

基于收缩映射的奇异非混沌系统同步*

刘剑波 叶春飞 张树京

(上海铁道大学电信系,上海 200331)

(1999 年 3 月 25 日收到,1999 年 4 月 24 日收到修改稿)

提出一种基于收缩映射的奇异非混沌系统同步方案.通过利用一种混沌系统驱动另一种混沌系统产生出奇异非混沌吸引子,由于奇异非混沌吸引子的 Lyapunov 指数为负值,因而可有效抑制混沌系统对初始状态的敏感程度.为实现两个奇异非混沌吸引子的同步,文中采用收缩映射实现混沌驱动系统的快速同步.研究表明,该方案能够快速实现同步,并且有较强的鲁棒性,易于实现,可用于混沌保密通信.

PACC: 0545

1 引 言

自从 Pecora 和 Carroll 发现两个混沌系统在一定条件下可以实现同步^[1],混沌系统的同步便引起了广泛的关注.特别是在保密通信领域.

混沌系统由于具有正的 Lyapunov 指数,因而对初始状态十分敏感,初始值间任何微小的差异都会随着系统演化而被迅速放大,最后变得完全不相关,这使得混沌通信实际上难以实现.为了能够实现混沌同步,许多工作都是在具有自同步属性的混沌系统上展开的^[1-4].但由于目前发现的具有自同步特性的混沌系统并不多,因而就限制了这类方法的应用范围.

目前,对奇异非混沌吸引子的研究引起了人们的兴趣.利用混沌信号或白噪声驱动一个混沌系统,在一定条件下可产生奇异的非混沌吸引子.由于奇异非混沌吸引子具有非正的 Lyapunov 指数,因而就能有效抑制混沌系统对初始状态的敏感程度^[5,6].这也就意味着,在同一驱动信号的作用下,不同初始状态的混沌系统可以实现同步,这为实现混沌保密通信提供了可能.文献[8]对在奇异非混沌吸引子与混沌吸引子之间实现保密通信作了初步的探讨.在发送端将所发送的数字信息分别编码到奇异非混沌吸引子和混沌吸引子中,通过检测接收端和发送端奇异非混沌吸引子的同步状态,可提取出所发送的信号.但在该方案中,接收端混沌驱动信号的同步问题并未解决.

本文在仔细研究奇异非混沌吸引子特性的基础

上,提出了一种奇异非混沌系统的同步方案.在发送端用一种混沌系统驱动另一种混沌系统以产生奇异非混沌吸引子,同时利用收缩映射实现混沌驱动信号在接收端的同步,利用奇异非混沌吸引子对初始状态的不敏感性及同步的混沌驱动信号,可实现奇异非混沌吸引子的同步.仿真结果表明,该方案用于混沌保密通信是可行的.

2 基于收缩映射的混沌同步

首先介绍有关收缩映射的基本概念^[7].设 Ω 是 R^n 上的一个闭集, F 为一个定义在 R^n 上的映射,若存在一个非负常数 α ($0 \leq \alpha < 1$), $\forall x, y \in \Omega$, 有 $\|F(x) - F(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$, 则此时称 F 为 Ω 上的一个收缩映射, α 为 F 在 Ω 上的收缩因子.

若一个混沌系统可分解为两部分,即

$$x(n+1) = f(x(n)) = g(x(n)) + h(x(n)), \quad (1)$$

其中 g 为一个收缩映射,即 $\|g(x) - g(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$, 则对于新系统

$$y(n+1) = g(y(n)) + h(x(n)) \quad (2)$$

来说,有

$$\|x(n+1) - y(n+1)\| = \|g(x(n)) - g(y(n))\| \leq \alpha \|x(n) - y(n)\|. \quad (3)$$

根据收缩因子的性质可知^[7]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(n) - y(n)\| = 0, \quad (4)$$

即 $x(n)$ 与 $y(n)$ 同步.

以 Henon 混沌映射为例进行讨论. Henon 映射可分解为

*上海市科技启明星基金(批准号:96QF14013)和铁道部专项科研基金(批准号:J98Z228)资助的课题.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.98 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0.02x_2(n) - x_1^2(n) + 1.4 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= g(x(n)) + h(x(n)), \quad (5) \end{aligned}$$

其中 $g(x(n))$ 满足收缩映射的条件。图 1 给出了同步时 $x_1(n)$ 相对于 $y_1(n)$ 的变化情况, 从仿真结果看混沌系统很好地实现了同步, 这为在接收端产生出同步的混沌驱动信号提供了保证。

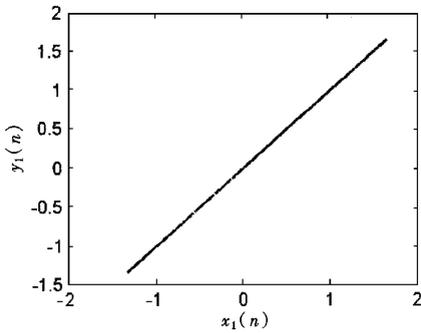


图 1 收缩映射的同步

3 奇异非混沌系统同步及其应用

采用(5)式中的 $h[x(n)]$ 作为混沌驱动信号, 则有

$$h[x(n)] = 0.02x_2(n) - x_1^2(n) + 1.4, \quad (6)$$

并利用收缩映射实现接收端和发送端的混沌驱动信号同步, 接收端混沌驱动系统的状态方程为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.98 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} h[x(n)] + \epsilon(n) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7) \end{aligned}$$

其中 $\epsilon(n)$ 为 $h[x(n)]$ 受到的干扰。基于收缩映射的混沌同步具有较强的鲁棒性, 因而可以克服噪声

带来的干扰影响, 即 $h[x(n)]$ 与 $h[y(n)]$ 可较好地实现同步^[7]。

此时利用该混沌驱动信号驱动另一混沌系统^[5,8],

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= S(x_n) + cz_n \\ &= x_n \exp[A(1-x_n)] + cz_n, \quad (8) \end{aligned}$$

其中 A, c 为系统参数, 取 $A=3$, z_n 为驱动信号, 这里取为(6)式中的 $h[x(n)]$ 。考虑到 $z_n < 0$ 会引起系统发散^[5], 而 $h[x(n)]$ 中含有负值, 因而这里需要给 $h[x(n)]$ 加上一个常数 an 以使 z_n 满足要求。由于 $h[x(n)]$ 的最小值约为 -1.3 , 因而 an 的取值大于 1.4 。由图 2 可以发现, 在 $c > c^* = 0.041$ 时, 系统的 Lyapunov 指数为负, 此时 an 取 2。(8)式中不同参数 c 下 x_n 相对于 x_{n+1} 的相图如图 3 所示, 从图中可以看到, 在 Lyapunov 指数为负时, 非混沌吸引子仍保持着同原混沌系统相似的拓扑结构, 这表明非混沌吸引子是奇异的^[5,6]。

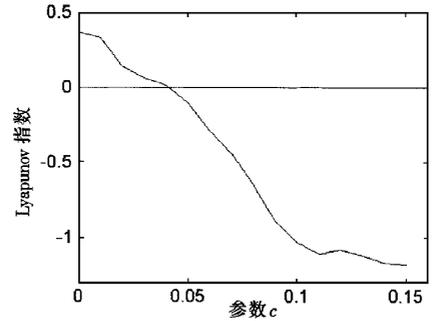


图 2 不同参数 c 下系统的 Lyapunov 指数 $A=3, an=2$

由图 2 可以看出, 只有在系统参数 c 大于临界参数 c^* 时, 系统的 Lyapunov 指数才为负。实际上, 正是由于 cz_n 项的作用, 才使混沌系统转为奇异非混沌系统, 因而临界参数 c^* 的取值强烈地依赖于 z_n 。表 1 给出了在不同参数 an 下 c^* 的取值。从表中

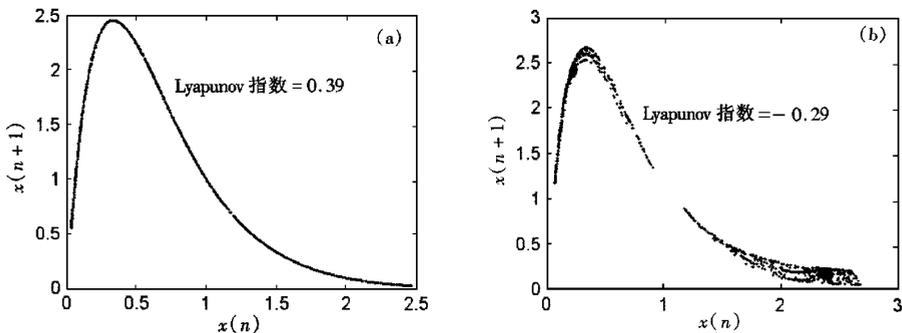
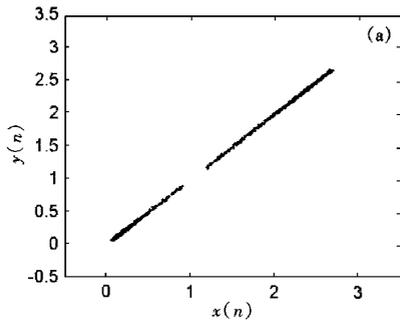


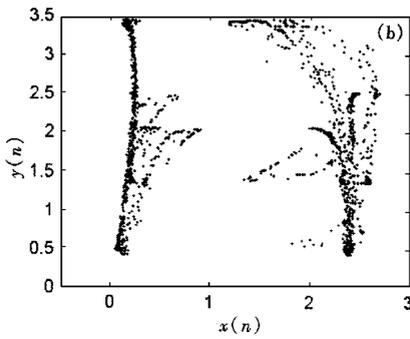
图 3 吸引子的空间结构 $A=3, an=2$ (a) $c=0$, (b) $c=0.06$

表 1 不同参数 an 下的临界参数 c^*

an	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3
c^*	0.0587	0.0534	0.0503	0.0461	0.041	0.0401	0.0377	0.0331

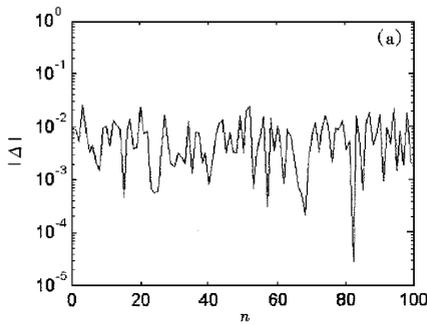


(a) 参数相同

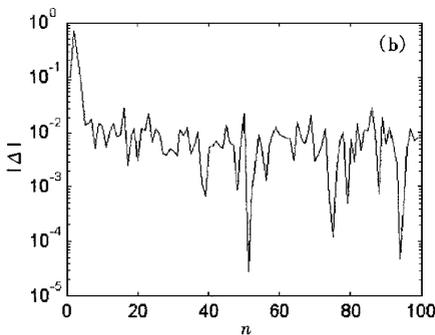


(b) 参数不同

图 4 系统同步比较



(a) 初始值相同



(b) 初始值不同

图 5 同步误差的绝对值序列

可以看到,随着 an 的增大, c^* 有减小的趋势。

若接收端奇异非混沌系统的参数同接收端的系统参数一致,则根据奇异非混沌吸引子对初始状态不敏感的特性及同步的混沌驱动信号,两个奇异非混沌吸引子间可实现同步,反之则无法实现同步。图 4 给出了在不同参数下奇异非混沌吸引子的同步情况,此时系统受到 -40dB 的白噪声干扰,从图中可以看到,只有在系统参数相同的情况下,系统才能实现同步。图 5 给出了在参数相同的情况下,系统初始值的选取对系统同步的影响,可以发现,系统初始值的选取对系统同步并无影响,这和上面的讨论是一致的。

根据上面的讨论,可以实现混沌保密通信。在发送端将所传输的数字信号分别映射为两个不同的奇异非混沌吸引子 V_1, V_2 ,接收端则由两个与之相对应的奇异非混沌系统 V'_1, V'_2 组成,同时利用收缩

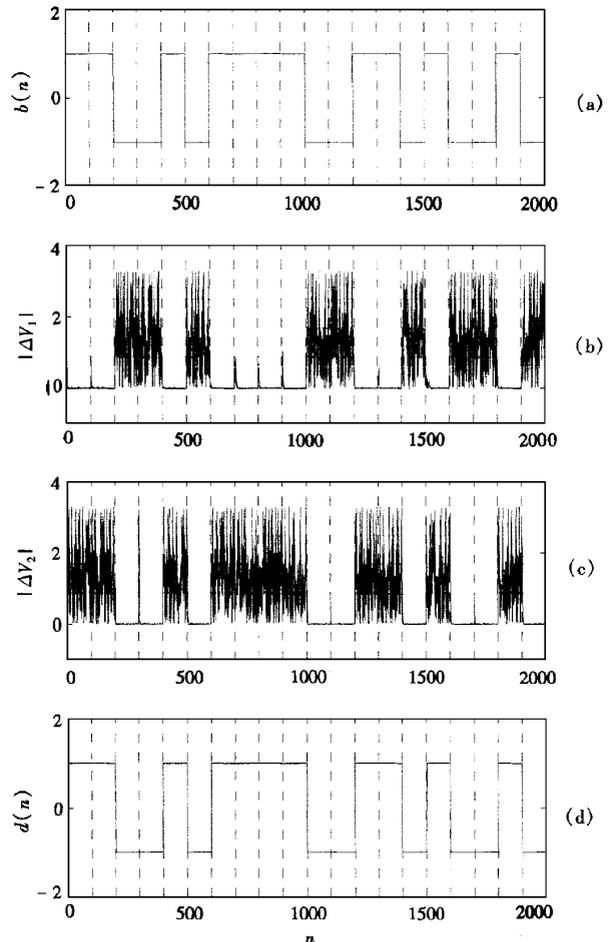


图 6 混沌保密通信的仿真波形

映射实现发送端和接收端混沌驱动信号的同步. 从上面的讨论可知, 在接收端和发送端奇异非混沌系统的参数相同时, 系统可实现同步. 因而在单位符号宽度 T 内根据接收信号和由 V'_1, V'_2 所产生的信号之差 $\Delta V_1, \Delta V_2$ 可恢复出所传输的信号. 设在发送端“1”对应 V_1 ; “-1”对应 V_2 , 因此有

$$d(k) = \begin{cases} 1 & \sum_T |\Delta V_1| < \sum_T |\Delta V_2|, \\ -1 & \sum_T |\Delta V_1| > \sum_T |\Delta V_2|. \end{cases} \quad (9)$$

仿真结果如图 6 所示, 图 6(a) 为发送信号; 图 6(b) 图 6(c) 分别为 V'_1, V'_2 的同步误差信号. 可以看到, 在系统同步时, 同步误差较小, 反之则同步误差较大, 图 6(d) 为接收信号. 试验结果表明本文所提方案是可行的.

4 小 结

本文提出了一种基于收缩映射的奇异非混沌系统同步方案. 计算机仿真结果表明本文所提出的方

案是完全可行的, 由于奇异非混沌吸引子的 Lyapunov 指数为负值, 因而可以有效抑制混沌系统对初始状态敏感的依赖性, 增强了系统的鲁棒性. 同时收缩映射的引入提高了系统的同步性能, 增强了系统的安全性, 并且易于实现, 可有效地实现混沌保密通信.

- [1] L. M. Pecora, T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 821.
- [2] H. D. Dedieu, M. P. Kennedy, M. Hasler, *IEEE Trans CAS-II*, **40**(1993), 634.
- [3] C. Lee, D. B. Williams, J. Lee, *Int. J. Bifur. Chaos*, **7**(1997), 1383.
- [4] 凌聪、孙松庚, 通信学报, **19**(1998), 72 [Cong Ling, Song-geng Sun, *Journal of China Institute of Communication*, **19**(1998), 72 in Chinese].
- [5] S. Rajasekar, *Phys. Rev.*, **E51**(1995), 775.
- [6] T. Yalcinkaya, Y. C. Lai, *Phys. Rev.*, **E56**(1997), 1623.
- [7] T. Ushio, *Phys. Lett.*, **A198**(1995), 14.
- [8] C. S. Zhou, T. L. Chen, *Europhys. Lett.*, **38**(1997), 261.

THE SYNCHRONIZATION OF STRANGE NONCHAOTIC SYSTEMS BASED ON CONTRACTION MAPS*

LIU JIAN-BO YE CHUN-FEI ZHANG SHU-JING

(Department of Telecommunication, Shanghai Tiedao University, Shanghai 200331)

(Received 25 March 1999; revised manuscript received 24 April 1999)

ABSTRACT

In this paper, a new method of synchronization of strange nonchaotic systems is proposed. Strange nonchaotic attractors are obtained from a chaotic system, driven by another chaotic system. Because the Lyapunov exponent of the strange nonchaotic attractor is negative, it can suppresses the sensitive dependence on initial conditions of the chaotic system. In order to synchronize the strange nonchaotic system, contraction map is used to synchronize the chaotic driving system. Simulations indicate that this method can synchronize fast, be robust to noise, easily be implemented and can be used in the field of chaotic secure communication.

PACC: 0545

* Project supported by the Shanghai Phosphor Foundation (Grant No. 96QF14013) and Particular Research Foundation of Chinese Railway Institute (Grant No. J98Z228).