第 49 卷 第 10 期 2000 年 10 月
1000-3290/2000/49(10)/1901-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 10, October, 2000

一阶 Lagrange 系统的 Lie 对称性与守恒量*

梅凤翔 尚 玫

(北京理工大学应用力学系,北京 100081)

(2000 年 3 月 1 日收到)

将一阶微分方程组化成一阶 Lagrange 方程. 利用常微分方程在无限小变换下的不变性,建立 Lie 对称性的确定方程. 给出 Lie 对称性导致守恒量的条件以及守恒量的形式.

关键词:一阶 Lagrange 系统, Lie 对称性, 守恒量

PACC:0320

1 引 言

对称性与守恒量的研究,有重要的物理意义. 力学中的 Lagrange 系统通常是二阶的,即 Lagrange 函数包含速度的二次项. 文献[1—4]研究了力学系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性,以及相应的守恒量.

在生物化学,分子生物学,生理学,生态学以及社会科学中,许多系统用一阶常微分方程来描述,有些一阶常微分方程还可 Lagrange 化. 这样的 Lagrange 系统是一阶的,即 Lagrange 函数是速度的线性式. 例如,Lotka 生物化学振子中化学浓度变量的变化率,某二种群生态系统生物存活数量的动力学模型都是一阶 Lagrange 系统.

本文研究一阶 Lagrange 系统的 Lie 对称性与守恒量,包括一阶 Lagrange 系统的建立,无限小变换和 Lie 对称性的确定方程,结构方程与守恒量的形式. 最后,举例说明结果的应用.

2 系统的微分方程及其 Lagrange 化

一般的一阶微分方程组表为

$$F_s(t, q_k, \dot{q}_k) = 0 \qquad (s, k = 1, \cdots, n). \tag{1}$$

方程组(1)在一定条件下可化成一阶 Lagrange 方程形式,即存在函数

$$L = \sum_{s=1}^{n} A_s(t, q)\dot{q}_s + B(t, q), \tag{2}$$

使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = F_s \qquad (s = 1, \cdots, n). \tag{3}$$

方程组(1)可 Lagrange 化的条件,就是它们的自伴随条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_s}{\partial \dot{q}_k} &= -\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_s} \\ \frac{\partial F_s}{\partial q_k} &= \frac{\partial F_k}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F_k}{\partial q_s} \end{aligned} \qquad (s, k = 1, \cdots, n), \tag{4}$$

而 Lagrange 函数有形式[5]

$$L(t, q, \dot{q}) = -\sum_{s=1}^{n} q_s \int_0^1 F_s(t, \tau q, \tau \dot{q})\mathrm{d}\tau, \tag{5}$$

此时的 Lagrange 函数称为直接解析表达.

如果方程组不是自伴随的,但在乘以一些乘子 $h_{sk}(t, q)$ 后,使得方程组(1)成为自伴随的,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = \sum_{k=1}^{n} h_{sk}(t, q) F_k(t, q, \dot{q}) \qquad (s = 1, \cdots, n). \tag{6}$$

此时的 Lagrange 函数称为间接解析表达.

这样,一阶方程组(1)可以表为一阶 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \qquad (s = 1, \cdots, n). \tag{7}$$

3 无限小变换和 Lie 对称性的确定方程

取时间和变量的无限小变换

$$t^* = t + \Delta t,$$

---

* 国家自然科学基金(批准号:19972010)和高校博士点专项基金资助的课题.

$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s,$$

或其展开式

$$t_* = t + \varepsilon\xi_0(t,q),$$
$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,q), \tag{8}$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_0,ξ_s 为无限小生成元. 引入无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} \tag{9}$$

以及它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \sum_{s=1}^{n}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{10}$$

微分方程(1)在无限小变换(8)下的不变性归为如下确定方程:

$$\frac{\partial F_s}{\partial t}\xi_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_s}{\partial q_k}\xi_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_s}{\partial \dot{q}_k}\cdot(\dot{\xi}_k - \dot{q}_k\dot{\xi}_0)\bigg|_{F_k=0} = 0. \tag{11}$$

定义 如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足确定方程(11),则相应的变换称为 Lie 对称变换,相应的对称性称为 Lie 对称性.

注意到,Lie 对称性的确定方程可以直接由原方程写出,也可由 Lagrange 化后的方程写出. 一般说,可能前者更简单些.

4 结构方程与守恒量

Lie 对称性不一定导致守恒量,下面的定理给出 Lie 对称性导致守恒量的条件以及守恒量的形式.

定理 对于满足确定方程(11)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s,如果存在规范函数 $G = G(t,q)$ 满足如下结构方程:

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + \dot{G} = 0, \tag{12}$$

则系统(5)有如下形式的守恒量:

$$I = L\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G = \text{const}. \tag{13}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \dot{L}\,\xi_0 + L\dot{\xi}_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\\ &\quad + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\xi_0 - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) - L\dot{\xi}_0 - \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0\\ &\quad - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\\ &= \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s}\right)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0.\end{aligned}$$

5 算 例

对一个具体的一阶微分方程组,首先要判断它是否满足自伴随条件,如不满足,是否可以乘上一个乘子使之自伴随;其次,按(5)式构造 Lagrange 函数;第三,建立确定方程;最后建立结构方程,如能从结构方程中找到规范函数 G,便可由(13)式写出系统的守恒量.

例 1 Lotka 生化振子问题的微分方程的形式[6]为

$$\dot{q}_1 = \alpha_1 + \beta_1 e^{q_2},$$
$$\dot{q}_2 = \alpha_2 + \beta_2 e^{q_1}, \tag{14}$$

其中 α_1,α_2,β_1,β_2 为常数. 研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

首先,将系统(14) Lagrange 化,将(14)式重新写成

$$F_1 = \dot{q}_2 - \alpha_2 - \beta_2 e^{q_1} = 0,$$
$$F_2 = -\dot{q}_1 + \alpha_1 + \beta_1 e^{q_2} = 0.$$

它们满足自伴随条件(4). Lagrange 函数(5)给出

$$\begin{aligned}L &= -q_1\int_0^1(\tau\dot{q}_2 - \alpha_2 - \beta_2 e^{q_1\tau})\mathrm{d}\tau\\ &\quad - q_2\int_0^1(-\tau\dot{q}_1 + \alpha_1 + \beta_1 e^{q_2\tau})\mathrm{d}\tau\\ &= \frac{1}{2}(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1) - (\alpha_2 q_1 - \beta_1 e^{q_2})\\ &\quad + (\alpha_2 q_2 - \beta_2 e^{q_1}).\end{aligned}$$

其次,建立确定方程并求解. 确定方程(11)给出

$$\dot{\xi}_1 - (\alpha_1 + \beta_1 e^{q_2})\dot{\xi}_0 = \beta_1 e^{q_2}\xi_2,$$
$$\dot{\xi}_2 - (\alpha_2 + \beta_2 e^{q_1})\dot{\xi}_0 = \beta_2 e^{q_1}\xi_1.$$

它有解

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \xi_2 = 0.$$

它对应系统(14)的 Lie 对称性. 最后,建立结构方程并求守恒量. 结构方程(12)给出

$$G = 0.$$

由守恒量(13)求得

$$I = L - \sum_{s=1}^{2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s = -\alpha_2 q_1 - \beta_2 e^{q_1} + \alpha_1 q_2 + \beta_1 e^{q_2} = \text{const}.$$

例 2　二种群生态系统动物存活数量用微分方程[6]

$$\dot{q}_1 = \alpha_1 q_1 + \beta_1 \gamma_2 e^{q_2},$$
$$\dot{q}_2 = \alpha_2 q_2 + \beta_2 \gamma_1 e^{q_1} \tag{15}$$

来描述[5]，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ 为常数. 研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

系统(15)不是自伴随的，将其改写为

$$F_1 = e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}\left[\dot{q}_2 - \alpha_2 q_2 - \beta_2\gamma_1 e^{q_1}\right] = 0,$$

$$F_2 = e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}\left[-\dot{q}_1 + \alpha_1 q_1 + \beta_1\gamma_2 e^{q_2}\right] = 0.$$

它们是自伴随的，其 Lagrange 函数的间接解析表达为

$$\begin{aligned}L =& -q_1\int_0^1 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}\left[\tau\dot{q}_2 - \alpha_2\tau q_2 - \beta_2\gamma_1 e^{\tau q_1}\right]d\tau \\ & - q_2\int_0^1 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}\left[-\tau\dot{q}_1 + \alpha_1\tau q_1 + \beta_1\gamma_2 e^{\tau q_2}\right]d\tau \\ =& \frac{1}{2}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}\left[\dot{q}_1 q_2 - q_1\dot{q}_2 + (\alpha_2-\alpha_1)q_1 q_2 \right.\\ & \left. - 2\beta_1\gamma_2 e^{q_2} + 2\beta_2\gamma_1 e^{q_1}\right].\end{aligned}$$

确定方程(11)给出

$$\dot{\xi}_1 - (\alpha_1 q_1 + \beta_1\gamma_2 e^{q_2})\dot{\xi}_0 = \alpha_1\xi_1 + \beta_1\gamma_2 e^{q_2},$$
$$\dot{\xi}_2 - (\alpha_2 q_2 + \beta_2\gamma_1 e^{q_1})\dot{\xi}_0 = \alpha_2\xi_2 + \beta_2\gamma_1 e^{q_1}.$$

它们有解

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \xi_2 = 0.$$

结构方程(12)给出

$$\frac{1}{2}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}\left[-(\alpha_1+\alpha_2)\right]\left[\dot{q}_1 q_2 - q_1\dot{q}_2 + (\alpha_2-\alpha_1)q_1 q_2 - 2\beta_1\gamma_2 e^{q_2} + 2\beta_2\gamma_1 e^{q_1}\right] + \dot{G} = 0.$$

由此找不到规范函数 $G = G(t, q_1, q_2)$，因此上述 Lie 对称性不导致守恒量.

[1] Zi-ping Li, *Acta Physica Sinica*, **30**(1981), 1659(in Chinese)[李子平,物理学报,**30**(1981),1659].

[2] Zi-ping Li, Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties (Beijing Polytechnic University Press, Beijing, 1993), p. 1(in Chinese)[李子平,经典和量子约束系统及其对称性质(北京工业大学出版社,北京,1993),第 1 页].

[3] Yue-yu Zhao, Feng-xiang Mei, Symmetries and Invariants of Mechanical Systems (Science Press, Beijing, 1999), p. 1 (in Chinese)[赵跃宇、梅凤翔,力学系统的对称性与不变量(科学出版社,北京,1999),第 1 页].

[4] Feng-xiang Mei, Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems (Science Press, Beijing, 1999) p. 90 (in Chinese)[梅凤翔,李群和李代数对约束力学系统的应用(科学出版社,北京,1999),第 90 页].

[5] R. M. Santilli, Foundations of Theoretical Mechanics, Vol. Ⅰ (Springer-Verlag, New York, 1978), p. 194.

[6] R. M. Santilli, Foundations of Theoretical Mechanics, Vol. Ⅱ (Springer-Verlag, New York, 1983), p. 267.

LIE SYMMETRIES AND CONSERVED QUANTITIES OF FIRST ORDER LAGRANGE SYSTEMS*

MEI FENG-XIANG　SHANG MEI

(*Department of Applied Mechanics*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)

(Received 1 March 2000)

ABSTRACT

In this paper, a system of first order ordinary differential equations is expressed in the form of first order Lagrange equations. The determining equations of Lie symmetries are established by the invariance of the ordinary differential equations under the infinitesimal transformations. The condition under which a Lie symmetry can lead to a conserved quantity is obtained and the form of the conserved quantities is given.

Keywords: First order Lagrange system, Lie symmetry, conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19972010), and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China.