

# 间隙线性反馈控制混沌\*

李国辉<sup>1)</sup> 周世平<sup>2)</sup> 徐得名<sup>1)</sup> 赖建文<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> (上海大学通信与信息工程学院, 上海 201800)

<sup>2)</sup> (上海大学理学院, 上海 201800)

(2000 年 4 月 14 日收到, 2000 年 6 月 4 日收到修改稿)

提出了两种控制混沌的线性间隙反馈方法. 该方法由控制相和非控制相组成, 通过选取合适的反馈系数和控制相时间, 可以获得各种不同的所需稳定的周期轨道. 分别对一维的声光双稳系统和二维的类 Henon 吸引子进行计算机模拟, 表明该方法可以使既定的系统按照给定的周期轨道演化, 并且是大范围可控的.

关键词: 间隙线性反馈, 混沌, 类 Henon 映射, Lyapunov 指数

PACC: 0545, 0547

## 1 引 言

控制混沌是近年来非线性动力学中引人注目的研究热点之一. 自从 Ott, Grebogi 和 Yorke 提出的 OGY 法<sup>[1]</sup>以来, 混沌控制的方法及其实验的研究迅速得以发展. 对混沌的控制方法有许多, 如 PPSV 法<sup>[2,3]</sup>、自适应控制法<sup>[4]</sup>. 对混沌的控制目标有两种: 一种是由于混沌吸引子内存在无穷多的周期轨道, 通过对混沌系统的参数进行微扰, 不改变原有的周期轨道, 使其中不稳定的轨道得到稳定; 另一种便是通过可能的途径, 如对系统变量实施反馈和微扰, 有效控制得到所需轨道.

自适应控制法在控制过程中需要不断地改变系统参数. OGY 法是基于在所预期的不动点附近的线性近似, 所以在远离不动点的微扰无法实现, 而且对系统进行连续的控制需要的代价太高, 在实际的系统中如电路、化学反应等混沌控制中, 有时并不需要而且也不可能连续地对混沌进行控制. 本文在文献<sup>[5]</sup>的基础上提出了两种间隙线性反馈方法, 并对两种离散情况下的混沌系统进行了控制. 该方法简单易行, 适当地选取反馈系数和间隙比, 通过模拟, 发现用该方法得到的不仅仅是局限于  $2^n P$ ,  $2^n \cdot 3^n P$  的周期轨道, 而是周期与它们互为质数.

## 2 间隙线性反馈控制原理

本文的间隙线性反馈方法可以简单地概述如下:

设系统的动力学方程为

$$X_n = f(X_{n-1}, \mu), \quad (1)$$

其中  $X_n$  为系统的状态量,  $\mu$  为参数, 并假设  $\mu$  的取值使得(1)式处于混沌态. 对由(1)式决定的系统进行间隙线性反馈, 从第  $n$  次开始, 每隔  $N$  次, 将正比于系统输出反馈到(1)式, 得到

$$X_n = \begin{cases} f(X_{n-1}, \mu), & n \neq jN, \\ f((1+k) \cdot X_{n-1}, \mu), & n = jN, \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2a)$$

(2a)式的轨迹是以指数速率发散的, 称之为非控制相. (2b)式以指数速率收敛, 称为控制相. 只要使得在控制相的收敛足以抵消或抑制在非控制相的发散, 就可能实现由(2)式所决定的系统趋向于预期的周期. (2)式中有两个控制参量, 即反馈系数  $k$  和间隙反馈间隔  $N$ , 适当地选取两者之值, 可以使得由(1)式中的混沌到各种稳定的周期态. 正的 Lyapunov 指数是非线性系统具有混沌的本质特征, 按照(2)式之所以能够获得预期的目标是由于引入(2b)式中的线性反馈后, 其最大 Lyapunov 指数由正值变成了负值, 因此非线性系统由混沌态转变为周期或拟周期态.

\* 国家自然科学基金(批准号 69871016)资助的课题.

将这种方法稍作变化, 设以时间数 100 作为一个周期, 并在  $t$  时间段系统按照 (2b) 式演化, 而在  $(100 - t)$  时间段按方程 (2a) 发展, 控制相和非控制相按照控制相、非控制相、控制相……交替地发展, 适当地选取  $k$  和  $t$ , 同样可以获得预期的稳定的周期轨道. 以下将采用这两种方法分别对一维声光双稳系统和二维类 Henon 映射进行控制.

### 3 控制模拟结果

#### 3.1 一维声光双稳系统混沌控制

声光双稳系统可以导致混沌现象的出现, 对其动力学性质已经得到了充分的研究<sup>[6]</sup>, 它的动力学方程为

$$x_n = \pi [A - u \sin^2(x_{n-1} - x_b)], \quad (3)$$

其中  $A = 3.0$ ,  $u = 1.5$ , 计算得到它的 Lyapunov 指数为 1.023, 表明此时系统有混沌解. 对 (3) 式按照前面的间隙线性反馈进行控制, 其结果如图 1 至图 5 所示, 分别得到了  $4P$ ,  $6P$ ,  $10P$ ,  $12P$ ,  $132P$  的周

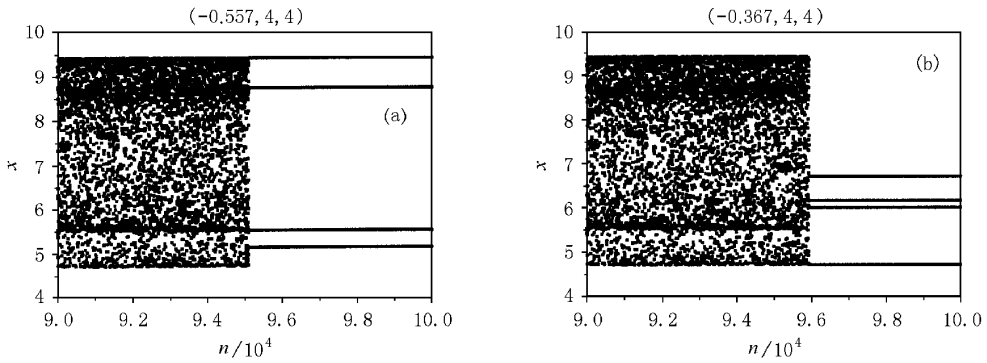


图 1 稳定  $4P$   $k = -0.557$  或  $-0.367$ ,  $N = 4$

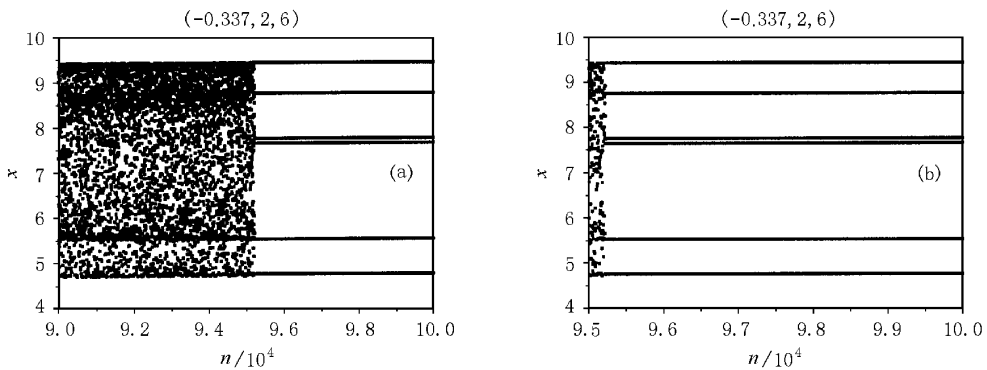


图 2 稳定  $6P$   $k = -0.337$ ,  $N = 2$

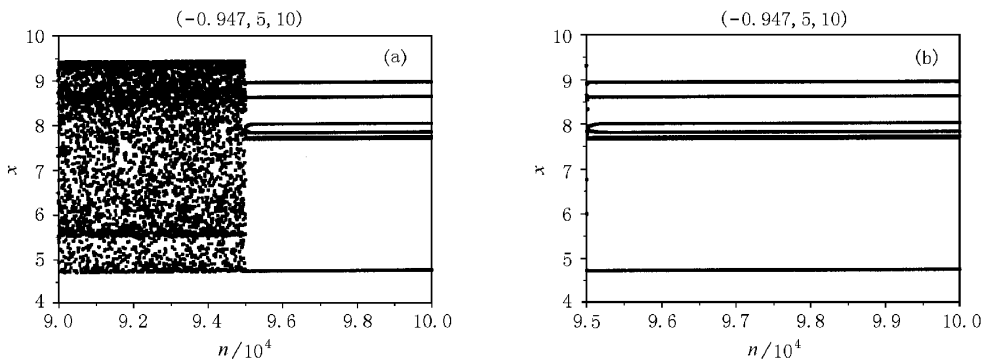


图 3 稳定  $10P$   $k = -0.947$ ,  $N = 5$

期轨道, 从 90000 次到 95000 次叠代时, 不加控制, 从 95000 次到 100000 次之间的叠代过程用间隙线性反馈控制. 为简便起见, 将反馈系数  $k$ 、反馈间隔  $N$  和周期  $P$  以坐标  $(k, N, P)$  的形式表示. 从各图可看出它们到达稳定的周期所需的时间是不一样的. 图 1 中  $k = -0.367, N = 4$  到达稳定的  $4P$  所需时间最长. 图 4 和图 5 分别为  $12P$  和  $132P$  的频谱图. 计算此时最大 Lyapunov 指数均为负值, 表明为准周期或周期态. 图 6 为计算得到的最大 Lyapunov 指数与反馈系数  $k$ 、反馈间隔  $N$  的关系图.

实际上, 对某些  $k, N$  的组合可以得到许多不同周期轨道, 表 1 为所得的控制结果.

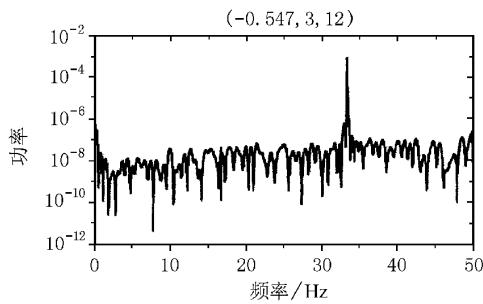


图 4 稳定  $12P$   $k = -0.547, N = 3$

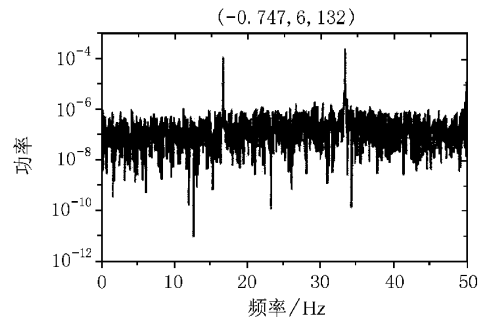


图 5 稳定  $132P$   $k = -0.747, N = 6$

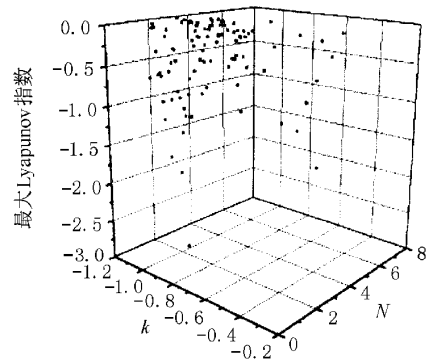


图 6 声光双稳系统最大 Lyapunov 指数与反馈系数  $k$ 、反馈间隔  $N$  的关系

表 1 声光双稳系统反馈系数  $k$ 、反馈间隔  $N$  与周期  $P$  及 Lyapunov 指数关系

$k$	$N$	$P$	Lyapunov 指数	$k$	$N$	$P$	Lyapunov 指数	$k$	$N$	$P$	Lyapunov 指数
-0.317	2	2	-0.0438	-0.927	3	6	-0.207	-0.957	7	14	-0.0446
-0.337	3	3	-0.371	-1.002	7	7	-0.1029	-0.997	5	15	-0.0056
-0.607	2	4	-0.5397	-0.977	4	8	-0.050	-0.105	3	61	-0.015
-0.977	5	5	-0.0462	-0.947	5	10	-0.0446	-0.747	6	132	-0.0125

按照第 2 种线性反馈方法, 同样可得到所需的稳定周期轨道, 图 7 为  $k = -0.257, t = 25$  时的  $44P$  频谱图. 图 8 为  $k = 0.257$  时, 不同  $t$  所得到的周期. 可见欲得到高周期的轨道, 时间应该小于 35,

控制相的时间越长(此时非控制相的时间越短), 相应得到的周期也就越小, 这一点也是符合混沌控制规律的.

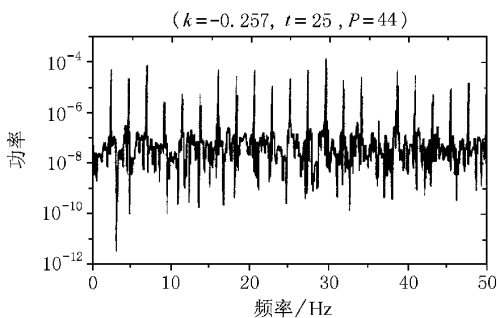


图 7 稳定  $44P$   $k = -0.257, t = 25$

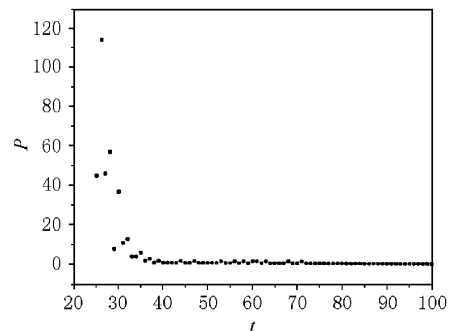


图 8 周期与时间  $t$  的关系  $k = -0.257$

### 3.2 类 Henon 吸引子的混沌控制

类 Henon 吸引子模型的动力学方程为

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} &= b \sin x_n. \end{aligned} \quad (4)$$

控制时的类 Henon 映射写成

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \begin{cases} 1 - ax_n^2 + y_n & \text{若 } n \neq jN, \\ 1 - a[(1+k)x_n]^2 + (1+k)y_n & \text{若 } n = jN, \end{cases} \\ y_{n+1} &= \begin{cases} b \sin x_n & \text{若 } n \neq jN \\ b \sin[(1+k)x_n] & \text{若 } n = jN, \end{cases} \\ j &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

取  $a = 1.4, b = 0.3$  (4) 式的最大 Lyapunov 指数为 0.335, 表示其为混沌解, 其中 90000 次到 95000 次叠代不加控制, 从 95000 到 100000 次之间的叠代过程用间隙线性反馈控制. 图 9 和图 10 分别为稳定  $5P$  和  $14P$  的情况. 图 11 为反馈控制系数、反馈间隔和周期三者的关系图. 按照第二种线性反馈方法得到的结果如图 12 所示. 图 13 为反馈系数  $k = -1.2$  时, 得到  $7P, 13P, 14P, 19P$ , 可见周期并不局

限于  $2^n P, 2^n \cdot 3^m P$ . 图 14 为类 Henon 最大 Lyapunov 指数与反馈系数及反馈间隔的关系, 所有的最大 Lyapunov 指数小于零. 同样, 对某些  $k, N$  的组合可以得到许多不同周期轨道, 表 2 为所得的控制结果.

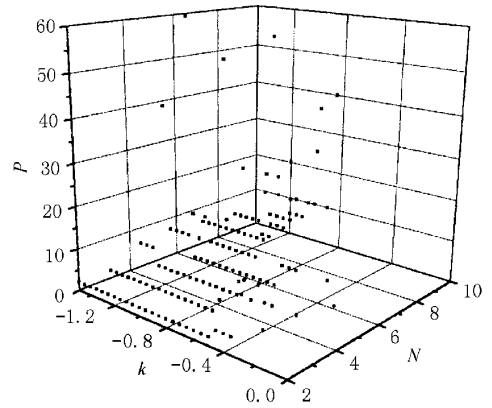


图 11 反馈系数  $k$ 、反馈间隔  $N$  和周期  $P$  的关系图

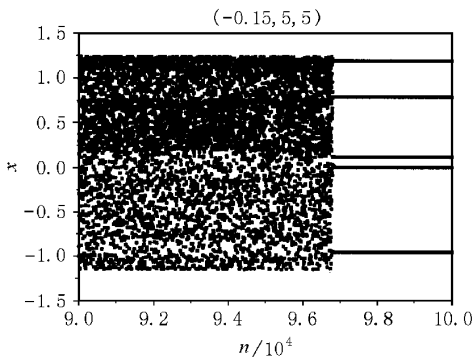


图 9 稳定  $5P, k = -0.15, N = 5$

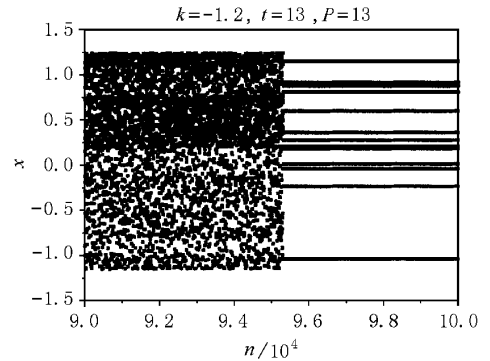


图 12 稳定  $13P, k = -1.2, t = 13$

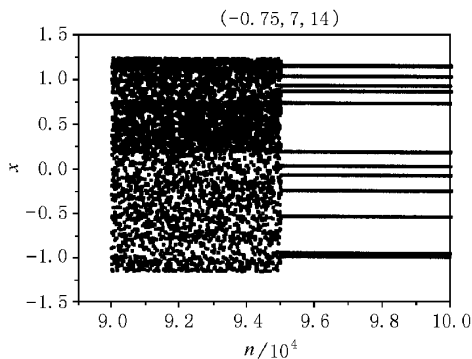


图 10 稳定  $14P, k = -0.75, N = 7$

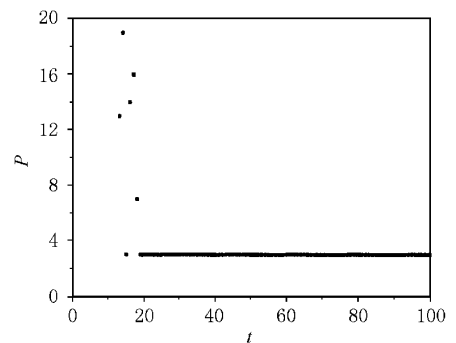


图 13 周期  $P$  与时间  $t$  的关系  $k = -1.2$

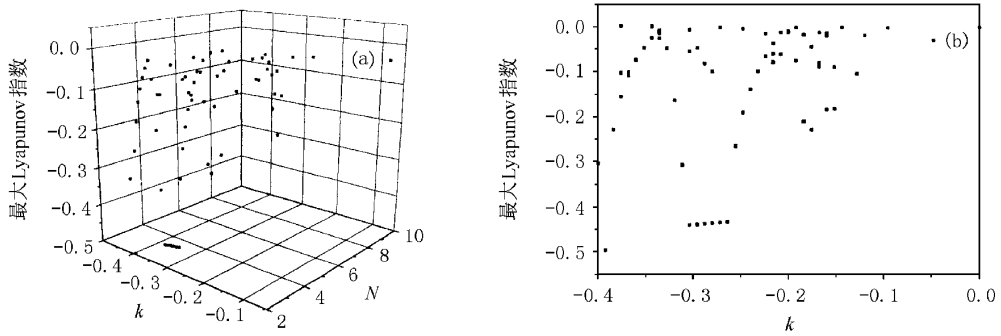


图 14 类 Henon 最大 Lyapunov 指数与反馈系数  $k$ 、反馈间隔  $N$  的关系图

表 2 类 Henon 映射反馈系数  $k$ 、反馈间隔  $N$  与周期  $P$  及 Lyapunov 指数关系

$k$	$N$	$P$	Lyapunov 指数	$k$	$N$	$P$	Lyapunov 指数	$k$	$N$	$P$	Lyapunov 指数
-0.128	4	4	-0.109	-0.16	7	14	-0.02	-0.54	7	21	-0.028
-0.152	5	5	-0.086	-0.304	5	15	-0.011	-0.375	7	28	-0.019
-0.20	5	10	-0.009	-0.63	8	16	-0.11	-0.096	3	72	-0.004

## 4 结 论

本文所用的间隙线性反馈法及模拟结果表明, 用该方法能够有效地对离散非线性系统中的混沌进行控制, 得到不同的稳定的周期轨道. 它克服了 OGY 法“需在预期的不动点附近作线性近似, 而在远离不动点的微扰无法实现”这一缺点; 同时, 它也不需要连续地对系统进行控制, 大大降低了成本, 该

方法简单切实可行.

[1] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 1196.  
 [2] M. A. Matias, J. Guemez, *Phys. Rev. Lett.*, **72**(1994), 1455.  
 [3] Z. Liu, S. Chen, *Phys. Lett.*, **A232**(1997), 55.  
 [4] M. D. Bernardo, *Phys. Lett.*, **A214**(1996), 139.  
 [5] J. Guemez, M. A. Matias, *Phys. Lett.*, **A181**(1993), 29.  
 [6] T. K. Lim, K. Kwak, M. J. Yun, *Phys. Lett.*, **A240**(1998), 289.

# AN OCCASIONAL LINEAR FEEDBACK APPROACH TO CONTROL CHAOS\*

LI GUO-HUI<sup>1)</sup> ZHOU SHI-PING<sup>2)</sup> XU DE-MING<sup>1)</sup> LAI JIAN-WEN<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>*(School of Communication and Information Engineering, Shanghai University, Shanghai 201800, China)*

<sup>2)</sup>*(School of Science, Shanghai University, Shanghai 201800, China)*

(Received 14 April 2000 ; revised manuscript received 4 June 2000)

## ABSTRACT

This paper proposes an approach to control chaos based on occasional linear feedback. This scheme is composed of control and non-control phases. The different stable periodic orbits are obtained by adjusting the feedback coefficients and the time duration which the control phase occupies. We also simulate acousto-optic bistable model and Henon-like attractor. The results from the numerical simulation show that the method can switch effectively the system to the desired periodic orbits.

**Keywords** : occasional linear feedback , chaos , Henon-like mapping , Lyapunov exponent

**PACC** : 0545 , 0547

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 69871016 ).