

# 耦合映像系统的最大 Lyapunov 指数

史朋亮 胡 岗 徐莉梅

(北京师范大学物理系, 北京 100875)

(1999 年 5 月 21 日收到)

对 logistic 耦合映像的最大 Lyapunov 指数研究发现: 在混沌区参数内, 在系统尺度足够大而耦合强度具有较大值时, 系统的最大 Lyapunov 指数存在一个不随尺度和耦合强度变化的平台. 该平台的物理意义也得以解释.

PACC: 0545; 0550

耦合映像是人们研究非线性时空系统行为极重要的一类模型. 一方面它可以认为是连续时空系统采用空间和时间离散化的合理近似的结果, 另一方面它本身又直接反映着一大批实际系统动力学, 例如人工神经网络系统. 加上耦合映像数学形式较连续时空系统大为简化, 易于解析和数值分析, 这使得它在 Kaneko<sup>[1]</sup>等人的首批工作后一二十年来受到广泛研究<sup>[2-9]</sup>. 尽管耦合映像大大简化了研究困难, 但在时空混沌区域它的行为仍然极为复杂, 掌握其具有共性的普适行为成为人们关注的热点. 在这一方面, 研究系统的最大 Lyapunov 指数在参数空间的行为成为最具代表性的方向之一. Bohr<sup>[10]</sup>分析了最大 Lyapunov 指数在倍周期分叉积累点附近的行为, 发现最大 Lyapunov 指数在大尺寸系统中具有不随系统尺寸变化的性质, 并指出最大 Lyapunov 指数平台的出现代表了时空系统从“小”的少自由度系统到“大”的时空系统的转化. 杨维明<sup>[11]</sup>在数值模拟中发现在特定参数下最大 Lyapunov 指数对耦合强度不敏感, 但其原因并不清楚. 本文将详细研究一类典型的耦合映像——Logistic 耦合映像的最大 Lyapunov 指数随系统的非线性参数, 耦合强度及系统尺寸大小的关系, 发现在广大的混沌区非线性参数区间内系统典型态(典型态的含义在下文交待)的最大 Lyapunov 指数在耦合强度和系统尺寸参数平面都普遍存在最大 Lyapunov 指数的平台, 并对这平台的存在机制作了定性说明.

我们研究的空间二维耦合映像系统由 logistic 映像格点耦合而成

$$x_{n+1}^{i,j} = f(x_n^{i,j}) + \frac{\varepsilon}{4} \sum_{k=i\pm 1, l=j\pm 1} f(x_n^{k,l}), \quad (1)$$

其中  $f(x) = ax(1-x)$ ,  $a_c = 3.5699456$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, L$  并有周期边界条件

$$x_n^{L+i, L+j} = x_n^{i,j}, \quad (2)$$

可以明显看出  $L^2$  个格子以最近邻耦合方式分布在二维环面上.

对这样的体系我们来定义其 Lyapunov 指数. 令

$$x_n^\mu = x_n^{i,j}, \quad \mathbf{x}_n = (x_n^\mu), \quad (3)$$

其中  $\mu = iL + j$  取值为  $1, \dots, L^2$ , 则

$$\delta \mathbf{x}_n = (\delta x_n^\mu). \quad (4)$$

我们有  $\delta x_{n+1} = A_n \delta x_n$ , 则有

$$\delta x_{n+1}^\mu = \sum_\nu A_{n\mu\nu} \delta x_n^\nu, \quad (5)$$

其中

$$A_{n\mu\nu} = \begin{cases} f'(x_n^{k,l}) & k = i, l = j, \\ \frac{\varepsilon}{4} [f'(x_n^{i\pm 1, j\pm 1})] & k = i \pm 1, l = j \pm 1, \\ 0 & k \neq i, i \pm 1, l \neq j, j \pm 1. \end{cases}$$

在这里  $\mu = iL + j, \nu = kL + l$ . 可以看出  $A_n$  是一  $L^2 \times L^2$  的方阵. Lyapunov 指数  $\lambda_k$  定义为

$$\det \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \ln \left| \prod_{i=1}^n A_i \right| - \lambda_k I \right) \right) = 0, \quad (6)$$

其中  $k = 1, \dots, L^2$ . 对于上面的体系, 原则上有  $L^2$  个 Lyapunov 指数  $\lambda_k$ , 最大的  $i$  个 Lyapunov 指数之和表征相空间中  $i$  维超体积中的指数增减. 我们的注意力集中在测量系统的最大 Lyapunov 指数  $\lambda_m$ .

在  $L \gg 1$  时系统有极大量的共存吸引子, 这样对每一组控制参数有多个最大 Lyapunov 指数, 这使任何共性分析变得十分困难. 这里我们提出一个典型态 Lyapunov 指数的概念: 对多个任意初始条件的计算中系统以最大概率得到的某一最大 Lyapunov 指数, 我们就称对应于这一 Lyapunov 指数的态为典型态. 这样对每一组控制参数我们只算出一个典型态的最大 Lyapunov 指数. 很显然这一 Lyapunov 指数也不是对应于单一的吸引子, 它属于大量的混沌吸引子, 而这些吸引子由于时空系统具有的空间平移不变性而具有相同的指数 Lyapunov 谱.

由于对于大  $L$ ，我们不可能采用很大的计算样本，典型态的选择并不十分可靠。但以下计算显示，这一方法已经使最大 Lyapunov 指数的一些规律性的行为清楚地显示出来。

图 1 给出了在不同耦合强度  $\epsilon$  和系统尺寸  $L$  下的最大 Lyapunov 指数随非线性参数  $a$  的关系图。图中可总结以下几点规律：1) 给定任意  $\epsilon$ ，在  $L$  足够大时(对我们的系统大约  $L > 12$ )，最大 Lyapunov 指数图基本上不再随  $L$  变化。Bohr 在  $a >$

$a_c$ ， $|a - a_c| \ll 1$  的临界点附近和特定耦合强度下观察到这种行为，这里我们将这一认识推广到任意耦合强度和  $a$  的整个混沌区内。2) 对于较大的耦合强度(大约  $0.2 < \epsilon < 0.9$ )，当  $L$  足够大时，最大 Lyapunov 指数也不随  $\epsilon$  变化，这就预示着在  $\lambda_m(L, \epsilon)$  函数关系上存在一个二维的不变平台(注意图 1(e)(f)(h)和(i)的一致性)，该平台对不同的非线性参数  $a > a_c$  都存在。对这一平台的物理解释和理解对研究时空混沌将有重要意义。

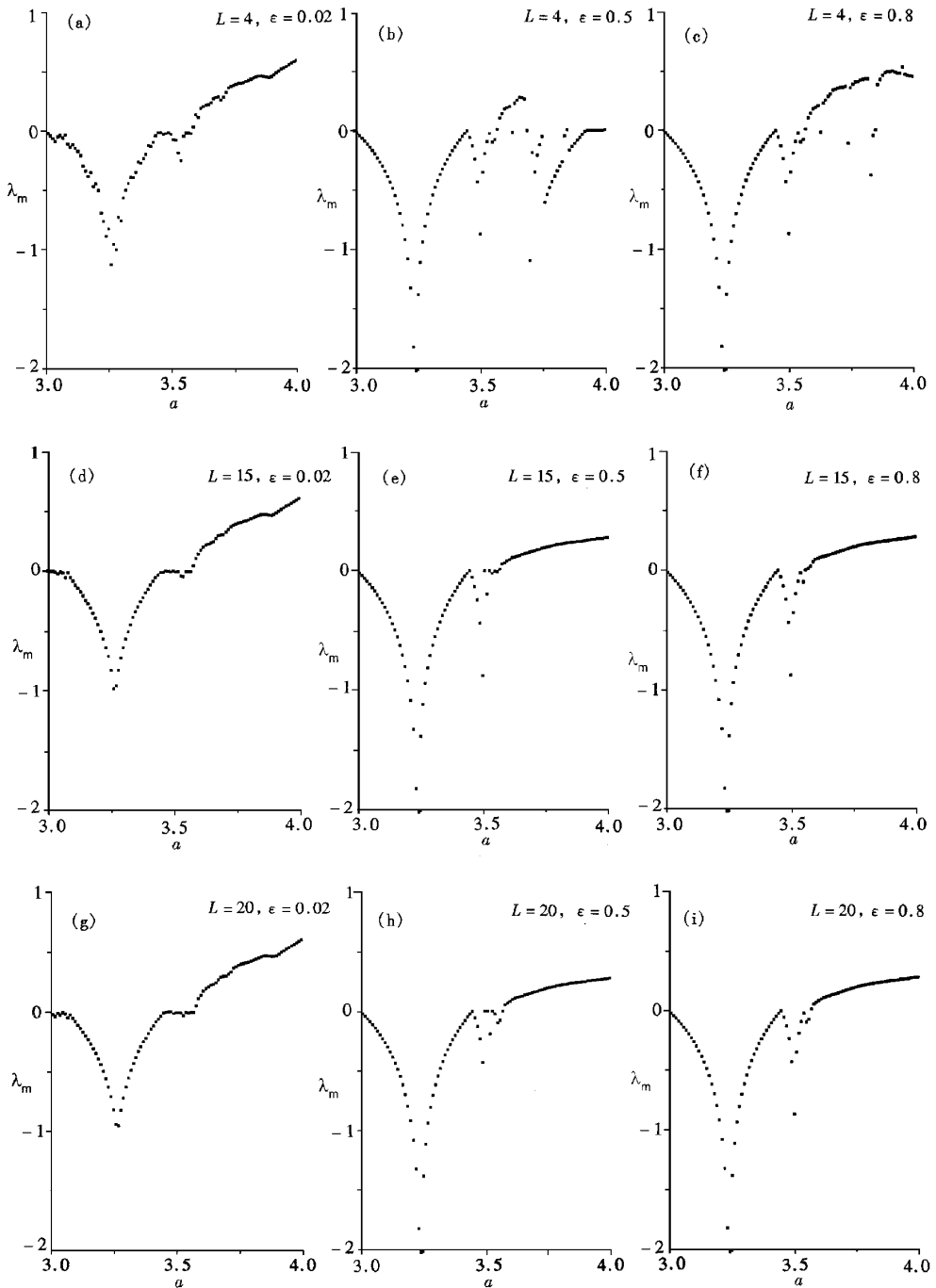


图 1 对不同的  $L$  和  $\epsilon$   $\lambda_m$  随  $a$  的变化

为了更清楚认识上述的不变性质,我们固定  $a$  来仔细观察  $\lambda_m$  随  $L$  (图 2) 和  $\epsilon$  (图 3) 的变化行为. 在图 2 中给出了在不同  $a$  和  $\epsilon$  时  $\lambda_m$  随  $L$  的变化图. 除了 ( $a = 3.572, \epsilon = 0.02$ ) 这一组参数 (即  $a$  在倍周期分叉累积点附近同时  $\epsilon$  又很小) 以外, 我们看到随  $L$  的增大, 在任何  $\epsilon$  和  $a$  参数下  $\lambda_m$  都清楚地饱和到一个确定正值平台上去, 这一平台的高度随  $\epsilon$  和  $a$  而变, 但可以注意到在相对大一些的  $\epsilon$  时 (如  $\epsilon = 0.5$  和  $0.8$  时) 平台的高度与  $\epsilon$  无关. 由图 2

(b)(c)(e)(f)(h)和(i)可以看到, 对于大的  $\epsilon$ , 在小  $L$  处也存在着  $\lambda_m$  的平台, 这一平台是由同步混沌态给出, 这时  $\lambda_m$  就等于单个混沌系统的 Lyapunov 指数  $\lambda_0$ . 在图 3 中我们给出在不同的  $a$  和  $L$  下  $\lambda_m$  随  $\epsilon$  变化图.  $\lambda_m - \epsilon$  线在中段存在平台. 在  $L$  小的情况下 (图 3(a)和(b)), 这一平台是大家熟知而平庸的同步混沌运动  $\lambda_m = \lambda_0$ . 随着  $L$  的增大,  $\lambda_m$  会出现一个新的  $\lambda_m \neq \lambda_0$  平台, 在这一平台上各个映像互不同步. 值得指出的是, 在给定  $a$  下, 这

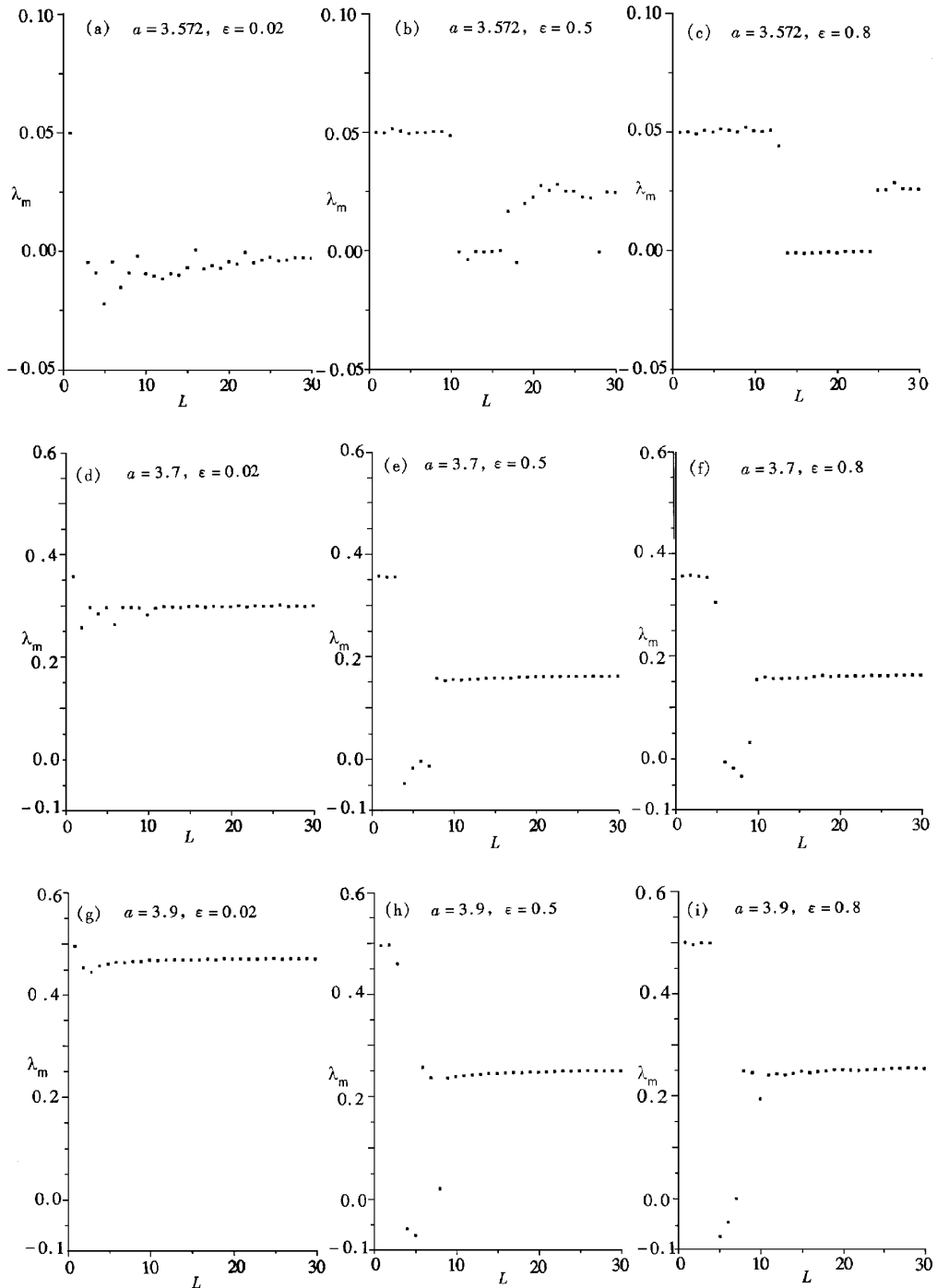


图 2 对不同的  $a$  和  $\epsilon$   $\lambda_m$  随  $L$  的变化

一平台一出现就保持固定高度,这一高度不随  $L$  平台的  $\lambda_m$  表征了系统在大尺寸下的动力学行为. 增加而变化(比较图 3(e)与(h),和(f)与(i)),这一

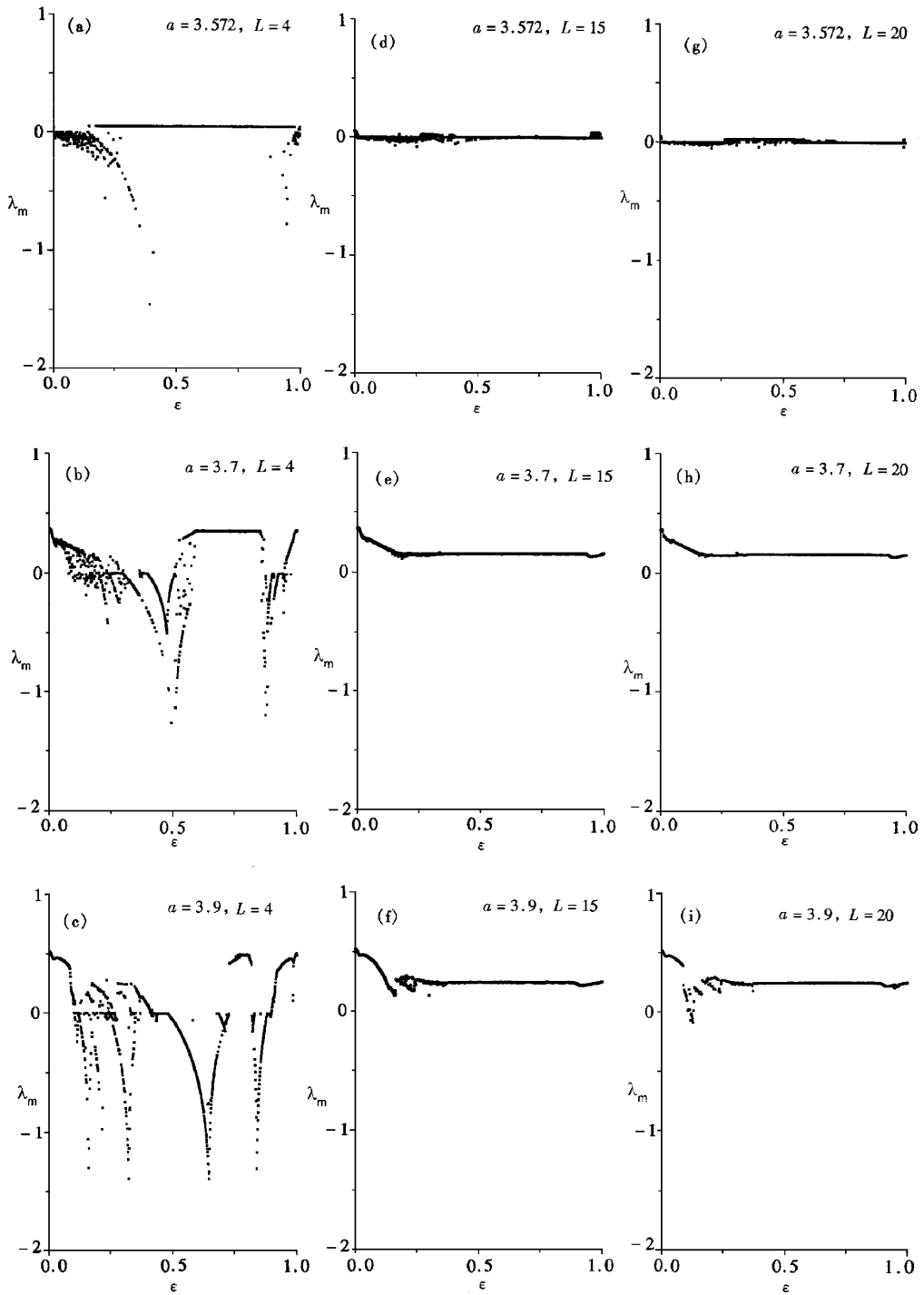


图 3 对不同的  $a$  和  $L$   $\lambda_m$  随  $\epsilon$  的变化

为了进一步更直观地显示  $\lambda_m$  在  $(\epsilon, L)$  参数空间的平台行为,在图 4 中对不同的  $a$  作了  $\lambda_m$  对  $(\epsilon, L)$  的立体图.图中几个特点留下鲜明的印象. 1) 在小  $\epsilon$  时  $\lambda_m$  在  $L$  方向随  $L$  增大趋向于平台值,但这一平台值随  $\epsilon$  增大而减小. 2) 在小  $L$  时  $\lambda_m$  在  $\epsilon$  中段具有平台结构,平台  $\lambda_m$  的值等于  $\lambda_0$ , 对应于同

步混沌运动.随  $L$  增加这一平台高度不变但平台宽度减小以至消失. 3) 在图的右下方  $\lambda_m$  在  $(\epsilon, L)$  平面上有一等值的广场,这时  $\lambda_m$  的值不随  $L$  和  $\epsilon$  二值改变.这一平坦广场随非线性参数  $a$  的增大而增大.

以上数值地描述了一类耦合映像中的最大

Lyapunov 指数的行为. 首先我们的研究表明, 上述行为不是个别系统的特殊行为, 而具有普遍性. 我们采用了  $f(x) = a \sin(\pi x)$  和  $f(x) = xe^{a(1-x)}$  等各

类不同的函数来进行数值计算, 得到了完全一致的定性结论. 我们预计对二次单峰映像和扩散型耦合的系统都会表现出上述最大 Lyapunov 指数的行为.

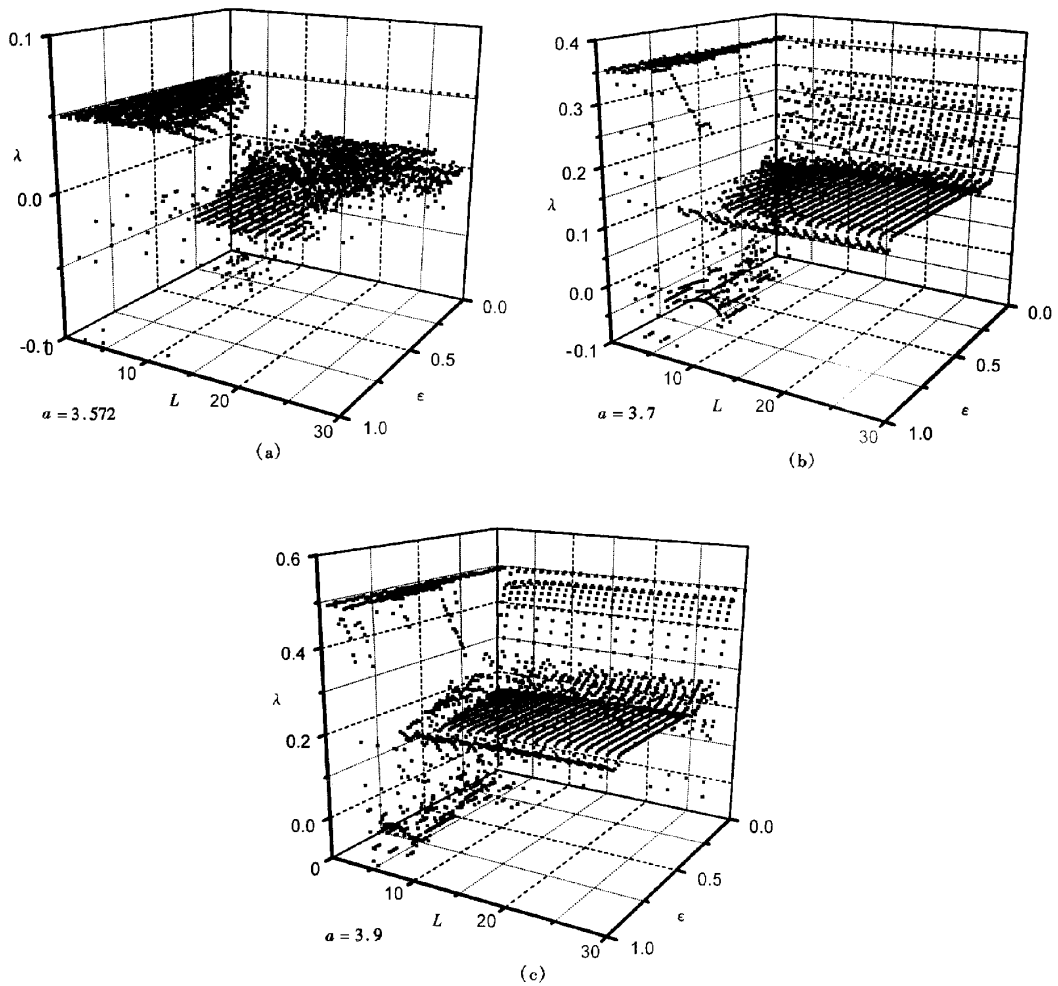


图 4 最大 Lyapunov 指数在不同  $a$  下随  $L$  与  $\epsilon$  的变化图, 在图(b)与(c)中右下方  $L > 10$  和  $\epsilon > 0.2$  处可以明显看出非混沌同步的正 Lyapunov 指数平台

另一更重要的问题是,  $\lambda_m$  对  $(\epsilon, L)$  的平台物理含义. 任意尺寸的空间连续的时空系统数学上都是无穷维系统. 但对此类系统在物理上有“低维”和“高维”之分. 在小尺寸的系统, 系统参与实际物理过程的模很少, 这时整个系统都被覆盖在相干长度之内, 动力学实际成为典型的低维问题. 当系统尺度增大到远大于相干长度时, 其一些重要的动力学特征表现出某种稳定性质, 特别时空混沌的最大 Lyapunov 指数就属于这类动力学特征. Bohr 认为最大 Lyapunov 指数直接联系着相干长度内的运动行为, 当系统尺度足够大时(即远大于相干长度时), 继续增大系统空间尺度将不改变相干长度内的系统动力学特征, 当然也不再改变系统的最大 Lyapunov 指数. 而具有稳定的最大 Lyapunov 指数

的时空混沌系统可被认为是远大于空间相干长度的系统, 即“高维”系统. 我们的研究完全支持了这一论断. 而我们发现最大 Lyapunov 指数的稳定平台不仅出现在系统的尺寸的方面, 也出现在耦合强度方面, 这可用如下分析来认识. 对于扩散型偏微分方程

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x) + D \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}, \quad (7)$$

系统长度和耦合强度之间可以通过标度变换建立联系. 例如通过变换  $R = ar$ , 上式可变为

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x) + D' \frac{\partial^2 x}{\partial R^2}, \quad D' = Da^2, \quad (8)$$

所以最大 Lyapunov 指数在大的系统尺度上的平台直接联系着相应的  $\epsilon$  平台. 在耦合映像中这一平台

在太大和太小的耦合强度  $\epsilon$  处受到破坏,原因是太大的  $\epsilon$  对应于小的系统尺寸,而太小的  $\epsilon$  破坏了从 (4)到(1)的离散化近似的适用条件.

- [ 1 ] K. Kaneko , *Prog. Theor. Phys.* , **72**( 1984 ) 480 ; **74**( 1985 ) , 1033.
- [ 2 ] Qu Zhi-lin , Hu Gang , Ma Ben-kun , Tian Gang , *Phys. Rev.* , **E50**( 1994 ) , 163.
- [ 3 ] P. Alström , D. Stassinopoulos , *Chaos* , **2**( 1992 ) , 301.
- [ 4 ] D. R. Rasmussen , T. Bohr , *Phys. Lett.* , **A 125**( 1987 ) , 107.
- [ 5 ] W. Just , *J. Stat. Phys.* , **79**( 1995 ) 429.
- [ 6 ] F. G. Xie , G. Hu , Z. L. Qu , *Phys. Rev.* , **E52**( 1995 ) , R1.
- [ 7 ] F. G. Xie , H. A. Cerdeira , *Phys. Rev.* , **E54**( 1996 ) , 3235.
- [ 8 ] S. Morita , *Phys. Lett.* , **A211**( 1996 ) 258.
- [ 9 ] W. M. Yang , E. J. Ding , M. Z. Ding , *Phys. Rev. Lett.* , **76**( 1996 ) , 1808.
- [ 10 ] T. Bohr , *Phys. Rev. Lett.* , **63**( 1989 ) , 2161.
- [ 11 ] 杨维明, 博士学位论文(中国科学院理论物理研究所, 北京, 1991)[ Wei-ming Yang , Ph. D. thesis( Institute of Theoretical Physics , Chinese Academy of Sciences , 1991 )( in Chinese )].

## THE LARGEST LYAPUNOV EXPONENT OF COUPLED MAP LATTICE SYSTEMS

SHI PENG-LIANG HU GANG XU LI-MEI

( Department of Physics , Beijing Normal University , Beijing 100875 )

( Received 21 May 1999 )

### ABSTRACT

Based on the investigation of the largest Lyapunov exponent of coupled map lattice systems , it is found that in the parameter region of chaos , if the system is large enough and the coupling coefficient is neither too small nor too large , the largest Lyapunov exponent of the system has a plateau which does not vary with the size and the coupling coefficient. The physical meaning of this flat plateau is discussed.

PACC : 0545 ; 0550