第 49 卷 第 1 期 2000 年 1 月
1000-3290/2000/49(01)/0057-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 1, January, 2000

椭球粒子电磁散射的边界条件的讨论

韩一平[†] 吴振森

(西安电子科技大学物理系,西安 710071)

(1999 年 5 月 17 日收到)

纠正了 Shoji Asano 在处理椭球介质粒子电磁散射问题的边界条件中的几个错误,并数值计算了椭球粒子对平面波的散射.

PACC:4110H;4170;0380

1 引 言

在研究许多散射问题时,为了计算方便起见,常常根据实际问题将粒子的几何形状作一简化,如简化成球形,椭球粒子,计算其散射问题.如研究大气中的悬浮粒子、雨滴、冰晶以及人体细胞等粒子的散射时,粒子形状接近椭球粒子,因而在理论上详细研究椭球粒子的散射特性是当前国内外研究课题之一.对于介质椭球粒子电磁散射问题的研究至今未得到解决的主要原因是由于椭球粒子的波函数及其计算极为复杂,使得边界条件的处理十分困难.许多文献采用了一些不精确的近似方法处理边界条件,计算误差较大.Asano[1]提出了一种处理边界条件的理论方法,较好的解决了边界问题.他的这种方法已得到公认,文章被许多文献所引用[2—4],而且在文献[5]中大量引用了其结果和方法,是公认的研究椭球粒子平面波散射的一种重要方法.然而他的对边界条件推导的部分理论结果有误,使得散射场的计算受到影响.本文对其椭球粒子电磁散射的边界条件的结果进行了修正,纠正了有错的几个展开系数,并数值计算了椭球粒子在平面波中的散射强度的分布.

2 边界条件的修正

根据电磁场散射理论以及 Flammer 的推导[6],我们知道,可以将入射波用长旋转椭球谐波函数展开(考虑 TE 波):

$$
\begin{aligned}
E^{\mathrm{i}} &= \sum_{m,n}^{\infty} \mathrm{i}^n \left[g_{mn} M_{emn}^{\mathrm{r}(1)}(c,\zeta,\eta,\phi) + \mathrm{i} f_{mn} N_{omn}^{\mathrm{r}(1)}(c,\zeta,\eta,\phi) \right], \\
H^{\mathrm{i}} &= \frac{k_1}{\omega\mu_1} \sum_{m,n}^{\infty} \mathrm{i}^n \left[f_{mn} M_{omn}^{\mathrm{r}(1)}(c,\zeta,\eta,\phi) - \mathrm{i} g_{mn} N_{emn}^{\mathrm{r}(1)}(c,\zeta,\eta,\phi) \right],
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
M_{omn}^{\mathrm{r}(1)} &= M_{omn\eta}^{\mathrm{r}(1)} \boldsymbol{a}_\eta + M_{omn\zeta}^{\mathrm{r}(1)} \boldsymbol{a}_\zeta + M_{omn\phi}^{\mathrm{r}(1)} \boldsymbol{a}_\phi \\
&= \frac{m\zeta}{(\zeta^2-\eta^2)^{\frac{1}{2}}(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}} S_{mn}(c,\eta) \cdot R_{mn}^{(1)}(c,\zeta)(-1)\cos m\phi \boldsymbol{a}_\eta \\
&\quad - \frac{m\eta}{(\zeta^2-\eta^2)^{\frac{1}{2}}(\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}} S_{mn}(c,\eta) \cdot R_{mn}^{(1)}(c,\zeta)(-1)\cos m\phi \boldsymbol{a}_\zeta \\
&\quad + \frac{(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}(\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta^2-\eta^2)} \cdot \left[\zeta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} S_{mn}(c,\eta) R_{1n}^{(1)}(c,\zeta) - \eta S_{mn}(c,\eta) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta} R_{mn}(c,\zeta) \right] \sin m\phi \boldsymbol{a}_\phi, \\
N_{emn}^{\mathrm{r}(1)} &= N_{emn\eta}^{\mathrm{r}(1)} \boldsymbol{a}_\eta + N_{emn\zeta}^{\mathrm{r}(1)} \boldsymbol{a}_\zeta + N_{emn\phi}^{\mathrm{r}(1)} \boldsymbol{a}_\phi \\
&= \frac{(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}}{kf(\zeta^2-\eta^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} S_{mn} \frac{\partial}{\partial\zeta} \left(\frac{\zeta(\zeta^2+1)}{\zeta^2-\eta^2} R_{mn}^{(1)} \right) - \eta S_{mn} \frac{\partial}{\partial\zeta} \left(\frac{(\zeta^2-1)}{\zeta^2-\eta^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta} R_{mn}^{(1)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{m^2\eta}{(1-\eta^2)(\zeta^2-1)} S_{mn} R_{mn}^{(1)} \right] \cos m\phi \boldsymbol{a}_\eta \\
&\quad - \frac{(\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}}{kf(\zeta^2-\eta^2)^{\frac{1}{2}}} \left[-\frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{\eta(1-\eta^2)}{(\zeta^2-\eta^2)} S_{mn} \right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta} R_{mn}^{(1)} + \zeta \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{(1-\eta^2)}{(\zeta^2-\eta^2)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} S_{mn} \right) R_{mn}^{(1)} \right.
\end{aligned}
$$

[†]E-mail: yphan@xidian.edu.cn

$$- \frac{m^2 \zeta}{(1-\eta^2)(\zeta^2-1)} S_{mn} R^{(1)}_{mn} \Big] \cos m\phi \boldsymbol{a}_\zeta$$

$$+ \frac{m(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}(\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}}{kf(\zeta^2-\eta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cdot \Big[- \frac{1}{(\zeta^2-1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}(\eta S_{mn}) R^{(1)}_{mn}$$

$$- \frac{1}{(1-\eta^2)} S_{1n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}(\zeta R^{(1)}_{mn}) \Big] \sin m\phi \boldsymbol{a}_\phi, \qquad (2)$$

而

$$c = fk.$$

对于不同介质 c 的值不同,在下面我们用 $c^{(h)}$ 表示椭球的外或内区域,相对应的上标 h 的值分别是Ⅰ或Ⅱ,为了应用边界条件,我们将散射场和内场写成和入射波相对应的形式.

散射场:

$$E^{\mathrm{S}} = \sum_{m,n}^{\infty} \mathrm{i}^n [\beta_{mn} M^{\mathrm{r}(3)}_{emn}(c^{(\mathrm{I})}, \zeta, \eta, \phi) + \mathrm{i}\alpha_{mn} N^{\mathrm{r}(3)}_{omn}(c^{(\mathrm{I})}, \zeta, \eta, \phi)],$$

$$H^{\mathrm{S}} = \frac{k_1}{\omega\mu_1} \sum_{m,n}^{\infty} \mathrm{i}^n [\alpha_{mn} M^{\mathrm{r}(3)}_{omn}(c^{(\mathrm{I})}, \zeta, \eta, \phi) - \mathrm{i}\beta_{mn} N^{\mathrm{r}(3)}_{emn}(c^{(\mathrm{I})}, \zeta, \eta, \phi)]. \qquad (3)$$

内场:

$$E^{\mathrm{w}} = \sum_{m,n}^{\infty} \mathrm{i}^n [\delta_{mn} M^{\mathrm{r}(1)}_{emn}(c^{(\mathrm{II})}, \zeta, \eta, \phi) + \mathrm{i}\gamma_{mn} N^{\mathrm{r}(1)}_{omn}(c^{(\mathrm{II})}, \zeta, \eta, \phi)],$$

$$H^{\mathrm{w}} = \frac{k_2}{\omega\mu_2} \sum_{m,n}^{\infty} \mathrm{i}^n [\gamma_{mn} M^{\mathrm{r}(1)}_{omn}(c^{(\mathrm{II})}, \zeta, \eta, \phi) - \mathrm{i}\delta_{mn} N^{\mathrm{r}(1)}_{emn}(c^{(\mathrm{II})}, \zeta, \eta, \phi)], \qquad (4)$$

其中 $M^{\mathrm{r}(3)}_{omn}(c, \zeta, \eta, \phi)$, $N^{\mathrm{r}(3)}_{emn}(c, \zeta, \eta, \phi)$ 为第三类矢量椭球波函数. 在距离椭球非常远处,散射波接近于以椭球中心为其中心的球发散波,因此第三类矢量椭球波函数适用表示散射波. 边界条件可以写成如下形式:

$$E^{\mathrm{i}}_\eta + E^{\mathrm{s}}_\eta = E^{\mathrm{w}}_\eta, \qquad (5)$$

$$E^{\mathrm{i}}_\phi + E^{\mathrm{s}}_\phi = E^{\mathrm{w}}_\phi \quad 在\ \zeta = \zeta_0, \qquad (6)$$

$$H^{\mathrm{i}}_\eta + H^{\mathrm{s}}_\eta = H^{\mathrm{w}}_\eta, \qquad (7)$$

$$H^{\mathrm{i}}_\phi + H^{\mathrm{s}}_\phi = H^{\mathrm{w}}_\phi. \qquad (8)$$

借助于场得展开式,以上边界条件可以用椭球波函数表示出来,所得到的方程对坐标所有允许值($-1 \leqslant \eta \leqslant 1$ 和 $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$)成立. 也就可以决定未知系数 α, β, γ 和 δ. 由于三角函数 $\cos m\phi$ 和 $\sin m\phi$ 的正交性,在每个展开式中,ϕ 相同的三角函数的系数必相等,每个分量都如此. 因而对于 m 的求和,其每一相应项等式都必成立,可是对于 n 的和式,在级数中每个项不能逐次匹配,这就是使得未知系数决定比较困难. Asano 所提出了一种较为巧妙的方法来处理边界条件. 根据边界条件,对于 η 分量两边用 $(\zeta_0^2 - \eta^2)^{\frac{5}{2}} = [(\zeta_0^2 - 1) + (1 - \eta^2)]^{\frac{5}{2}}$ 相乘,对于 ϕ 分量,方程用 $(\zeta_0^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}(\zeta^2 - \eta^2)$ 相乘,可以得到如下四个方程,

$$\sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{i}^n [V^{(3),t}_{mn}(c^{(\mathrm{I})}) \alpha_{mn} + U^{(3),t}_{mn}(c^{(\mathrm{I})}) \beta_{mn} - V^{(1),t}_{mn}(c^{(\mathrm{II})}) \gamma_{mn} - U^{(1),t}_{mn}(c^{(\mathrm{II})}) \delta_{mn}]$$
$$= - \sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{i}^n [g_{mn}(\zeta) U^{(1),t}_{mn}(c^{(\mathrm{I})}) + f_{mn}(\zeta) V^{(1),t}_{mn}(c^{(\mathrm{I})})], \qquad (9)$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{i}^n \Big[U^{(3),t}_{mn}(c^{(\mathrm{I})}) \alpha_{mn} + V^{(3),t}_{mn}(c^{(\mathrm{I})}) \beta_{nn} - \frac{k_2\mu_1}{\mu_2 k_1} U^{(1),t}_{mn}(c^{(\mathrm{II})}) \gamma_{mn} - \frac{k_2\mu_1}{\mu_2 k_1} V^{(1),t}_{mn}(c^{(\mathrm{II})}) \delta_{mn} \Big]$$
$$= - \sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{i}^n [f_{mn}(\zeta) U^{(1),t}_{mn}(c^{(\mathrm{I})}) + g_{mn}(\zeta) V^{(1),t}_{mn}(c^{(\mathrm{I})})], \qquad (10)$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{i}^n [Y^{(3),t}_{mn}(c^{(\mathrm{I})}) \alpha_{mn} + X^{(3),t}_{mn}(c^{(\mathrm{I})}) \beta_{mn} - Y^{(1),t}_{mn}(c^{(\mathrm{II})}) \gamma_{mn} - X^{(1),t}_{mn}(c^{(\mathrm{II})}) \delta_{mn}]$$
$$= - \sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{i}^n [f_{mn}(\zeta) Y^{(1),t}_{mn}(c^{(\mathrm{I})}) + g_{mn}(\zeta) X^{(1),t}_{mn}(c^{(\mathrm{I})})], \qquad (11)$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{i}^n \Big[X^{(3),t}_{mn}(c^{(\mathrm{I})}) \alpha_{mn} + Y^{(3),t}_{mn}(c^{(\mathrm{I})}) \beta_{mn} - \frac{k_2\mu_1}{\mu_2 k_1} X^{(1),t}_{mn}(c^{(\mathrm{II})}) \gamma_{mn} - \frac{k_2\mu_1}{\mu_2 k_1} Y^{(1),t}_{mn}(c^{(\mathrm{II})}) \delta_{mn} \Big]$$
$$= - \sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{i}^n [f_{mn}(\zeta) X^{(1),t}_{mn}(c^{(\mathrm{I})}) + g_{mn}(\zeta) Y^{(1),t}_{mn}(c^{(\mathrm{I})})], \qquad (12)$$

然而 Asano[1] 文中给出的参数 $V^{(j),t}_{mn}$, A^{mn}_t, H^{mn}_t 有误. 下面给出正确的参数:

$$U^{(j),t}_{mn}(c^{(h)}) = m\zeta_0 R^{(j)}_{mn}(c^{(h)}; \zeta_0) [(\zeta_0^2 - 1)^2 \cdot B^{mn}_t(c^{(h)}) + 2(\zeta_0^2 - 1) A^{mn}_t(c^{(h)}) + E^{mn}_t(c^{(h)}),$$

$$V^{(j),t}_{mn} = \frac{\mathrm{i}}{c^{(h)}} \Big\{ \frac{m^2 R^{(j)}_{mn}(c^{(h)}; \zeta_0)}{\zeta_0^2 - 1} [(\zeta_0^2 - 1)^2 \cdot D^{mn}_t(c^{(h)}) + 2(\zeta_0^2 - 1) C^{mn}_t(c^{(h)}) + F^{mn}_t(c^{(h)})] - R^{(j)}_{mn}(c^{(h)}; \zeta_0) \cdot \Big[\lambda_{mn} - (c^{(h)}\zeta_0)^2 + \frac{m^2}{\zeta_0^2 - 1} \Big]$$

$$\cdot\left[(\zeta_0^2-1)C_t^{mn}(c^{(h)})+F_t^{mn}(c^{(h)})\right]$$

$$+\zeta_0(\zeta_0^2-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}R_{mn}^{(j)}(c^{(h)};\zeta_0)\bigg|_{\zeta_0}$$

$$\cdot\left[2C_t^{mn}(c^{(h)})\zeta_0+(\zeta_0^2-1)G_t^{mn}(c^{(h)})\right.$$

$$\left.+I_t^{mn}(c^{(h)})\right]+R_{mn}^{(j)}(c^{(h)};\zeta_0)\left[(\zeta_0^2-1)^2\right.$$

$$\left.\cdot G_t^{mn}(c^{(h)})+(3\zeta_0^2-1)I_t^{mn}(c^{(h)})\right],$$

$$X_{mn}^{(j),t}(c^{(h)})=\zeta_0R_{mn}^{(j)}(c^{(h)},\zeta_0)G_t^{mn}(c^{(h)})$$

$$-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}R_{mn}^{(j)}(c,\zeta)\right]_{\zeta_0}C_t^{mn}(c^{(h)}),$$

$$Y_{mn}^{(j),t}(c^{(h)})=\frac{\mathrm{i}m}{c^{(h)}}\left\{(\zeta_0^2-1)^{-1}R_{mn}^{(j)}(c^{(h)};\zeta_0)\right.$$

$$\cdot\left[A_t^{mn}(c^{(h)})+H_t^{mn}(c^{(h)})\right]$$

$$+B_t^{mn}(c^{(h)})\left[R_{mn}^{(j)}(c^{(h)};\zeta_0)\right.$$

$$\left.\left.+\zeta_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}R_{mn}^{(j)}(c^{(h)};\zeta_0)\bigg|_{\zeta_0}\right]\right\},$$

其中径向函数 $R_{mn}^{(j)}$ 上标 j 的值是 1 或 3，相对应表示第一类或第三类径向函数. $c^{(h)}$ 上标 h 的值是 Ⅰ 或 Ⅱ，相对应表示椭球的外或内区域.

$A_t^{mn}, B_t^{mn}, C_t^{mn}, D_t^{mn}, E_t^{mn}, F_t^{mn}, G_t^{mn}, H_t^{mn}, I_t^{mn}$ 是将 $(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}S_{mn}(\eta)$，$(1-\eta^2)^{-\frac{1}{2}}S_{mn}(\eta)$，$\eta(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}S_{mn}(\eta)$，$\eta(1-\eta^2)^{-\frac{1}{2}}S_{mn}(\eta)$，$(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}\cdot S_{mn}(\eta)$，$\eta(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}S_{mn}(\eta)$，$\eta(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}S_{mn}(\eta)}{\mathrm{d}\eta}$，$(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}S_{mn}(\eta)}{\mathrm{d}\eta}$，$(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}S_{mn}(\eta)}{\mathrm{d}\eta}$ 展为第一类连带 Legendre 函数的级数 $P_{m-1+t}^{m-1}(\eta)$ 时的展开系数. Asano[1] 给出 A_t^{mn}，H_t^{mn} 有错，这里我们仅给出正确的 A_t^{mn}，H_t^{mn} 系数：

$$A_t^{mn}=N_{m-1,m-1+t}^{-1}\sum_{r=0,1}^{\infty}d_r^{mn}\int_{-1}^{+1}(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot P_{m+r}^{m}(\eta)P_{m-1+t}^{m-1}(\eta)\mathrm{d}(\eta)$$

$$=\begin{cases}0 \quad (n-m+t=\text{奇数}),\\ \dfrac{(t+2m-1)(t+2m)}{(2t+2m+1)}d_t^{mn}\\ -\dfrac{t(t-1)}{(2t+2m-3)}d_{t-2}^{mn}\\ \quad (n-m+t=\text{偶数}).\end{cases}$$

$$H_t^{mn}=N_{m-1,m-1+t}^{-1}\sum_{r=0,1}^{\infty}d_r^{mn}\int_{-1}^{+1}\eta(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\frac{\mathrm{d}P_{m+r}^{m}(\eta)}{\mathrm{d}\eta}P_{m-1+t}^{m-1}\mathrm{d}(\eta)$$

$$=\begin{cases}0 \quad (n-m+t=\text{奇数}),\\ -\dfrac{t(t-1)(t+m-2)}{(2t+2m-3)}d_{t-2}^{mn}-\\ \dfrac{t(t-1)(2t+2m+1)+(t+2m)(t+2m-1)}{2(2t+2m+1)}\\ \cdot d_t^{mn}+m(2t+2m-1)\displaystyle\sum_{r=t+2}^{\infty}d_r^{mn}\\ \quad (n-m+t=\text{偶数}).\end{cases}$$

对于 $B_t^{mn}, C_t^{mn}, D_t^{mn}, E_t^{mn}, F_t^{mn}, G_t^{mn}, I_t^{mn}$ 的结果可参看文献[1]，这里，我们就不再给出. 以上所有结果我们均经过详细的理论推导，并通过数学软件包 Mathmatica 验证.

综合上述，我们可以通过求解四个微分方程(9)，(10)，(11)，(12)得到椭球粒子在平面电磁波中的散射场.

3　数值计算

我们数值求解(9)，(10)，(11)，(12)的四个微分方程，具体计算了文献[1]中图 3 所计算的椭球粒子散射的一个实例(见图 1—图 3). 其中椭球粒子的长轴与短轴之比 $a/b=2$，$c=5$，粒子的尺寸参数 $\alpha=2\pi a/\lambda=2c/\sqrt{3}$，椭球内外介电常数 $\varepsilon_{\text{in}}=1.3324^2$，

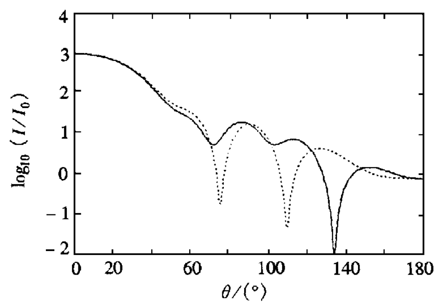

图 1　在正入射下，长椭球粒子 TE 波(实线)和 TM 波(虚线)的散射强度的角分布. 其中，$a/b=2$，$c=5$，$\tilde{n}=1.5$

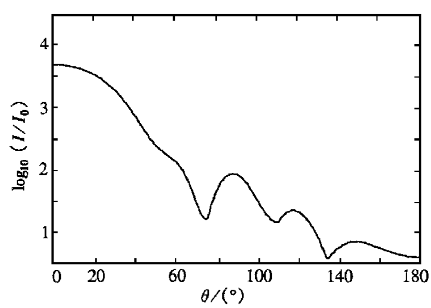

图 2　非极化入射波的散射强度角分布. 参数同图 1

$\varepsilon_{out}=1$，$\mu_{in}=1$，$\mu_{out}=1$，电导率 $\sigma_{in}=0$，$\sigma_{out}=0$，且 $z_0=0$，即椭球球心位于坐标原点，电磁波长 $\lambda=5\times10^{-7}$ m，正入射到椭球粒子上. 我们分别计算了 TE 波、TM 波的散射强度随着散射角的分布，非极化波散射强度的随着散射角的二维分布以及散射强度在散射角 θ-方位角 ϕ 平面上的分布.

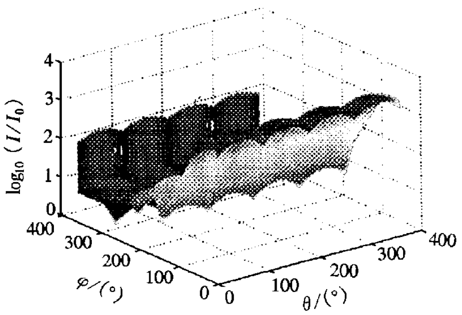

图 3 在正入射下，长椭球粒子散射的三维图，参数同图 1

4 结 语

Asano[1] 提出的椭球粒子电磁散射的边界条件中的辅助变量 $V_{mn}^{(j),t}$ 以及展开系数 A_t^{mn}，H_t^{mn} 有误，本文对此进行了修正，并着重纠正其有错的几个展开系数，数值计算椭球粒子对平面波的散射强度的分布.

[1] S. Asano，G. Yamamoto，*Applied Optics*，**14**(1975)，29.

[2] B. P. Sinha，R. H. Macphie，*IEEE transactions on antennas and propagation*，**31**(1983)，294.

[3] S. Nag，B. P. Sinha，*IEEE transactions on antennas and propagation*，**43**(1995)，322.

[4] T. G. Tsuei，P. W. Barber，*Appl. Opt.*，**24**(1985)，2391.

[5] C. F. Bohren，D. R. Huffman，Absortionand Scattering of Light by Small Particle，(John Wiely&Sons. Inc 1983)，397.

[6] C. Flammer，Spheroidal Wave Functions (Stanford University Press. Stanford，California，1957).

DISCUSSION OF THE BOUNDARY CONDITION FOR ELECTROMAGNETIC SCATTERING BY SPHEROIDAL PARTICLES

HAN YI-PING WU ZHEN-SEN
(*Department of Physics*，*Xidian University*，*Xi'an* 710071)
(Received 17 May 1999)

ABSTRACT

Theoretical expression of the boundary condition for electromagnetic scattering by spheroidal particles is given by virtue of the method presented by Shoji Asano and Giichi Yamamoto. The incorrect coefficients of expansions given by Shoji's has been corrected.

PACC：4110H；4170；0380