

混沌系统的非线性反馈跟踪控制*

伍维根¹⁾²⁾ 古天祥¹⁾

¹⁾ (电子科技大学自动化系, 成都 610054)

²⁾ (攀枝花大学电气工程系, 攀枝花 617000)

(1999 年 11 月 19 日收到, 2000 年 3 月 7 日收到修改稿)

提出了一种非线性反馈跟踪控制方法, 使受控混沌系统既能稳定到相空间的某一个点, 也能跟踪某一确定的运动规律. 理论分析和实验均表明该控制方法具有极强的鲁棒性.

关键词: 混沌, 非线性反馈, 跟踪控制, 鲁棒性

PACC: 0545, 4265

1 前 言

近年来, 物理学、数学和工程界中, 人们对混沌非线性控制的研究兴趣日渐浓厚^[1-5]. Ott, Grebogi 和 Yorke 在其开创性的工作中, 提出了一种混沌控制方法(OGY 法). 该方法通过参数摄动使混沌运动中的某一个不稳定周期轨道变为稳定. 此后, 混沌控制已成为非线性控制方面的一个研究热点^[6].

众所周知, 使被控对象的输出跟踪(抑制)某个外系统产生的参考信号(扰动信号)是控制理论中的一个重要问题, 该问题被称为输出调节问题^[7].

关于混沌系统的反馈控制, 目前已有多种方法. 在文献[8]中, Chen 采用传统的线性反馈方式使混沌系统跟踪指定周期轨道. 该方法从系统的输入端送入控制信号, 从而使混沌控制过程化 OGY 方法更容易实现. 但该方法没有考虑噪声和系统自身不确定性的影响, 其鲁棒性较差. 文献[9]对一维混沌系统采用扩展延时反馈控制, 增大了反馈控制的增益, 使系统的稳定性具有鲁棒性, 但仅能适用于一维混沌系统. 文献[10]根据 N 周期轨道的映射仍然被限制在周期轨道的假设, 提出用 N 步延迟值的非线性函数来估计目标轨道进行跟踪控制. 虽然消除了目标轨道需要已知的条件, 但当 N 值较大时, 非线性估值函数难于确定.

本文直接根据跟踪过程中, 跟踪误差应渐近衰减到零的思想提出一种跟踪控制方法, 使受控系统既能稳定到相空间的某一点, 也能跟踪外系统所产生的某一参考信号.

2 问题描述

考虑由以下状态方程描述的动力系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, t) + B(t)u(t), \\ y &= g(x), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $x(t) \in R^n$ 为系统状态, $f: R^n \times R^+ \rightarrow R^n$ 的非线性函数,

$B(t) \in R^{n \times m}$, $u(t) \in R^m$, $R^+ \in [0, +\infty]$, $y \in R^m$ 为系统输出, $g: R^n \rightarrow R^m$ 的非线性函数.

假设 1 系统要跟踪的目标为 $y^*(t) \in R^m$, 且各分量在 R^+ 上满足对时间 t 一次可微.

假设 2 $\frac{\partial g}{\partial x} B \in \Omega$ 时可逆, 其中 Ω 是 $R^{m \times m}$ 的一个子空间.

令跟踪误差为 $\epsilon(t) = y(t) - y^*(t)$, 其中 $\epsilon(t) = (\epsilon_1(t), \epsilon_2(t), \dots, \epsilon_m(t))^T$. 跟踪控制的要求为, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\epsilon(t) \rightarrow 0$.

3 主要结论

引理 1 若 $\epsilon(t)$ 在 R^+ 上渐近稳定, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y^*(t)\| = 0$. 其中 $\|\cdot\|$ 为范数.

证明 由 $\epsilon(t)$ 在 R^+ 上渐近稳定知, $\epsilon_i(t)$ 的 Lyapunov 矩阵特征值 λ_i 的实部为负, 即 $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

设在初始时刻 t_0 时, $\epsilon(t_0) = (\epsilon_1(t_0), \epsilon_2(t_0), \dots, \epsilon_m(t_0))^T \in R^m$,

$$\text{则 } \epsilon_i(t) = \epsilon_i(t_0) e^{\lambda_i(t-t_0)}, t \in [t_0, \infty],$$

$$\|y(t) - y^*(t)\|$$

$$= \|\epsilon(t)\| \leq \sum_{i=1}^m |\epsilon_i(t_0)| e^{R(\lambda_i)(t-t_0)}, t \in [t_0, \infty).$$

令 $\lambda = \max(R(\lambda_1), R(\lambda_2), \dots, R(\lambda_m))$, 则 $\lambda < 0$,

$$\text{所以 } \|y(t) - y^*(t)\| \leq \sum_{i=1}^m |\epsilon_i(t_0)| e^{\lambda(t-t_0)}.$$

$$\text{故 } \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y^*(t)\| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m |\epsilon_i(t_0)| e^{\lambda(t-t_0)} = 0.$$

引理 2 若 $\epsilon(t) = (\epsilon_1(t), \epsilon_2(t), \dots, \epsilon_m(t))^T$ 满足

$$\dot{\epsilon}(t) = -\text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_m) \text{sign}(\epsilon(t)) - \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_m) \epsilon(t)$$

且 $q_i (i=1, 2, \dots, m) > 0$, $k_i (i=1, 2, \dots, m) > 0$ 时, 则 $\epsilon(t)$ 渐近稳定, 其中 $\text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_m)$ 和 $\text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_m)$ 为 m 阶对角矩阵.

$$\text{sign} x = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

证明 由 $\dot{\epsilon}(t) = -\text{diag}(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m) \text{sign}(\epsilon(t)) - \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_m) \epsilon(t)$ 得

$$\dot{\epsilon}_i(t) = -q_i \text{sign}(\epsilon_i(t)) - k_i \epsilon_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

因为 $q_i, k_i > 0$, 所以当 $\epsilon_i(t) > 0$ 时, $\dot{\epsilon}_i(t) < 0$; 当 $\epsilon_i(t) < 0$ 时, $\dot{\epsilon}_i(t) > 0$.

$$\text{即 } \dot{\epsilon}_i(t) \epsilon_i(t) < 0 \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

选择 Lyapunov 函数 $v(t) = \frac{1}{2} \epsilon^T(t) \epsilon(t) =$

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \epsilon_i^2(t) > 0 \text{ 则}$$

$$\dot{v}(t) = \dot{\epsilon}^T(t) \epsilon(t) = \sum_{i=1}^m \dot{\epsilon}_i(t) \epsilon_i(t) < 0,$$

其中 T 为转置算子. 故知 $\epsilon(t)$ 渐近稳定.

定理 对于(1)式所表示的系统, 当

$$u(t) = -\left(\frac{\partial g}{\partial x} B\right)^{-1} (\text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_m) \text{sign}(\epsilon(t)) + \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_m) \epsilon(t) + \frac{\partial g}{\partial x} f(x, t) - \dot{y}^*(t))$$

且 $q_i, k_i > 0 (i=1, 2, \dots, m)$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y^*(t)\| = 0$.

证明 由 $\epsilon(t) = y(t) - y^*(t)$ 得

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}(t) &= \dot{y}(t) - \dot{y}^*(t) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} \dot{x} - \dot{y}^*(t) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} (f(x, t) + B(t)u(t)) - \dot{y}^*(t) \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial g}{\partial x} B u(t) - \dot{y}^*(t). \quad (2)$$

将 $u(t)$ 的表达式代入(2)式得

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}(t) &= -\text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_m) \text{sign}(\epsilon(t)) \\ &\quad - \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_m) \epsilon(t). \end{aligned} \quad (3)$$

由引理 1 和引理 2 得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y^*(t)\| = 0$.

4 鲁棒跟踪分析

当受控系统存在结构不确定性或出现外扰作用时, 用如下状态方程表示其动力学:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + \Delta f(x, p, t) + (B(t) \\ &\quad + \Delta B(p, t))u(t) + \omega(x, p, t), \\ y &= g(x), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $p \in R^l$ 是发生摄动的参数个数, $\Delta f(x, p, t) \in R^n$, $\Delta B(p, t) \in R^{n \times m}$ 是结构摄动, $\omega(x, p, t) \in R^n$ 是外扰.

若 $\frac{\partial g}{\partial x} (B + \Delta B)$ 可逆, 则当 $u(t) = -\left(\frac{\partial g}{\partial x} (B + \Delta B)\right)^{-1} (\text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_m) \text{sign}(\epsilon(t)) + \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_m) \epsilon(t) + \frac{\partial g}{\partial x} (f + \Delta f + \omega) - \dot{y}^*(t))$ 时, 系统的跟踪过程保持不变.

由 $\epsilon(t) = y(t) - y^*(t)$ 得

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}(t) &= \dot{y}(t) - \dot{y}^*(t) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} \dot{x} - \dot{y}^*(t) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} (f + \Delta f + \omega) + \frac{\partial g}{\partial x} (B \\ &\quad + \Delta B)u(t) - \dot{y}^*(t). \end{aligned} \quad (5)$$

将 $u(t)$ 的表达式代入(5)式得

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}(t) &= -\text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_m) \text{sign}(\epsilon(t)) \\ &\quad - \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_m) \epsilon(t). \end{aligned} \quad (6)$$

(3)式和(6)式完全相同, 故知跟踪过程完全不受系统结构摄动和外扰的影响, 具有极强的鲁棒性.

5 仿真实验

为了验证本文所提出的跟踪控制方法, 选用含噪 Ikeda^[11]混沌系统进行仿真实验. 系统方程为

$$\begin{aligned} t &= 0.8 - 15[1 + x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2], \\ u_n &= 1 + 0.6(1 - 0.5 \sin t), \end{aligned}$$

$$x_n = 1 + u_n(x_{n-1}\cos t - y_{n-1}\sin t) + r_1 n_1(t) + u_1,$$

$$y_n = u_n[x_{n-1}\sin t - y_{n-1}\cos t] + r_2 n_2(t) + u_2,$$

$$y = [x_n \ y_n]^T,$$

其中 $n_1(t), n_2(t)$ 是独立同分布的零均值白噪声。

分别对系统在有噪声作用和无噪声作用时,使受控系统跟踪相空间的确定点和正弦信号.图1为无噪声作用时的定点跟踪控制结果.其控制量为

$$u_1 = -(q_1 \text{sign} \epsilon_1 + k_1 \epsilon_1) \Delta t + x_{n-1} - 1 - u_n(x_{n-1}\cos t - y_{n-1}\sin t),$$

$$q_1 = 0.0005, k_1 = 0.45,$$

$$u_2 = -(q_2 \text{sign} \epsilon_2 + k_2 \epsilon_2) \Delta t + y_{n-1} - u_n(x_{n-1}\sin t - y_{n-1}\cos t),$$

$$q_2 = 0.00085, k_2 = 0.5,$$

采样时间 $\Delta t = 0.1$.图2为有噪声作用时的定点跟踪控制结果.控制量为

$$u_1 = -(q_1 \text{sign} \epsilon_1 + k_1 \epsilon_1) \Delta t + x_{n-1} - 1 - u_n(x_{n-1}\cos t - y_{n-1}\sin t) - r_1 \text{rand}(1,1), r_1 = 0.01,$$

$$u_2 = -(q_2 \text{sign} \epsilon_2 + k_2 \epsilon_2) \Delta t + y_{n-1} - u_n(x_{n-1}\sin t - y_{n-1}\cos t) - r_2 \text{rand}(1,1), r_2 = 0.01.$$

图3为无噪声作用时的正弦信号跟踪结果.控制量为

$$u_1 = -(q_1 \text{sign} \epsilon_1 + k_1 \epsilon_1) \Delta t + x_{n-1} - 1$$

$$- u_n(x_{n-1}\cos t - y_{n-1}\sin t) + \sin 2n\pi/80 - \sin \chi(n-1)\pi/80,$$

$$u_2 = -(q_2 \text{sign} \epsilon_2 + k_2 \epsilon_2) \Delta t + y_{n-1} - u_n(x_{n-1}\sin t - y_{n-1}\cos t) + \cos 2n\pi/60 - \sin \chi(n-1)\pi/60.$$

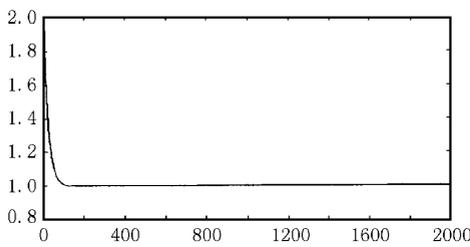
图4为有噪声作用时的正弦信号跟踪控制结果.控制量为

$$u_1 = -(q_1 \text{sign} \epsilon_1 + k_1 \epsilon_1) \Delta t + x_{n-1} - 1 - u_n(x_{n-1}\cos t - y_{n-1}\sin t) + \sin 2n\pi/80 - \sin \chi(n-1)\pi/80 - r_1 \text{rand}(1,1),$$

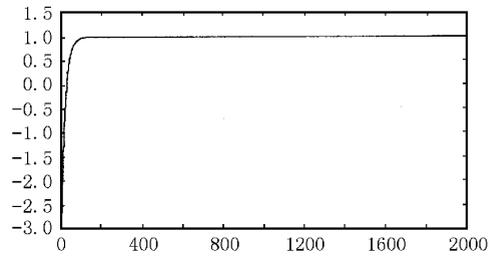
$$u_2 = -(q_2 \text{sign} \epsilon_2 + k_2 \epsilon_2) \Delta t + y_{n-1} - u_n(x_{n-1}\sin t - y_{n-1}\cos t) + \cos 2n\pi/60 - \cos \chi(n-1)\pi/60 - r_2 \text{rand}(1,1).$$

实验表明,系统在不同的控制作用下,既能跟踪相空间的固定点,同时也能跟踪正弦信号;且有无噪声作用时,跟踪结果几乎相同.

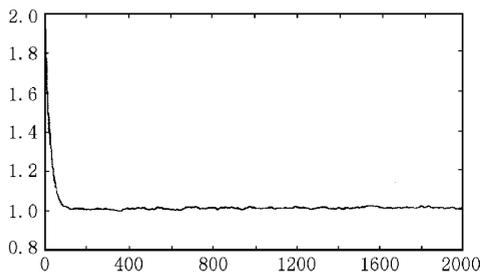
在实验过程中发现,为了让系统在跟踪误差较大时,能较快地收敛到被跟踪目标,应选择较大的 k_i ($i=1, 2, \dots, m$),同时为使系统输出稳定到被跟踪目标时具有较小的抖振,应选择较小的 q_i ($i=1, 2, \dots, m$).因为当误差较大时,起主导作用的收敛项是 $k_i \epsilon_i(t)$;而当误差接近于零时,起主导作用的项是 $q_i \text{sign} \epsilon_i(t)$.



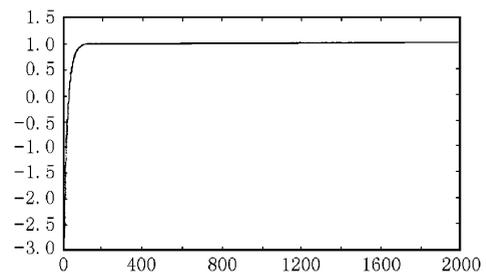
(a) 无噪 x 分量



(b) 无噪 y 分量



(a) 含噪 x 分量



(b) 含噪 y 分量

图1

图2

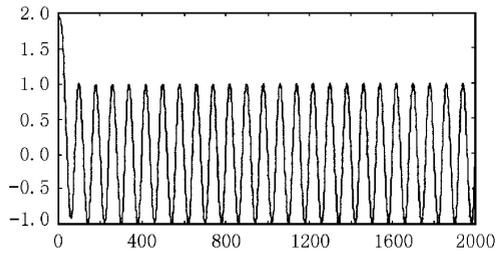
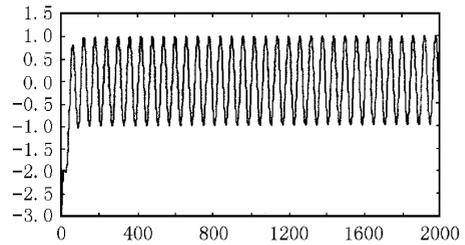
(a) 无噪 x 分量(b) 无噪 y 分量

图 3

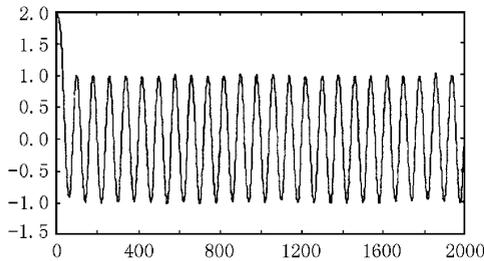
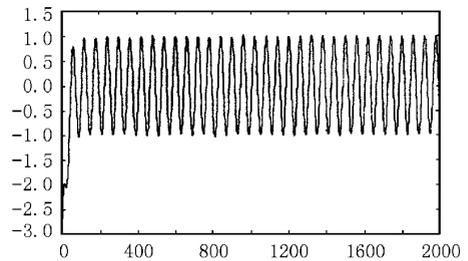
(a) 含噪 x 分量(b) 含噪 y 分量

图 4

6 结 论

本文基于跟踪误差渐近收敛到零的非线性反馈跟踪控制能使被控混沌系统跟踪不同的目标,且控制信号易于确定,理论分析和实验结果均表明该控制方法具有极强的鲁棒性。

- [1] X. S. Luo *et al.*, *Acta Physica Sinica* **47**(1998), 1078 [in Chinese] 罗晓曙等 物理学报 **47**(1998), 1078.]
- [2] X. S. Luo *et al.*, *Acta Physica Sinica* **48**(1999), 402 [in Chinese] 罗晓曙等 物理学报 **48**(1999), 402.]
- [3] F. Tang *et al.*, *Acta Physica Sinica* **48**(1999), 802 [in Chinese] 唐芳等 物理学报 **48**(1999), 802.]
- [4] J. F. Gao *et al.*, *Acta Physica Sinica* **48**(1999), 1618 [in Chinese] 高金峰等 物理学报 **48**(1999), 1618.]

- [5] K. Konishi, M. Hiral, H. Kokame, *Physics Letter A*, **24** (1998), 511.
- [6] Chi-chuan Hwang, Hao-yun Chow, Yung-kun Wang, *Physica D* **92**(1996), 95.
- [7] Xiao-jun Ma, Chuan-yuan Wen, *Control Theory and Applications*, **13**(3)(1996), 391 [in Chinese] 马晓军, 文传沅 控制理论与应用, **13**(3)(1996), 391.]
- [8] Guan-rong Chen, Xiao-ning Dong, On feedback control of chaotic continuous-time systems, *IEEE Trans.* 1993, cs-I-40 (9) 591—600.
- [9] Morio Ishii, Keiji Konishi, Hide Ki KoKame, *Physics Letters A* **235**(1997), 603.
- [10] Toshimitsu Vshio, Shigeru Yamamoto, *Delayed feedback control with nonlinear estimation Letters A* **247**(1998), 112.
- [11] Lian-yue Cao, Yi-guang Hong, Hai-ping Fang, *Physica D* **85** (1995), 225.

NONLINEAR FEEDBACK FOLLOWING CONTROL OF CHAOTIC SYSTEMS

WU WEI-GEN^{1,2)} GU TIAN-XIANG¹⁾

¹⁾ Department of Automation, UESTC, Chengdu 610054, China

²⁾ Department of Electricity, Panzihua University, Panzihua 617000, China

(Received 19 November 1999; revised manuscript received 7 March 2000)

ABSTRACT

A new nonlinear feedback following controlling method of chaotic systems is presented to stabilize chaotic systems and follow a deterministic motion. Theory and experiments show this controlling method is strongly robust.

Keywords: Chaos, nonlinear feedback, following control, robust

PACC: 0545, 4265