

简谐势阱中具有吸引相互作用原子体系的玻色-爱因斯坦凝聚*

闫珂柱 谭维翰

(上海大学物理系, 上海 201800)

(1999 年 9 月 9 日收到, 2000 年 5 月 11 日收到修改稿)

给出了简谐势阱中具有吸引相互作用原子体系的非线性定态薛定谔方程的基态解, 得到了凝聚原子数随能量本征值变化的双稳态曲线, 并由此得到与实验报道相符的吸引型玻色-爱因斯坦凝聚体所能包含的最大原子数.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 双稳态

PACC: 0365, 0570

碱金属原子⁸⁷Rb^[1], ²³Na^[2], ⁷Li^[3]的玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)实现以后, 有关 BEC 现象的大量研究工作正在广泛进行. 原子间的相互作用对 BEC 的影响, 特别是锂原子的凝聚机制倍受关注. 一般认为^[5]空间均匀的锂原子气体不能形成稳定的 BEC 态, 这是因为它的 s 波散射长度 a 是负的. 原子间有效的吸引相互作用将引起凝聚体的崩塌. 然而, 理论又预期^[6-8]如果气体中的原子数充分少或原子间的相互作用非常弱并且处于外场中, 凝聚体是稳定的. 当上述条件不满足时凝聚体的衰变和崩塌也有几位作者讨论^[10-12]. Kagan^[7]从稍不同的论点出发指出: 具有很大负散射长度的俘获气体团簇的形成是不稳定的, 原子间的吸引使其存在更稠密的原子数 N . 我们通过直接数值求解球对称简谐势阱中的非线性定态薛定谔方程, 得出凝聚原子数随能量本征值变化的双稳态曲线. 对于给定系统, 凝聚体的原子数被限制在某个临界值 N_c 之下, N_c 的值可通过双稳态曲线的极小值求得, 且与实验报道^[4]相符. 即对于 $N < N_c$ 具有吸引相互作用的 BEC 可以形成.

在充分低的温度和外加势场 $V(r) = \frac{1}{2} m \omega_T^2 r^2$ 条件下, 弱相互作用中性原子凝聚体可由单一 BEC 波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 来描写. 原子-原子间的相互作用通过散射长度 a 表示. 凝聚体系的波函数满足 Gross-Pitaevskii 方程, 即非线性薛定谔方程(NLSE)有如下形式^[5]:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} m \omega_T^2 r^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + NU_0 |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

其中 m 为单原子质量, N 为凝聚体的原子数, $U_0 = 4\pi\hbar^2 a/m$, 负散射长度 a 反映原子间的吸引相互作用.

为求定态解, 设 $\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\mu t/\hbar} \Psi(\mathbf{r})$, μ 是体系的化学势, 代入(1)式可得 $\Psi(\mathbf{r})$ 满足的方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} m \omega_T^2 r^2 \Psi(\mathbf{r}) + NU_0 |\Psi(\mathbf{r})|^2 \Psi(\mathbf{r}) = \mu \Psi(\mathbf{r}), \quad (2)$$

对球对称的 s 波函数, 采用无量纲的长度、能量和波函数, 令

$$r = (\hbar/2m\omega_T)^{1/2} x \equiv \alpha x, \quad \beta = \mu/\hbar\omega_T, \\ C_0 = 2Na/(\hbar/2m\omega_T)^{3/2}, \\ \Psi(r) = (4\pi)^{-1/2} (2m\omega_T/\hbar)^{3/2} \Phi(x), \quad (3)$$

得到

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx} + \beta - \frac{x^2}{4} - C_0 \Phi^2(x) \right) \Phi(x) = 0. \quad (4)$$

波函数的归一化条件为

$$4\pi \int_0^\infty \Psi^2(r) r^2 dr = \int_0^\infty \Phi^2(x) x^2 dx = 1. \quad (5)$$

波函数 $\Phi(x)$ 满足的边界条件是

$$\Phi(x)|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad \Phi'(x)|_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad (6)$$

和

* 国家自然科学基金(批准号 69778011)资助的课题.

$$\Phi'(x)|_{x=\epsilon} = 0, \quad \Phi(x)|_{x=\epsilon} = \Phi(0) \quad (\epsilon = 10^{-6}). \tag{7}$$

应用文献 [9] 的数值计算方法, 方程 (4) 满足条件方程 (5, 6, 7) 的数值解画在图 1 和图 2 中.

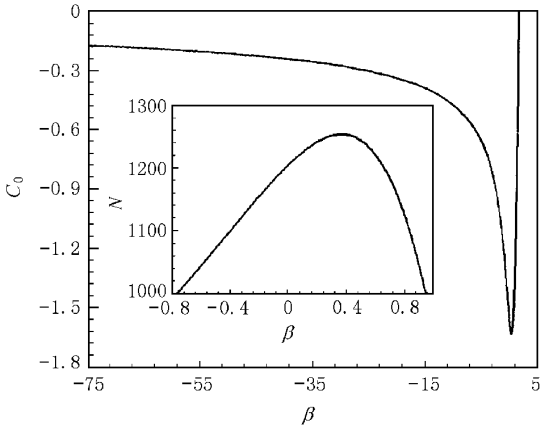


图 1 非线性系数 C_0 与基态能量 β 的关系 内插图为凝聚原子数 N 与基态能量 β 的关系

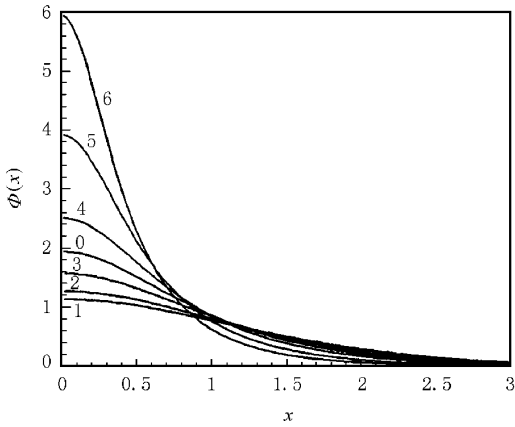


图 2 不同非线性系数和基态能量的波函数. 曲线 0: $C_0 = -1.626, \beta = 0.365$; 曲线 3: $C_0 = -1.563, \beta = 0.647$; 曲线 2: $C_0 = -1.303, \beta = 0.946, -0.75$; 曲线 1, 6: $C_0 = -1.033, \beta = 1.115, -1.75$

图 1 给出非线性系数 C_0 随基态能量 β 的变化关系, 其中内插图是根据 C_0 和 β 的关系曲线由方程 (3) 的第二式求得的凝聚原子数 N 与基态能量 β 之间的关系曲线. 在 $\beta = 0.365$ 处非线性系数 C_0 有一极小值 $C_{0min} = -1.62625$, 凝聚原子数 N 有一个极大值, 即存在一个临界原子数 N_c , 它是吸引型 BEC 能包含的最大原子数. 代入实验数据 [4] $|a| = 1.45 \text{ nm}, \omega = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} = 908 \text{ s}^{-1}, m_{Li} = 1.16 \times$

$10^{-23} \text{ g}, \alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = 2.236 \mu\text{m}$, 可得出 $N_c = 1254$. 这与实验中最大的凝聚体原子数限制在 650 和 1300 之间 [4] 是相符的. 对每一个 $C_0 > C_{0min}$ 都对应具有不同本征值的两个本征态, 如图 2 中 $C_0 = -1.033$ 相应波函数曲线 1 与 6 分别对应 $\beta = 1.115$ 和 -1.75 , 这就是我们所谓的双稳态. 对于能量本征值 $\beta > 0.364$ 的态, 凝聚体原子数随本征能量 β 的增加而减少. 而对于 $\beta < 0.364$ 的态, 凝聚体原子数随 β 的减少而减少, 但原子的空间分布越来越密集. 如图 2 所示, 压缩的波函数曲线 4, 5, 6 分别对应 $\beta = 0, -0.75, -1.75$. 这种压缩的波函数可能与文献 [7] 提到的稠密态有关. 本征态解表明: 对于 $N < N_c$ 具有吸引相互作用的原子体系的 BEC 可以形成.

总之, 我们求得了简谐势阱中具有吸引相互作用原子体系 NLSE 的本征解, 得到凝聚原子数随能量本征值变化的双稳态曲线, 并由此得到与实验报道相符的吸引玻色-爱因斯坦凝聚体所能包含的最大原子数 N_c . 本征态解表明: 对于 $N < N_c$ 具有吸引相互作用的原子体系的 BEC 可以形成. 这种吸引型 BEC 的稳定性和双稳态的性质尚需进一步研究.

[1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Mathews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Science*, **269**(1995), 198.
 [2] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Anderson, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.*, **75**(1995), 3969.
 [3] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.*, **75**(1995), 1687.
 [4] C. C. Bradley, C. A. Sackett, R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.*, **78**(1997), 985.
 [5] P. Nozières, D. Pines, *The theory of quantum liquids* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1990), Vol. 2.
 [6] P. A. Ruprecht, M. Edwards, K. Burnett, C. W. Clark, *Phys. Rev.*, **A54**(1996), 4178.
 [7] Yu. Kagan, G. V. Shlyapnikov, J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.*, **76**(1996), 2670.
 [8] M. Ueda, A. J. Leggett, *Phys. Rev. Lett.*, **80**(1998), 1576.
 [9] K. Z. Yan, W. H. Tan, *Acta Physica Sinica*, **48**(1999), 1185 (in Chinese) [闫珂柱, 谭维翰, *物理学报*, **48**(1999), 1185].
 [10] G. Baym, C. J. Pethick, *Phys. Rev. Lett.*, **76**(1996), 6.
 [11] R. J. Dodd, M. Edwards, C. J. Williams, C. W. Clark, M. J. Holland, P. A. Ruprecht, K. Burnett, *Phys. Rev.*, **A54**(1996), 661.
 [12] E. V. Shuryak, *Phys. Rev.*, **A54**(1996), 3151.

BOSE-EINSTEIN CONDENSATION OF NEUTRAL ATOMS WITH ATTRACTIVE INTERACTION IN A HARMONIC TRAP*

YAN KE-ZHU TAN WEI-HAN

(*Department of Physics , Shanghai University , Shanghai 201800 , China*)

(Received 9 September 1999 ; revised manuscript received 11 May 2000)

ABSTRACT

In this paper we present the numerical solutions of neutral atoms with attractive interaction in a harmonic trap. The calculated result shows the bistability curve of the number of condensate atoms versus the energy eigenvalues. The maximum number of atoms in and attractive Bose-Einstein condensate deduced hereby is in agreement with the experimental on the whole.

Keywords : Bose-Einstein Condensation , bistability

PACC : 0365 , 0570

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 69778011).