

双模 $SU(2)$ 相干态场与两个耦合原子 相互作用的动力学*

田永红^{1,2)} 彭金生¹⁾

¹⁾ 华中师范大学物理系, 武汉 430070)

²⁾ 荆州师范学院物理系, 荆州 434100)

(1999 年 3 月 11 日收到; 1999 年 5 月 23 日收到修改稿)

研究了 $SU(2)$ 相干态场与两个原子非简并双光子相互作用系统中原子的动力学行为和双模场的非经典性质, 并讨论了双模场的总光子数、配分参量以及原子间偶极相互作用对它们的影响.

PACC: 4250

1 引 言

关联双模辐射场及其与原子体系的相互作用的研究是目前量子光学研究的热点之一. 一些重要的非经典特性, 如原子布居的塌缩与恢复、光场的压缩、反聚束、亚泊松分布及违背 Cauchy-Schwartz 不等式等^[1-4], 不断地被揭示出来. $SU(2)$ 相干态场^[5,6] 由于两个场模的光子数之和为定值, 两模之间具有很强的反关联, 是一种典型的关联双模场. 在量子光学中有着广泛的应用^[6]. 近年来, 人们相继研究了 $SU(2)$ 相干态光场的量子统计性质^[7]、相位特性^[8] 以及与单个二能级^[5-8]、三能级原子^[1] 作用过程中原子和场的动力学性质, 但是对双模 $SU(2)$ 相干态与两个原子的相互作用的研究尚未见报道. 本文运用全量子理论研究了 $SU(2)$ 相干态场与两个全同的二能级原子相互作用系统中原子的动力学行为和双模场的非经典性质, 并讨论了双模场的总光子数、配分参量以及原子间偶极相互作用对它们的影响.

2 模型及其求解

考虑原子间的偶极相互作用, 描述两个全同的二能级原子与双模腔场双光子相互作用系统的哈密顿量在旋波近似和偶极近似下可写为

$$H = H_0 + H_1 + H_2,$$

$$H_0 = \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2 + \omega_0 \sum_{i=1}^2 s_z^{(i)},$$

$$H_1 = \sum_{i=1}^2 g (a_1^\dagger a_2^\dagger s_-^{(i)} + a_1 a_2 s_+^{(i)}),$$

$$H_2 = g_A (s_+^{(1)} s_-^{(2)} + s_-^{(1)} s_+^{(2)}). \quad (1)$$

式中 a_i^\dagger, a_i 分别表示腔模 i ($i=1, 2$) 的产生和湮没算符, $s_z^{(i)}, s_\pm^{(i)}$ 为第 i 个原子的赝自旋算符, g 和 g_A 分别表示原子与场之间和原子之间相互作用的耦合常数. 为简化计算结果, 仅考虑双光子共振情况, 即 $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$.

若 $t=0$ 时, 两原子均处于激发态 $|e, e\rangle$, 辐射场处于双模 $SU(2)$ 相干态^[5,6]:

$$|M, T\rangle = \sum_{n=0}^M F_n |n, M-n\rangle,$$

$$F_n = (1 + |T|^2)^{-M/2} \left[\frac{M}{n} \right]^{1/2} T^n. \quad (2)$$

这里 M 是双模场的总光子数, 复参数 $T = |T| \cdot e^{-i\phi}$, $|T|^2$ 为两模平均光子数之比, ϕ 为位相角. 随着时间的演化, 在相互作用绘景中, 系统在 $t>0$ 时刻的态矢可以写为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^M F_n [C_1(n, M-n, t) |e, e, n, M-n\rangle + C_2(n+1, M-n+1, t) |e, g, n+1, M-n+1\rangle + C_3(n+1, M-n+1, t) \cdot |g, e, n+1, M-n+1\rangle + C_4(n+2, M-n+2, t) |g, g, n+2, M-n+2\rangle]. \quad (3)$$

由相互作用绘景的薛定谔方程, 并考虑到初始条件, 立即可得

* 国家自然科学基金(批准号: 19774024)资助的课题.

$$\begin{aligned}
 & C_1(n, M-n, t) \\
 = & -\frac{1}{a-b} \frac{D^2}{D^2 + D'^2} (be^{iat} - ae^{ibt}) \\
 & + \frac{D'^2}{D^2 + D'^2}, \\
 & C_2(n+1, M-n+1, t) \\
 = & C_3(n+1, M-n+1, t) \\
 = & -\frac{D}{a-b} (e^{iat} - e^{ibt}), \\
 & C_4(n+2, M-n+2, t) \\
 = & -\frac{DD'}{D^2 + D'^2} \left[\frac{1}{a-b} (be^{iat} - ae^{ibt}) + 1 \right]. \quad (4)
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 D &= \sqrt{(n+1)(M-n+1)}, \\
 D' &= \sqrt{(n+2)(M-n+2)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 + 8(D^2 + D'^2)}}{2}, \\
 b &= \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 + 8(D^2 + D'^2)}}{2}, \\
 \delta &= g_A/g, \quad \tau = gt. \quad (5)
 \end{aligned}$$

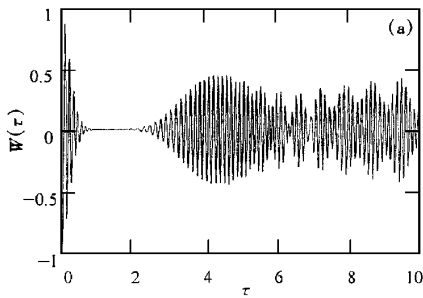
将(4)(5)式代入(3)式,就得到了系统在相互作用绘景中的态矢.这里,若取 $M=0$,就可以得到双模真空场作用下系统态矢的演化式^[9].

3 原子的动力学行为

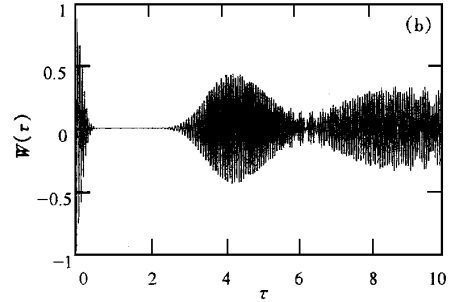
对双原子系统,原子的粒子数反转可写为

$$s_z = \sum_{i=1}^2 s_z^{(i)}. \quad (6)$$

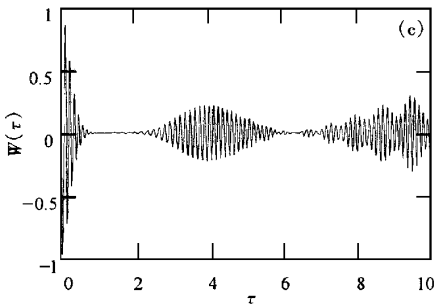
由(3)–(6)式,不难得到



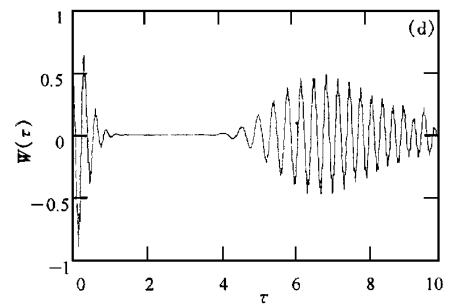
(a) $M=60, S=0.2, \delta=0$



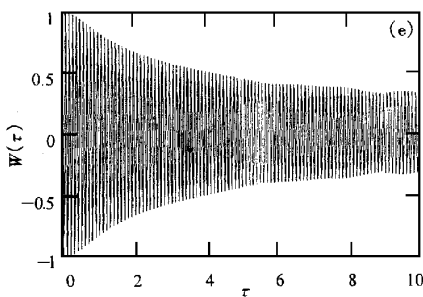
(b) $M=120, S=0.2, \delta=0$



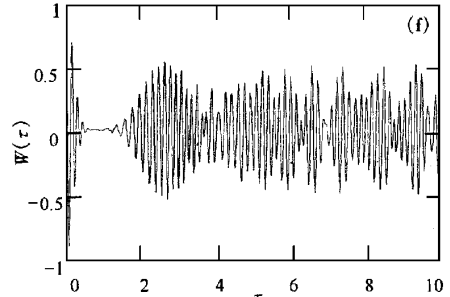
(c) $M=60, S=0.2, \delta=0.5$



(d) $M=60, S=0.2, \delta=60$



(e) $M=60, S=0.5, \delta=0$



(f) $M=60, S=0.1, \delta=0$

图1 $W(\tau)$ 随时间 τ 的演化



$$\begin{aligned}
 W(\tau) = \langle s_z \rangle = & \sum_{n=0}^M \binom{M}{n} S^n (1-S)^{M-n} \\
 & \cdot \frac{1}{(D^2 + D'^2)^2} \left\{ (M+3)^2 + 4D^2 D'^2 \right. \\
 & \cdot \left[\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 8(D^2 + D'^2)}} \sin\left(\frac{\delta\tau}{2}\right) \sin\left(\frac{\Omega_{n,M-n}\tau}{2}\right) \right. \\
 & \left. \left. + \cos\left(\frac{\delta\tau}{2}\right) \cos\left(\frac{\Omega_{n,M-n}\tau}{2}\right) \right] \right. \\
 & \left. + \frac{8D^2(D^2 + D'^2)(M+3)}{\delta^2 + 8(D^2 + D'^2)} \sin^2\left(\frac{\Omega_{n,M-n}\tau}{2}\right) \right\}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

式中 $\Omega_{n,M-n} = \sqrt{\delta^2 + 8(D^2 + D'^2)}$ 为与拉比频率有关的参数, S 为配分参量^[1], 其取值为 $0 \leq S \leq 1$, $S=0, 1$ 表示光场一模为真空态, 另一模为 Fock 态, 而 $S=0.5$ 表示两模的平均光子数相等. 当 $M=0$ 时, 由(7)式即可得到双模真空场与两个原子非简并双光子相互作用过程中原子布居的时间演化规律^[9]. 而 $M \neq 0$ 时, $W(\tau)$ 的时间演化见图 1. 比较图 1(a) 和图 1(b) 可以看到, 增加 M , 原子的塌缩与恢复效应更加明显, 塌缩时间延长, 恢复振荡的频率变大, 导致这种现象产生的原因是, 光子数分布展宽, 从而增加了原子与双模场的能量交换^[10]. 原子间的偶极相互作用使得原子拉比振荡的周期变大, 且当 δ 较小时, 如图 1(c) 所示, 原子布居出现了新的塌缩与恢复系列, 而当 δ 很大时, 原子的塌缩时间延长, 周期性变差, 见图 1(d). 原子布居的时间演化还与配分参量 S 有关, 由于二项式分布的对称性, 这里仅讨论 $S \leq 0.5$ 的情况, 当 $S=0.5$ 时, 拉比振荡是准周期的(见图 1(e)), 而当 S 较小时, 拉比振荡展示出纯量子特性的塌缩与恢复现象, 数值模拟显示, $S=0.25$ 时, 原子的量子塌缩与恢复现象最为显著, 而当 $S < 0.25$ (或 $S > 0.25$) 时, 随 S 减少 (或增大), 塌缩时间变短, 塌缩与恢复现象变得愈来愈不明显(见图 1(f)), $S=0, 1$ 时, $W(t)$ 呈现出规则的周期振荡.

4 辐射场的量子统计性质

4.1 光子的统计分布

光场的量子统计分布特征, 可用 Mandel 因子

$$Q = \frac{(\Delta N)^2 - N}{N} \quad (8)$$

来表征, $Q > 0$, $Q = 0$ 和 $Q < 0$ 分别对应超泊松光子统计, 非泊松分布的准泊松光子统计和亚泊松光子

统计. 由(3)式, 不难得到

$$\begin{aligned}
 N_1 &= a_1^+ a_1 = n + 2 \sum_{n=0}^M |F_n|^2 \\
 &\quad \cdot [|C_2(n+1, M-n+1, t)|^2 \\
 &\quad + |C_4(n+2, M-n+2, t)|^2], \\
 N_2 &= a_2^+ a_2 = M - n + 2 \sum_{n=0}^M |F_n|^2 \\
 &\quad \cdot [|C_2(n+1, M-n+1, t)|^2 \\
 &\quad + |C_4(n+2, M-n+2, t)|^2], \\
 N_1^2 &= (a_1^+ a_1)^2 = n^2 + 4 \sum_{n=0}^M |F_n|^2 \\
 &\quad \cdot \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) |C_2(n+1, M-n+1, t)|^2 \right. \\
 &\quad \left. + (n+1) |C_4(n+2, M-n+2, t)|^2 \right], \\
 N_2^2 &= (a_2^+ a_2)^2 = M^2 - 2Mn + n^2 \\
 &\quad + 4 \sum_{n=0}^M |F_n|^2 \left[\left(M - n + \frac{1}{2} \right) |C_2(n+1, \right. \\
 &\quad \left. M - n + 1, t)|^2 + (M - n + 1) \right. \\
 &\quad \left. \cdot |C_4(n+2, M - n + 2, t)|^2 \right]. \quad (9)
 \end{aligned}$$

式中 $n = MS$, $n^2 = M^2 S^2 + MS(1-S)$. 容易证明, 当 $t=0$ 时, $Q_1 = -S$, $Q_2 = -(1-S)$, 即 $SU(2)$ 相干态场的两个模的光子都是亚泊松分布的. 而当 $t > 0$ 时, 若 $S=0.5$, 则由(8)(9)式有 $Q_1 = Q_2$, 如图 2 所示, 光场的亚泊松分布不变, 但程度变浅. 这明显不同于单原子系统^[7], 它是原子间关联引起的合作效应. 一般情况下 $Q_1 \neq Q_2$, 且与参数 M, S, δ 有关, 下面我们利用数值计算方法来讨论这些参数对光子统计分布的影响. 首先讨论 $S < 0.5$ 时, S 的变化对光子统计分布的影响, 如图 3 所示, S 的变化对光子的统计分布有显著影响. 比较图 3(a) 和图 3(b) 可以看出, 随 S 的减小, Q_1 的亚泊松程度变浅, 当 S 较小时, 在某些时刻出现超泊松光子统计分布, 且随 S 减小, 呈现超泊松分布的次数增加, 程度加深, 而图 3(c) 和图 3(d) 显示, S 减少, Q_2 的亚

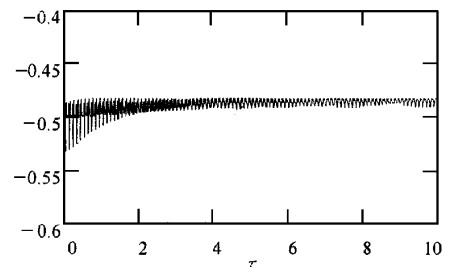


图 2 Q ($Q_1 = Q_2$) 随时间 τ 的演化, $M=60, S=0.5, \delta=0$

泊松程度加深. 其次, 讨论 M 对光子的统计分布的影响, 比较图 3(a) 和图 3(e) 不难发现, 增加 M , Q_1 的振荡频率增加, 光子的超泊松分布程度变浅, M 大约为 120 时, 就观察不到超泊松光子统计分布, 而

图 3(c) 和图 3(f) 则显示, 增加 M , Q_2 的亚泊松分布的平均程度加深. 另外, 对同一 M 和 S , 原子间的偶极相互作用对光子的统计分布会产生非线性影响, 当原子间偶极相互作用较弱时, 随 δ 的增加, Q_1 的

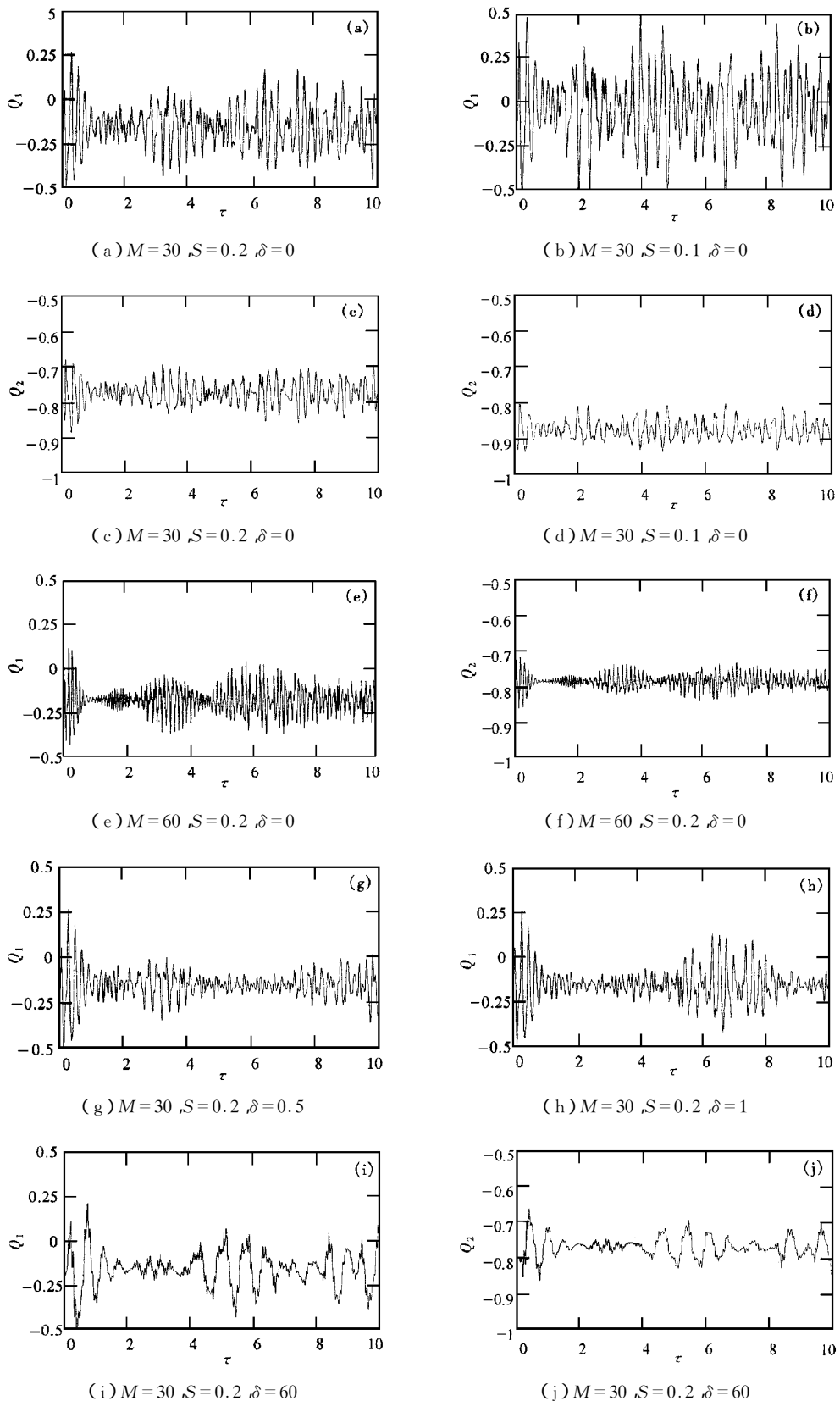


图 3 Q 随 τ 的演化

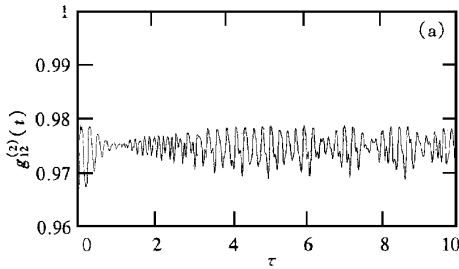
超泊松分布出现的次数先减少后增加,超泊松程度先减弱后增强,见图 3(g)和图 3(h),而当原子间偶极相互作用很强时, Q_1 的超泊松分布次数减少,程度减弱,甚至消失,见图 3(i),但是 Q_1 和 Q_2 的亚泊松分布的平均程度基本不变,只是振荡的频率和幅值变化,见图 3(g)-(j).

4.2 模间相关性

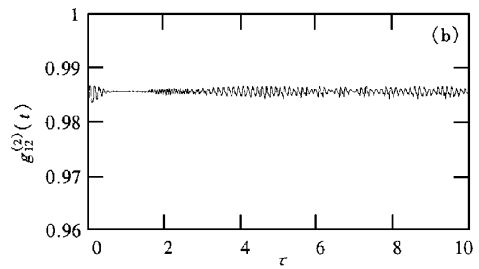
光场两模间的相关度定义为

$$g_{12}^{(2)}(t) = \frac{a_1^+ a_2^+ a_1 a_2}{a_1^+ a_1 a_2^+ a_2}. \quad (10)$$

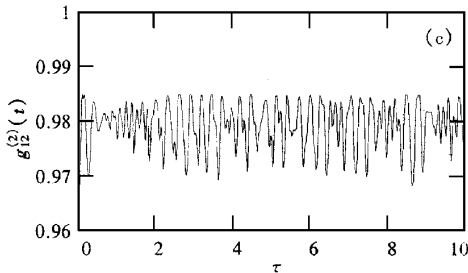
式中



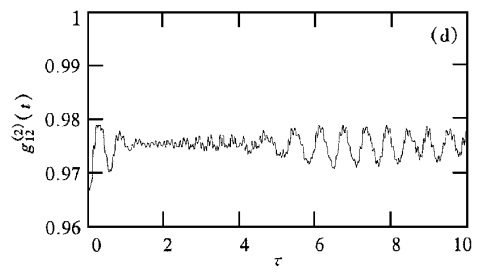
(a) $M=30, S=0.2, \delta=0$



(b) $M=60, S=0.2, \delta=0$



(c) $M=30, S=0.1, \delta=0$



(d) $M=30, S=0.2, \delta=60$

图 4 $g_{12}^{(2)}(t)$ 随 τ 的演化

关.比较图 4(a)和图 4(b),可以看到, M 增加,两模间的负关联平均程度变浅,关联起伏减弱,而图 4(a)和图 4(c)则显示, S 减少,光场两模间的负关联平均程度变浅,但关联起伏增大,原子间偶极相互作用使 $g_{12}^{(2)}(t)$ 的振荡频率增大,但对光场两模间负关联的平均程度几乎没有影响,见图 4(d).

4.3 Cauchy-Schwartz 不等式

对于双模场, Cauchy-Schwartz 不等式是

$$a_1^+ a_2^+ a_1 a_2 \leq a_1^{+2} a_1^2 a_2^{+2} a_2^2. \quad (12)$$

为了反映对上式偏离的相对程度,引入参量 $I(t)$,

$$a_1^+ a_2^+ a_1 a_2 = M \langle n \rangle - \langle n \rangle^2 + \sum_{n=0}^M |F_n|^2 \cdot [\chi(M+1) |C_2(n+1, M-n+1, t)|^2 + \chi(M+2) |C_4(n+2, M-n+2, t)|^2]. \quad (11)$$

当 $g_{12}^{(2)}(t) > 1$, 表示光场两模呈正相关, $g_{12}^{(2)}(t) < 1$ 则表示两模间呈负相关.由(9)-(11)式,不难得到 $g_{12}^{(2)}(0) = \frac{M-1}{M} < 1$, 即 $SU(2)$ 相干态场两模间呈负关联,从图 4 可以看出,与原子作用后, $g_{12}^{(2)}(t)$ 随时间振荡,但总是小于 1,即光场两模间的负关联特征不变,但关联程度有起伏,且与参量 M, S, δ 有

$$I(t) = \frac{(a_1^{+2} a_1^2 a_2^{+2} a_2^2)^{1/2}}{|a_1^+ a_2^+ a_1 a_2|} - 1. \quad (13)$$

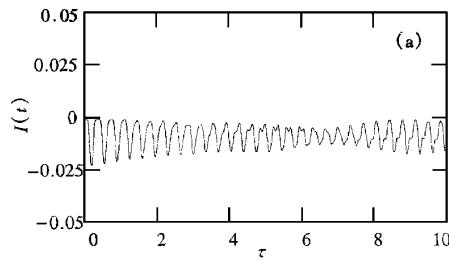
当 $I(t) < 0$ 时,意味着(12)式不成立,则表示光场的两模之间是一种非经典相关.由于

$$a_i^{+2} a_i^2 = (a_i^+ a_i)^2 - a_i^+ a_i \quad (i=1, 2). \quad (14)$$

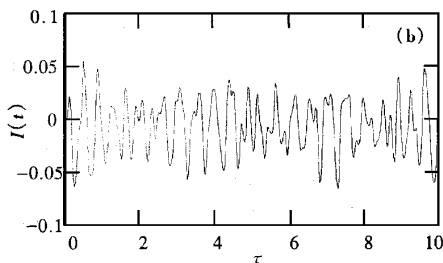
因此,将(9)(11)和(14)式代入(13)式,就可以得到 $I(t)$,不难发现,当 $t=0$ 时, $I(0)=0$,即对于纯粹的 $SU(2)$ 相干态场, Cauchy-Schwartz 不等式是成立的.当 $t>0$ 时, (13)式的数值模拟见图 5,从图 5(a)可见,若 $S=0.5$, $I(t)$ 总是小于零,而当两模光子数分布不平衡时,如图 5(b)-(e)所示,在某些瞬

时出现 $I(t) > 0$, 即光场表现出经典的特性, 且增加 M , 光场呈现经典特性的次数增多, 但程度减弱, 而 S ($S \leq 0.5$) 减小时, 光场的非经典程度加深. 原子间

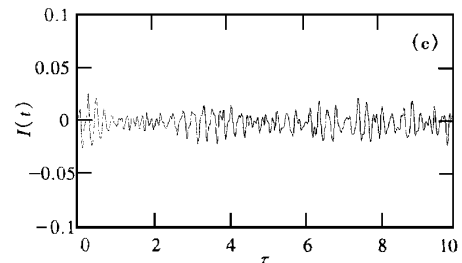
的偶极相互作用使 $I(t)$ 的振荡变慢, 光场的非经典程度浅.



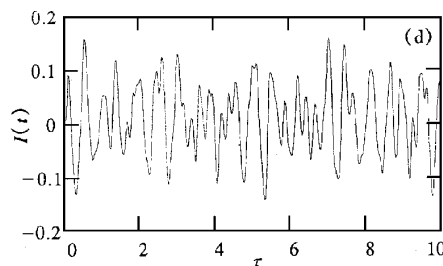
(a) $M=15, S=0.5, \delta=0$



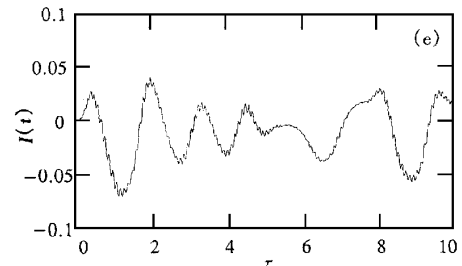
(b) $M=15, S=0.2, \delta=0$



(c) $M=30, S=0.2, \delta=0$



(d) $M=15, S=0.1, \delta=0$



(e) $M=15, S=0.2, \delta=60$

图 5 $I(t)$ 随 τ 的演化

5 结 论

以上关于 $SU(2)$ 相干态场与两个原子非简并双光子相互作用的研究, 得到如下结果:

(1) 当两模光子数不平衡时, 原子布居的时间演化的短时行为展示出纯量子特性的塌缩与恢复现象, 而其长时行为却呈现出无规则的振荡.

(2) 光场的量子统计分布主要表现为亚泊松分布, 但当 S 较小(或较大)时, 在某些时刻 Q_1 (或 Q_2) 出现超泊松光子统计分布, 并且由于 $SU(2)$ 场两模之间存在反关联, Q_1 和 Q_2 随 M, S 的变化及其时间演化的变化趋势恰好相反.

(3) 光场两模间的负关联特征不变, 但关联程

度有起伏.

(4) 光场具有与纯 $SU(2)$ 相干态场不同的非经典特性, 当 $S=0.5$ 时, 为纯非经典光场, 但当光场两模光子数不平衡时, 在某些瞬时, 光场表现出经典特性.

- [1] W. K. Lai, V. Buzek, P. L. Knight, *Phys. Rev.*, **A44**(3) (1991) 2003.
- [2] D. Cohon, Y. B. Aryeh, A. Mann, *Phys. Rev.*, **A49**(3) (1994), 2040.
- [3] 赖云忠、梁九卿, 物理学报, **46**(9) (1997), 1710 [Lai Yun-zhong, Liang Jiu-qing, *Acta Physica Sinica* **46**(9) (1997), 1710 (in Chinese)].
- [4] 路洪、彭金生、李高翔, 物理学报, **44**(5) (1995), 708 [Lu Hong, Peng Jin-sheng, Li Gao-xiang, *Acta Physica Sinica*, **44**(5) (1995), 708 (in Chinese)].

- [5] V. Bezek, T. Quang, *J. Opt. Soc. Am.*, **B6**(12)(1989) 2447.
- [6] K. Wodkiewicz, J. H. Eberly, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2**(3) (1985) 458.
- [7] 路洪、彭金生、吴美钧, *光学学报*, **15**(10)(1995), 1365 [Lu Hong, Peng Jin-sheng, Wu Mei-jun, *Acta Optica Sinica*, **15**(10)(1995), 1365 (in Chinese)].
- [8] 路洪、彭金生, *量子电子学*, **13**(4)(1996), 310 [Lu Hong, Peng Jin-sheng, *Chinese Journal of Quantum Electronics*, **13**(4)(1996) 310 (in Chinese)].
- [9] 田永红、彭金生, *量子光学学报*, **5**(2)(1999) 待发 [Tian Yong-hong, Peng Jin-sheng, *Acta Sinica Quantum Optica*, **5**(2)(1999) (in Chinese)].
- [10] 彭金生、李高翔 著, *现代量子光学导论* (科学出版社, 北京, 1996) [Peng Jin-sheng, Li Gao-xiang, *Introduction of modern quantum optics* (Science press, Beijing, 1996) (in Chinese)].

DYNAMICS OF TWO-MODE $SU(2)$ COHERENT STATES INTERACTING WITH TWO COUPLED ATOMS*

TIAN YONG-HONG¹⁾²⁾ PENG JIN-SHENG¹⁾

¹⁾ *Department of Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070*

²⁾ *Department of Physics, Jingzhou Normal College, Jingzhou 434100*

(Received 11 March 1999; revised manuscript received 23 May 1999)

ABSTRACT

The dynamic behavior of atoms and nonclassical properties of the two-mode field in the system of nondegenerate two-photon interacting of $SU(2)$ coherent states with two atoms are studied. Influences of the total photon number, the partition parameter, and the dipole-dipole interaction on the atomic dynamic behavior and the quantum statistics properties of the two-mode field are discussed.

PACC : 4250