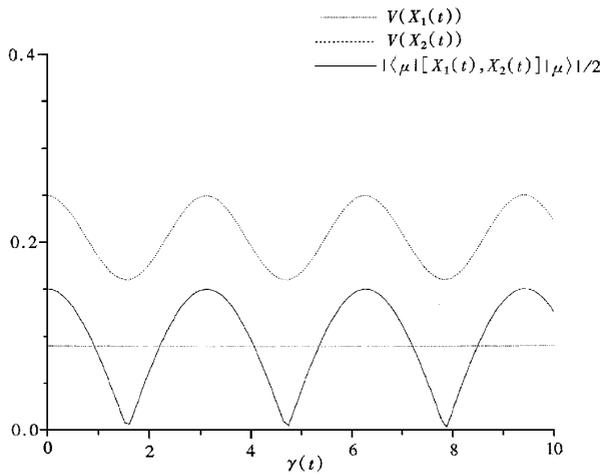


图 1 $\varphi_0 = 0$

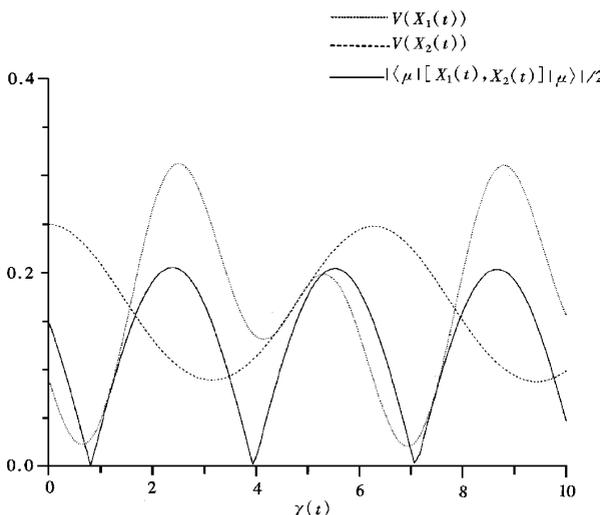


图 2 $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$

种情况 $V(\hat{X}_1(t)), V(\hat{X}_2(t))$ 和 $\frac{1}{2} |\mu[\hat{X}_1(t),$

$\hat{X}_2(t)]\mu|$ 三者随 $\gamma(t)$ 的变化关系.

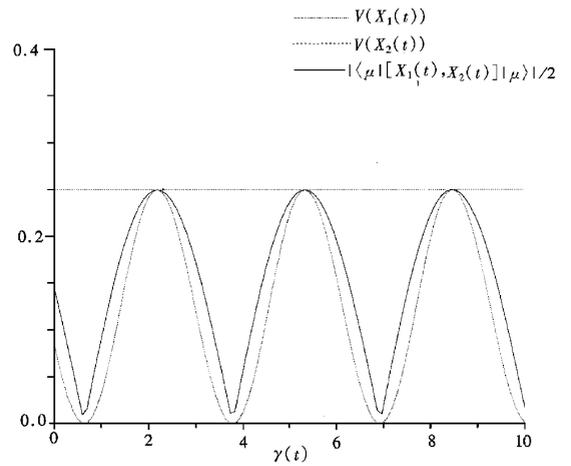


图 3 $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

从图 1 2 3 中明显看出,相干态的压缩效应受到了驱动参数 $\gamma(t)$ 的影响. $t=0$ 时厄米算符 $\hat{X}_1(t)$ 被压缩,随着 $\gamma(t)$ 随时间的变化,出现了 $\hat{X}_2(t)$ 被压缩或者两者都不被压缩的情况,改变了含时相干态的压缩效应.

5 结 论

利用适当的含时规范变换,得到了具有封闭对称代数的有限维希尔伯特空间含时谐振子系统的精确解及时间演化算符.有限维谐振子系统量子态的 Berry 相位与希尔伯特空间维数有关.当空间维数为奇数时,存在 Berry 相位恒为零的量子态.另外,我们研究了驱动项对有限维希尔伯特空间谐振子系统含时相干态压缩效应的影响.

[1] B Roy, P Roy, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31**(1998), 1307.
 [2] D. T. Pegg, S. M. Barnett, *Phys. Rev.* **A39**(1989), 1665.
 [3] V. Buzek, A. D. Wilson-Gordon, P. L. Knight, W. K. Lai, *Phys. Rev.* **A45**(1992), 8079.
 [4] L. M. Kuang, F. B. Wang, Y. G. Zhou, *Phys. Lett.* **A183**(1993), 1.
 [5] M. V. Berry, *Proc. R. Soc.* **A392**(1984), 45; **A392**(1984), 3744.
 [6] A. F. Nikiforov, V. B. Suslow, *Special Functions of Mathematical Physics*(1988) Boston, MA: Birkhauser.
 [7] Y. Z. Lai, J. Q. Liang, H. J. W. Müller-Kirsten, J. G. Zhou, *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**(1996), 1773; *Phys. Rev.* **A53**(1996), 3691.
 [8] J. Y. Zeng, Y. A. Lei, *Phys. Rev.* **A51**(1995), 4415.
 [9] J. Q. Liang, X. X. Ding, *Phys. Lett.* **A153**(1991), 273.
 [10] G. Giararini et al., *Phys. Lett.* **A138**(1989), 235; *J. Phys.* **A22**(1989), 3513.

TIME EVOLUTION AND BERRY PHASES OF A TIME-DEPENDENT OSCILLATOR IN FINITE-DIMENSIONAL HILBERT SPACE

LI ZHI-JIAN CHENG JIAN-GANG LIANG JIU-QING

(*Department of Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006*)

(Received 25 December 1998 ; revised manuscript received 10 April 1999)

ABSTRACT

In this paper we investigate the time evolution of a time-dependent oscillator in finite-dimensional Hilbert space. By performing appropriate time-dependent gauge transformation, closed formulas for the time evolution of quantum states and Berry phases are obtained. Finally, we discuss the influence of the driving term in the Hamiltonian on the squeezed feature of coherent states.

PACC : 0413 ; 0365