第 49 卷 第 10 期 2000 年 10 月
1000-3290/2000/49(10)/1926-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 10, October, 2000

高速车随机延迟逐步加速交通流元胞自动机模型*

汪秉宏[1)†] 王 雷[1)] 许伯铭[2)] 胡斑比[3)]

[1)](中国科学技术大学近代物理系火灾科学国家重点实验室,及非线性科学中心,合肥 230026)

[2)](香港中文大学物理系,沙田 新界 香港)

[3)](香港浸会大学物理系及非线性研究中心,九龙 香港)

(2000 年 3 月 10 日收到)

提出介于 Nagel-Schreckenberg(NS)模型和 Fukui-Ishibashi(FI)模型之间的一种新的一维交通流元胞自动机模型. 此模型采用 NS 模型中的车辆逐步加速方式,和 FI 模型中的仅最大速车可随机减速的车辆延迟方式. 证明新模型的基本图,即车流渐近稳态的平均速度与道路上的车辆密度之间的函数关系与 FI 模型的完全相同. 这也就是说,只允许最高速车辆可发生延迟的 FI 交通流模型,如果将其突然无限制加速方式(车辆可在一个时步内从零速加速到最高速限 M 或车头距离所允许的最大速度),改变为车辆的逐步有限加速方式(车辆每次仅能增加 1 个速度单位),则车流的自组织作用仍将产生相同的渐近稳态行为.

关键词:交通流,元胞自动机模型,相变基本图,Nagel-Schreckenberg 模型,Fukui-Ishibashi 模型

PACC:0550,0520,6470

1 引 言

元胞自动机模型为交通流、粒子输运和更一般的颗粒流问题的研究提供了一种有效的方法[1—5]. 两个最基本的一维交通流模型是 Nagel-Schreckenberg(NS)模型和 Fukui-Ishibashi(FI)模型[6—11].

在 FI 模型中,所有车辆都可以突然加速到最高允许速度 $v_{\max}=M$ 或前方紧邻空区(长度 C)所允许的速度. 然而,获得最高允许速度($v=M$)的车辆可能以概率 f 慢化一个速度单位[11]. 这一模型的基本图,即长时间渐近稳态下车流的平均速率($V(t\to\infty)$)作为道路上车辆密度 ρ 的函数关系曲线已经被数值和解析地研究[12—16]. 对于这一模型采用以相邻车辆之间距为动力学变量考察系统随时间的演化,可以求得对于一般 M 的基本图的精确解析平均场方程[17—23].

NS 模型则对车辆的加速施以逐步有限的限制,即每一时步中所有低于最高速度 $v_{\max}=M$ 的车辆可将速度增加 1 个单位,然后又允许所有车辆(包括达到最高速度 M 的车辆)以某一给定概率 f 将速度降低一个单位. 如果这一速度 v 不超过车辆的前方空间距 C,则该车以速度 v 运动,否则,当 $C<v$,车辆仅在该时步中前移 C 个格点. 这一模型涉及的车辆相互作用和车流的时空关联要比 FI 模型复杂. 对于 $M>1$ 的一般情形,NS 模型还只能作数值的研究,尚未得到精确的解析解[6—10].

为了模拟更符合实际的交通流,应该考虑车辆的逐步有限加速方式和主要是高速车发生随机延迟的情况. 为此,我们提出介于 FI 模型和 NS 模型之间的一种新模型. 新模型其实是一种修正 NS 模型,它采用 NS 模型的车辆逐步有限加速方式,然而却采用 FI 模型的仅最高速车可发生随机延迟的车辆减速方式. 当不考虑随机延迟可能性时,新模型即为决定论性 NS 模型. 我们已在文献[24—26]中严格证明决定论性 NS 模型与决定论性 FI 模型具有同样的渐近稳态行为,即它们有共同的基本图. 本文将进一步证明:在考虑车辆随机延迟可能性的一般情况下,新模型与 FI 模型仍具有同样的渐近稳态行为,两者的基本图是完全相同的. 这说明,交通流模

* 国家重点基础研究专项(973 项目)经费、国家攀登计划"非线性科学"和国家自然科学基金(批准号:19932020,9974039,59876039)资助的课题.

† E-mail:bhwang@ustc.edu.cn.

型中的车辆延迟方式对于交通流最后的渐近稳态行为的形成是关键性的.

本文给出所讨论的一般修正 NS 系统的定义和车辆间距的基本演化方程,然后定义可加速车辆,不可加速车辆,与车辆追尾等概念,并给出新系统自组织演化规律的三个定理.概述了关于不考虑随机延迟的决定论性 NS 模型与决定论性 FI 模型之渐近稳态相同的证明.证明了仅在最高速车可发生随机延迟的情况下,NS 模型与一般 FI 模型的渐近行为相同,其基本图曲线完全由 FI 模型的解析平均场方程精确地描绘,即具有与 FI 模型相同的车流平均速度 V 作为车辆密度 ρ 和延迟概率 f 之函数关系.

2 修正 NS 模型的车距演化

若以 $C_n(t)$ 表示在第 t 时步中第 n 车辆与第 $n+1$ 车辆之间的空隙距离,则车辆的平均空距为 $\overline{C}=(1/N)\sum_n C_n=1/\rho-1$,其中 $\rho=N/L$ 为道路上的车辆密度,L 为路长,N 为车辆总数.

我们选择车辆间距 $C_n(t)$ 为动力学变量,考察它随时间的演化.对于仅允许最大速度车辆发生随机延迟的修正 NS 模型,其车辆间距的基本演化方程可以表示为

$$C_n(t+1)=C_n(t)-v_n(t)+v_{n+1}(t),\quad(1)$$

$$v_n(t+1)=F_M\{f,\min[M,v_n(t)+1,C_n(t+1)]\},\quad(2)$$

其中

$$F_M\{f,v\}=\begin{cases}v, & \text{若 } v<M,\\ \left.\begin{matrix}v-1, & \text{概率为 } f\\ v, & \text{概率为 } 1-f\end{matrix}\right\} & \text{若 } v=M,\end{cases}\quad(3)$$

$v_n(t)$为第 n 车辆在第 t 时步中所获得的速度,亦是它在该时步中所前移的格点数.

对于修正 NS 模型,可以定义可加速车辆,不可加速车辆与车辆追尾的概念.

可加速车辆 若 $v_n(t)<v_{n+1}(t)-1$,则称第 n 车辆在第 t 时步中为可加速车辆.

不可加速车辆 若 $v_n(t)\geqslant v_{n+1}(t)-1$,则称第 n 车辆在第 t 时步中为不可加速车辆.

追尾 若有 $v_n(t)=C_n(t)$,则称第 $n+1$ 车辆在 t 时段被第 n 车辆追尾.

关于可加速车辆与不可加速车辆的时间演化,我们仿照文献[24,26]的方法,证明如下三条定理.

定理 1 在修正 NS 模型中,可加速车辆必加速,即

$$v_n(t)<v_{n+1}(t)-1\ \Rightarrow\ v_n(t+1)=v_n(t)+1.\quad(4)$$

证明 首先,由(1)式及 $v_n(t)\leqslant C_n(t)$可知

$$C_n(t+1)\geqslant v_{n+1}(t).\quad(5)$$

对于修正的 NS 模型,车辆速度的更新规则(2)及(3)式也可以改写为

$$v_n(t+1)=\min\{\widetilde{M}_f,v_n(t)+1,C_n(t+1)\},\quad(6)$$

其中

$$\widetilde{M}_f=\begin{cases}M-1, & \text{概率为 } f,\\ M, & \text{概率为 } 1-f.\end{cases}\quad(7)$$

由所设 $v_n(t)+1<v_{n+1}(t)\leqslant M$,即 $v_n(t)+1\leqslant M-1$,故有

$$v_n(t+1)=\min\{v_n(t)+1,v_{n+1}(t)\}=v_n(t)+1,$$

因而(4)式成立,定理 1 获证.

定理 2 在修正 NS 模型中,若在某时步中某车辆为不可加速车辆,则它以后将一直保持为不可加速车辆,即

$$v_n(t)\geqslant v_{n+1}(t)-1\ \Rightarrow\ v_n(t+1)\geqslant v_{n+1}(t+1)-1.\quad(8)$$

证明 由(5)及(6)式可知

$$\begin{aligned}v_n(t+1)&=\min\{\widetilde{M}_f,v_n(t)+1,C_n(t+1)\}\\&\geqslant\min\{\widetilde{M}_f,v_{n+1}(t),v_{n+1}(t)\}\\&\geqslant\min\{\widetilde{M}_f,v_{n+1}(t+1)-1\},\end{aligned}$$

而由 $v_{n+1}(t+1)\leqslant M$,得 $v_{n+1}(t+1)-1\leqslant M-1$,因而

$$\min\{\widetilde{M}_f,v_{n+1}(t+1)-1\}=v_{n+1}(t+1)-1,$$

于是(8)式成立,定理 2 获证.

由定理 1,2,显然可得如下推论.

推论 1 仅最大速车辆发生随机延迟的修正 NS 模型中,经过有限长时间后,所有车辆均成为不可加速车辆.

以 $N_i(t)\equiv\sum_n\delta[C_n(t),i]$ 表示 t 时刻前方空格数为 i 的车辆数,亦即长度为 i 的车辆间距数目.

定理 3 当车辆最大速度 $M\geqslant2$,修正 NS 模型的零长车距数 $N_0(t)$不随时间增加.

证明 若 $C_{n+1}(t)>0$,则

$$v_{n+1}(t)=\min[\widetilde{M}_f,v_{n+1}(t-1)+1,C_{n+1}(t)]>0.$$

又由(5)式可知 $C_n(t+1)>0$,即证明了

$$C_{n+1}(t)>0\ \Rightarrow\ C_n(t+1)>0.\quad(9)$$

这就是说,如果在 t 时步中第 $n+1$ 车辆前方有空格,则 $t+1$ 时步中第 n 车辆前方亦必有空格.因此 $N_0(t)$ 不增.

事实上,如果某个 n,使得 $C_{n+1}(t)=0$ 和 $C_n(t+1)>0$,则可以断定 $N_0(t)$ 将减少.

3 决定论性 NS 模型

对于不考虑车辆随机延迟可能性,即 $f=0$ 的决定论性 NS 模型,(2)式和(6)式皆可简化为

$$v_n(t+1) = \min[M, v_n(t)+1, C_n(t+1)]. \tag{10}$$

在文献[24,26]中进一步证明了如下定理和推论.

定理 4 若某车辆被一不可加速车辆追尾,则它以后将一直被不可加速车辆追尾.即若有

$$v_n(t) = C_n(t), \text{且 } v_n(t) \geqslant v_{n+1}(t) - 1,$$

则

$$v_n(t+1) = C_n(t+1),$$

且

$$v_n(t+1) \geqslant v_{n+1}(t+1) - 1. \tag{11}$$

定理 5 当 $\bar{C}<M$,即 $\rho \geqslant \frac{1}{M+1}$,不存在某个有限的 t_0,使得 $v_n(t)<C_n(t)$,$\forall t>t_0$ 永远成立.

这表明当公路上的车辆分布处在高密度区时,任何一个车辆都终将被跟在后面的车辆追尾.由定理 4、定理 5、推论 1 可得

推论 2 决定论性 NS 模型中,当 $\bar{C}<M$,经过有限长时间后,所有车辆均被不可加速车辆追尾,且此状态将永远保持不变.

由推论 2 知,高密度区($\rho \geqslant \frac{1}{M+1}$)的决定论性 NS 模型中,车流的自组织作用必将趋于所有比 M 长的车辆间距都消失的状态.因而车流渐近稳态的平均速率是

$$\langle V(t \to \infty)\rangle = \frac{1}{N}\sum_n v_n = \frac{1}{N}\sum_n C_n = \frac{1}{\rho} - 1. \tag{12}$$

定理 6 设 $\bar{C} \geqslant M$,即 $\rho \leqslant 1/(M+1)$,只要 $N_0>0$,则 N_0 不能永远不减.

这表明对于低密度的车辆分布,零长车距数不仅不随时间增加而且将随时间减少.由此定理可知,任何低密度的决定论性 NS 系统,在经过有限时步后,不再存在零长车距.

对于一个最大速度为 $v_{\max}=M$ 的 $N_0=0$ 系统 S_0,又可以考虑如下的新系统:

$$S_1: \{v_{\max}^{\text{new}} = v_{\max} - 1 = M - 1;$$
$$C_n^{\text{new}}(t) = C_n(t) - 1;$$
$$v_n^{\text{new}}(t) = v_n(t) - 1.\ \forall n, \forall t > 0\}.$$

显然,新系统 S_1 的演化与原系统 S_0 是一一对应的.根据定理 6,最大速度为 M-1 的新系统 S_1 也必将在有限时间内演化到不存在零车辆间距的状态.这意味着,原系统 S_0 必将在有限时间内演化到不存在长度为 0 和 1 的车辆间距.这样的推理可以继续作下去,一直到考虑如下的新系统:

$$S_{M-1}: \{v_{\max}^{\text{new}} = v_{\max} - (M-1) = 1;$$
$$C_n^{\text{new}}(t) = C_n(t) - (M-1);$$
$$v_n^{\text{new}}(t) = v_n(t) - (M-1).\ \forall n, \forall t > 0\}.$$

同样可以论证新系统 S_{M-1} 必将在有限时间内演化到不存在零车距.这意味着原系统 S_0 在有限长时间以后,不存在长度为 $0,1,\cdots,M-1$ 的车辆间距:$N_i=0,\forall i<M$.因此原系统经过有限长时间后,必将演化到所有车距长度都不短于 M 的状态:$C_n \geqslant M,\forall n$.根据以上的推理,可知,系统由任意初始状态经过有限长时间演化后必定达到如下的状态:$v_n=M,\forall n$.这证明:当车辆密度为 $\rho \leqslant 1/(M+1)$,最大车辆速度为 M 的决定论性 NS 系统的渐近稳态的平均速度是 $\langle V(t\to\infty)\rangle = M$.

综上所述,对于最大车速为 M 的无延迟决定论性 NS 交通流模型,我们严格证明了,其渐近稳态的车流平均速度对于车辆密度 ρ 的依赖关系应由如下基本图方程式给出:

$$\langle V(t \to \infty)\rangle = \begin{cases} M & \text{当 } 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{M+1}, \\ \frac{1}{\rho} - 1 & \text{当 } \frac{1}{M+1} \leqslant \rho \leqslant 1. \end{cases} \tag{13}$$

此结果与最大车速为 M 的决定论性 FI 交通流模型的结果完全一样[11,21—23].

4 随机减速修正 NS 模型的渐近稳态

考虑当且仅当最大速度($v_{\max}=M$)车辆可以以概率 f 发生延迟的修正 NS 模型在经历长时间演化后所达到的渐近稳态的行为.

4.1 高密度区

假设车辆平均间距为 $\bar{C}<M-1$,即系统的车辆密度为 $\rho>1/M$,可以证明如下的定理.

定理 7 对于车辆最大速限为 M 的允许最大速度车辆发生延迟的修正 NS 模型,在 $\bar{C}<M-1$(即 $\rho>1/M$)的高密度区域中,所有不小于 M 的车辆间距,将随时间减少,最后系统一定趋于所有车辆间距均小于 M 的稳态:

$$C_n(t\to\infty)\leqslant M-1,\forall n. \tag{14}$$

证明 根据定理 1 和定理 2 可知,在随机延迟概率 $0<f<1$ 的一般情况下,车辆流仍将趋于这样的状态:所有的车辆都变为不可加速车辆,即 $v_n(t)\geqslant v_{n+1}(t)-1,\forall n$.

考察一个长度为 $M+k(k=0,1,2,\cdots)$ 的长车辆间距,即设 $C_n(t)=M+k$.

设第 n 车辆的速度为 $v_n(t)=m(m=0,1,\cdots$,或 $M)$.

根据车辆的不可加速条件,可知第 $n+1$ 车辆的可能速度是

$$v_{n+1}(t)=\{0,1,\cdots,m,\text{或 } m+1\}\quad \text{当 } v_n(t)=m\leqslant M-1,$$
$$v_{n+1}(t)=\{0,1,\cdots,\text{或 } M\}\quad \text{当 } v_n(t)=M.$$

于是,从车辆间距的演化方程(2)可以求得 $t+1$ 时刻的相应可能车辆间距分别为

$$C_n(t+1)=\{M+k-m,M+k-m+1,\cdots,\text{或 } M+k+1\},\quad \text{当 } v_n(t)=m\leqslant M-1,$$
$$C_n(t+1)=\{k,k+1,\cdots,\text{或 } k+M\},\quad \text{当 } v_n(t)=M.$$

以 P_m 表示车辆速度为 m 的概率.则车辆间距从 $C_n(t)=M+k$ 跃迁为

$$C_n(t+1)=\{M+k-m,M+k-m+1,\cdots,M+k-1\}$$

的概率,也就是车辆间距缩短的概率均为

$$\begin{aligned}W_{M+k}{}^{(-)}&=P_M(P_0+P_1+\cdots+P_{M-1})\\&+P_{M-1}(P_0+P_1+\cdots+P_{M-2})\\&+\cdots+P_2(P_0+P_1)+P_1P_0,\end{aligned}$$

而车辆间距保持不变:$C_n(t)=M+k\to C_n(t+1)=M+k$ 的概率是

$$\begin{aligned}W_{M+k}{}^{(0)}&=P_MP_M+P_{M-1}P_{M-1}+\cdots\\&+P_1P_1+P_0P_0.\end{aligned}$$

至于车辆间距长度增加 1 个格步 $C_n(t)=M+k\to C_n(t+1)=M+k+1$ 的概率则是

$$\begin{aligned}W_{M+k}{}^{(+1)}&=P_{M-1}P_M+P_{M-2}P_{M-1}+\cdots\\&+P_1P_2+P_0P_1.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&W_{M+k}{}^{(-)}-W_{M+k}{}^{(+1)}\\&=P^M(P_0+P_1+\cdots+P_{M-2})\\&\quad+P_{M-1}(P_0+P_1+\cdots+P_{M-3})\\&\quad+\cdots+P_3(P_0+P_1)+P_2P_0>0,\end{aligned}$$

因此,所有长度不小于 M 的车辆间距缩短的概率大于其长度增加 1 的概率,即

$$W_{M+k}{}^{(-)}>M_{M+k}{}^{(+1)}.$$

因而系统经长时间的演化终将达到所有长度不小于 M 的车辆间距皆消失的状态.也就是说,系统必将达到由(14)式所示的状态.定理证毕.

实际上,一个车辆间距的长度从 $M+k$ 转变为 $M+k+1$ 的跃迁概率与从 $M+k+1$ 转变为 $M+k$ 的跃迁概率是相等的,即

$$\begin{aligned}W_{M+k\to M+k+1}&=W_{M+k+1\to M+k}=P_{M-1}P_M\\&+P_{M-2}P_{M-1}+\cdots+P_1P_2+P_0P_1.\end{aligned}$$

但是一个长度为 $M+k+1$ 的车辆间距还存在着转变为长度小于 $M+k$ 的车辆间距的可能性,因此系统发展的总趋势是所有不小于 M 的车辆间距长度缩短直至消失殆尽.

对于长度小于 M 的车辆间距 $C_n(t)=M-k$ $(k=1,2,\cdots)$,可以类似地得到

$$\begin{aligned}W_{M-k}{}^{(-)}&=P_{M-k}(P_0+P_1+\cdots+P_{M-k-1})\\&+P_{M-k-1}(P_0+P_1+\cdots+P_{M-k-2})\\&+\cdots+P_2(P_0+P_1)+P_1P_0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_{M-k}{}^{(0)}&=P_{M-k}P_{M-k}+P_{M-k-1}P_{M-k-1}\\&+\cdots+P_1P_1+P_0P_0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_{M-k}{}^{(+1)}&=P_{M-k}P_{M-k+1}+P_{M-k-1}P_{M-1}\\&+\cdots+P_1P_2+P_0P_1.\end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned}&W_{M-k}{}^{(-)}-W_{M-k}{}^{(+1)}\\&=P_{M-k}(P_0+P_1+\cdots+P_{M-k-2})\\&\quad+P_{M-k-1}(P_0+P_1+\cdots+P_{M-k-3})+\cdots\\&\quad+P_3(P_0+P_1)+P_2P_0-P_{M-k}P_{M-k+1}.\end{aligned}$$

由于 $P_{M-k}P_{M-k+1}>0$,故对于小于 M 的车辆间距 $C_n(t)\leqslant M-1$,一般不能得到其长度缩短的概率大于其增加 1 的概率的结论.因而长度小于 M 的车辆间距,在高车辆密度区,依赖于车辆密度,一般不会消失.

以上论证,当 $P_0=P_1=\cdots=P_{M-2}=0$ 时,不适用.然而,在由 $\bar{C}<M-1$ 或 $\rho>1/M$ 所定义的高车辆密度区中,以上情况不会出现.这种情况意味着所有车辆速度 $v_n(t)\geqslant M-1$,因而所有车辆间距均不

小于 $M-1$：$C_n(t)\geqslant M-1,\forall n$. 而这意味着 $\bar{C}\geqslant M-1$，与所设高密度条件不符. 这说明定理 7 的结论与高车辆密度区条件是密切不可分的.

定理 7 意味着在车辆高密度区的渐近稳态中，所有车辆速度均低于最大速限 M：

$$v_n(t\to\infty)\leqslant M-1,\forall n. \tag{15}$$

在这种情况下，达到最大速限的车辆可以发生随机延迟的规则不起作用，因而系统相当于车辆速限为 M 的决定论性 NS 模型. 于是，车辆流的平均速度仍然是 $V(t\to\infty)=1/\rho-1$.

4.2 低密度区

设 $\bar{C}\geqslant M-1$，即 $\rho\leqslant 1/M$. 在有延迟（$f>0$）及车辆数大于车辆最高速度（$N>M$）的假设下，类似于定理 6，我们能够证明如下定理.

定理 8 对于修正 NS 模型，当 $\bar{C}\geqslant M-1$，即 $\rho\leqslant 1/M$，零长车距数 N_0 不能永远不减.

使用类似的反证法，假若定理不真而有 $N_0>0$ 永远不减，则可得到（15）式. 此式的右方是

$$\sum_{n=1}^{N}C_{N-n}(0)=N\bar{C}>N\cdot(M-1).$$

而左方却为

$$\sum_{t=0}^{N-1}v_N(t)\leqslant\sum_{t=2}^{N}M=(N-1)M.$$

在 $N>M$ 的一般情况下，此两式是矛盾的. 这证明假设不成立，因而定理 6 在随机延迟的一般情况下仍然成立.

然后，我们使用对决定论性模型类似的推理，可以论证系统经历长时间演化后，必将达到所有长度小于（$M-1$）的车辆间距均消失的状态：

$$C_n(t)\geqslant M-1,\forall t,\forall n. \tag{16}$$

进一步可以证明，在长时间演化后，车辆速度 v_n 的取值只能有 M，$M-1$ 两种. 假若不然，有 $v_n(t)+1\leqslant M-2$，则有 $v_n(t)+1\leqslant M-1$，由（14）式又可得 $v_n(t)+1\leqslant C_n(t)$. 因此从随机模型的速度演化规则（6）式得 $v_n(t+1)=v_n(t)+1$. 这意味着所有低于 $M-1$ 的车辆速度必然增加，直至所有车辆的速度都达到 $v_n=M-1$，或 M.

于是知道在系统的渐近稳态中可设 $v_n(t)+1=M$，或 $M+1$，因而随机延迟修正 NS 模型的车辆速度演化规则（2）或（6）式化为

$$v_n(t+1)=\min[\widetilde{M}_f,C_n(t+1)], \tag{17}$$

而这正是一般随机延迟 FI 模型的车辆速度演化规则. 这说明系统经过长时间演化后必定达到所有车辆速度都为 $M-1$，或 M，所有车辆间距均不小于 $M-1$ 的状态，而在此状态下，车辆的逐步有限加速方式将不再起作用，系统已经演变为车辆可突然加速至速限 M 并允许达到最高速限的车辆以概率 f 延迟的 FI 系统. 因此随机延迟修正 NS 模型的低密度区车流平均速度作为车密度 ρ 和延迟概率 f 的函数与文献[21—23]中所给出的一般 FI 模型的低密度区基本图关系完全相同.车流的平均速度应为

$$\langle V(t\to\infty)\rangle=\frac{1}{2}\Big[M-1+1/\rho-\sqrt{(1/\rho-1-M+2f)^2+4f(1-f)}\Big].$$

综上所述，对于逐步有限加速方式而仅允许最高速车随机延迟的修正 NS 交通流模型，仍然得到与 FI 模型相同的精确解析基本图方程

$$\langle V(t\to\infty)\rangle=\begin{cases}\dfrac{M-1+1/\rho-\sqrt{(1/\rho-1-M+2f)^2+4f(1-f)}}{2} & 0\leqslant\rho\leqslant\dfrac{1}{M},\\[2ex] \dfrac{1}{\rho}-1 & \dfrac{1}{M}<\rho\leqslant 1.\end{cases} \tag{18}$$

5 结 论

NS 模型采用车辆逐步加速方案和所有车辆均可发生随机延迟的规则. 这一模型可以充分显现交通流的自组织临界性行为和启动-停止波现象. 然而这一模型基本图方程的精确解至今未能获得. 如果保留车辆的逐步加速方式，而将延迟规则改变为 FI 模型中的只允许已达到最大速度（$v_{\max}=M$）的车辆发生随机延迟的规则，将形成一个介于 NS 模型和 FI 模型之间的新模型，或称修正 NS 模型. 采用逻辑推理的方法，在考虑随机延迟的一般情况下，解析地证明了修正 NS 模型的渐近稳态的行为与 FI 模型的完全相同，因此，其基本图曲线的函数方程亦由 FI 模型的精确解析平均场方程给出. 我们的结果说明，交通流模型中的车辆加速方式不是本质的，随机延迟方式才是本质的. 在车辆之间的自组织相互作用下，具有相同延迟方式的交通流能够获得相同的渐近稳态行为，不同的车辆加速方式只是使从初态演化到最后稳态形成所需要的时间有所不同而已.

汪秉宏感谢香港中文大学物理系和香港浸会大学非线性研究中心所提供的合作研究资助．许伯铭感谢香港政府研究基金（H-RGC-CUHK 4191/97P）的资助．胡斑比感谢香港政府研究基金（RGC）及香港浸会大学研究基金（FRG）的资助．

[1] S. Wolfram, Theory and Application of Cellular Automata (World Scientific, Singapore:1986).

[2] N. H. Gartner, N. H. M. Wilson, Transportation and Traffic Theory (Elsevier, New York, 1987).

[3] O. Biham, A. A. Middleton, D. Levine, *Phys. Rev.*, **A46** (1992), R6124.

[4] B. H. Wang, Y. F. Woo, P. M. Hui, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **29** (1996), L31.

[5] B. H. Wang, Y. F. Woo, P. M. Hui, *J. Phys. Soc. Japan*, **65** (1996), 2345.

[6] K. Nagel, M. Schreckenberg, *J. Phys. I, France*, **2** (1992), 2221.

[7] M. Schreckenberg, A. Schadschneider, K. Nagel, N. Ito, *Phys. Rev.*, **E51** (1995), 2939.

[8] D. E. Wolf, M. Schreckenberg, A. Bachem (eds.) Traffic Flow and Granular Flow (World Scientific, Singapore, 1996).

[9] A. Schadschneider, Proceedings of the Conference "Traffic and Granular Flow '97", (Duisburg, Germany, October, 5—8, 1997).

[10] A. Schadschneider, M. Schreckenberg, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30** (1997), L69; **31** (1998), L225.

[11] M. Fukui, Y. Ishibashi, *J. Phys. Soc. Japan*, **65** (1996), 1868.

[12] B. H. Wang, P. M. Hui, G. Q. Gu, *Chin. Phys. Lett.*, **14** (1997), 202.

[13] B. H. Wang, P. M. Hui, *J. Phys. Soc. Japan*, **66** (1997), 1238.

[14] B. H. Wang, Y. R. Kwong, P. M. Hiu, *Phys. Rev.*, **E57** (1998), 2568.

[15] B. H. Wang, Y. R. Kwong, P. M. Hiu, *Physica*, **A254** (1998), 122.

[16] Bing-hong Wang *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **47** (1998), 906 (in Chinese) [汪秉宏等，物理学报，**47** (1998), 906].

[17] Bing-hong Wang *et al.*, *Journal of Nonlinear Dynamics in Science and Technology*, **4** (1997), 374 (in Chinese) [汪秉宏等，非线性动力学学报，4 (1997), 374].

[18] B. H. Wang, Y. R. Kwong, P. M. Hui, B. Hu, *Physical Review*, **E60** (1999), 149.

[19] L. Wang, B. H. Wang, P. M. Hui, *Acta Physica Sinica (Overseas Edition)*, **6** (1997), 829.

[20] B. H. Wang, L. Wang, P. M. Hiu, *J. Phys. Soc. Japan*, **66** (1997), 3683.

[21] B. H. Wang, L. Wang, P. M. Hui, B. Hu, *Phys. Rev.*, **E58** (1998), 2876.

[22] B. H. Wang, L. Wang, P. M. Hui, B. Hu, Statistical mechanical approach to phase transition in traffic flow model, T0791; PO02/146, Topic:12, Short Communication; B. H. Wang, P. M. Hui, B. Hu, Exact analytical statistical mean field equation for the traffic flow models of high speed car with random delay, T0791; PO02/146, "STATPHYS 20" The 20th IUPAP International Conference on Statistical Physics, Book of Abstracts, A Gervois, M Gingold, D Iagolnitzer, ed. (Paris, July 20－24, 1998).

[23] Bing-hong Wang, *et al.*, *Journal of Applied Sciences*, **17** (1999), 142 (in Chinese) [汪秉宏等，应用科学学报，**17** (1999), 142].

[24] Lei Wang, Bing-hong Wang, *Acta Physica Sinica*, **48** (1999), 808 (in Chinese) [王雷，汪秉宏，物理学报，**48** (1999), 808].

[25] B. H. Wang, L. Wang, P. M. Hui, B. Hu: Steady state traffic flow in a model with gradual acceleration and stochastic delay, The 5th International Conference on Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media, PB07 (Hong Kong, June, 1999).

[26] B. H. Wang, L. Wang, P. M. Hui, B. Hu, *Physica*, **B279** (2000), 287.

THE GRADUAL ACCELERATING TRAFFIC FLOW GELLULAR AUTOMATON MODEL IN WHICH ONLY HIGH SPEED CAR CAN BE DELAYED*

WANG BING-HONG[1)] WANG LEI[1)] HUI PAK-MING[2)] HU BAMBI[3)]

[1)] (*Department of Modern Physics, Fire Science National Key Laboratory, and Nonlinear Science Center, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*)

[2)] (*Department of Physics, Chinese University of Hong Kong, Shatin, New Territories, Hong Kong, China*)

[3)] (*Department of Physics and Centerfor Nonlinear Studies, Hong Kong Baptist University, Kowloon, Hong Kong, China*)

(Received 10 March 2000)

ABSTRACT

A new traffic flow cellular automaton (CA) model situated between Nagel-Schreckenberg (NS) type and Fukui-Ishibashi (FI) type is defined and studied. This new model adopes the gradual acceleration scenario for all cars as NS model and the stochastic delay scenario for only the car with speed limit as FI model. It is proved that the fundamental diagram of the average traffic flow speed as the function of the car density for the new model is exactly the same as for FI model. This means that if the acceleration scenario of the FI traffic flow model in which a car may increase in velocity rapidly from zero to the velocity limit M or the maximum velocity permitted by empty spacing ahead, is changed to a gradual way in which the velocity of a car may increase by only one unit at most in one time step, the asymptotic steady state behavior of traffic flow will not be changed by interaction between cars and the self-organization evolution of the traffic flow.

Keywords: Traffic flow, Cellular automaton model, Fundamental diagram of phase transition, Nagel-Schreckenberg model, Fukui-Ishibashi model

PACC: 0550, 0520, 6470

* Project supported by the Special Funds for Major State Basic Research Projects in China and the National Basic Research Climbing-Up Project "Nonlinear Science" and by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 19932020, 19974039, 59876039).