第 49 卷 第 11 期 2000 年 11 月
1000-3290/2000/49(11)/2146-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 11, November, 2000

单模量子场作用下二能级原子能级的 AC Stark 移动*

邢爱堂†
(山东工业大学电子工程系,济南 250061)
黄湘友
(北京大学物理系,北京 100871)
董太乾
(北京大学电子学系,北京 100871)
(2000 年 5 月 13 日收到)

通过分析跃迁概率幅的相位给出了与时间相关的微扰在跃迁过程中引起的能级移动公式,计算了处在不同量子态的单模场引起的二能级原子能级的 AC Stark 移动,结果表明场的量子统计特性会直接影响到原子能级移动.

关键词:AC Stark 效应,单模量子场,二能级原子
PACC:3260S

1 引 言

AC Stark 效应是指交变电场与原子或分子发生相互作用时,在引起跃迁的同时使参与跃迁的能级发生移动的现象[1].与 Stark 效应不同的是能级的 AC Stark 移动不仅与电场的场强有关,还与电场的频率有关.实验表明[2—8]:保持场强不变,能级移动随外场频率变化呈色散线型,而若使外场频率为一定值,逐渐增加光强,能级移动开始呈线性增长,但逐渐会偏离这一线性关系,呈现出非线性增长的趋势,并最终趋于一常数.

为了解释 AC Strark 效应中能级移动的特点,早在 1967 年 Happer 就提出了一种等效算符理论[9],但这种理论虽然能解释能级移动的色散特点和在弱场条件下能级移动与光强呈现出的线性关系,但不能解释最近在实验上观察到的能级移动的饱和性[6,7].最近在文献[10]中提出了一计算 AC Stark 效应中能级移动的方法,并讨论了经典电场作用下能级的 AC Stark 移动,计算结果解释了实验中所观察到的能级移动的所有特点,本文用这一方法研究了处在不同量子态的单模场引起的能级 AC Stark 移动.

2 跃迁概率幅的相位分析

AC Stark 效应实质是在跃迁过程中微扰引起的能级移动.考虑一任意量子系统,假设其哈密顿量为$\hat{H}(t)=\hat{H}_0+\hat{V}(t)$,$\hat{H}_0$ 不显含时间,微扰 $\hat{V}(t)$ 是在 $t>0$ 时刻加上去的,则在任意时刻系统的状态波函数$|\Psi(t)\rangle$可用$\hat{H}_0$ 的定态波函数展开为

$$|\Psi(t)\rangle=\sum_n a_n(t)|\varphi_n\rangle\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n t\right), \quad (1)$$

其中 E_n 和$|\varphi_n\rangle$分别为$\hat{H}_0$ 的能量本征态和本征值,$|\Psi(t)\rangle$满足薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial|\Psi(t)\rangle}{\partial t}=\hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle. \quad (2)$$

若在任意时刻微扰使能级 E_n 移动了 $\delta E_n(t)$,则(1)式变为

$$|\Psi(t)\rangle=\sum_n a_n(t)|\varphi_n\rangle\cdot\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t[E_n+\delta E_n(t')]\mathrm{d}t'\right\}, \quad (3)$$

* 国家自然科学基金(批准号:19674005)资助的课题.
†E-mail:xing-at@263.net

其中 $\delta E_n(t)$ 为实数. 令

$$a_n'(t) = a_n(t)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t \delta E_n(t')\mathrm{d}t'\right], \quad (4)$$

则(3)式变为

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n a_n'(t)|\varphi_n\rangle\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n t\right). \quad (5)$$

注意到(1)和(5)式在形式上相同,而且都满足薛定谔方程. 在给定初始条件下,系统在任意时刻的状态波函数是完全确定的,且是唯一的,即 $a'_n(t) = a_n(t)$. 这意味着通过分析跃迁概率幅的相位就可以得到能级移动值. 将(1)式中的跃迁概率幅表示为

$$\begin{aligned} a_n(t) &= |a_n(t)|\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t \delta E_n(t')\mathrm{d}t'\right] \\ &= |a_n(t)|\exp(-\mathrm{i}\beta_n), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\beta_n = \frac{1}{\hbar}\int_0^t \delta E_n(t')\mathrm{d}t'$ 为实数.

将(6)式代入(2)式,可以得到 $\beta_n(t)$ 满足的方程[10]

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_n(t) = &\frac{1}{\hbar}V_{nn}(t) + \left\{\frac{1}{\hbar}\sum_m^{m\neq n}\frac{|a_m(t)|}{|a_n(t)|}V_{nm}(t)\right. \\ &\cdot\exp\{[\beta_n(t) - \beta_m(t)]\} \\ &\left.\cdot\exp[-\mathrm{i}\omega_{mn}t]\right\} - \mathrm{i}\frac{|\dot{a}_n(t)|}{|a_n(t)|}. \end{aligned} \quad (7)$$

假定系统初始处在态 $|\varphi_n\rangle$,并利用 β_n 为实数这一条件,由(7)式可以得到

$$\beta_n(t) = \frac{1}{\hbar}\int_0^t \mathrm{Re}\Delta E(t')\mathrm{d}t', \quad (8a)$$

$$\Delta E = V_{nn}(t) + \sum_m^{m\neq n}\frac{a_m(t)}{a_n(t)}V_{nm}(t)\exp(-\mathrm{i}\omega_{mn}t), \quad (8b)$$

其中

$$V_{nm}(t) = \langle\varphi_n|\hat{V}(t)|\varphi_m\rangle, \omega_{mn} = \frac{1}{\hbar}(E_m - E_n).$$

由(8)和(6)式可以得到在跃迁过程中微扰引起的能级移动值为

$$\begin{aligned} \delta E_n &= \hbar\frac{\mathrm{d}\beta_n(t)}{\mathrm{d}t} = V_{nn}(t) \\ &+ \mathrm{Re}\left[\sum_m^{m\neq n}\frac{a_m(t)}{a_n(t)}V_{nm}(t)\exp(-\mathrm{i}\omega_{mn}t)\right] \\ &= \frac{\langle\Psi(t)|\hat{V}(t)|\Psi(t)\rangle}{|a_n(t)|^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

3　能级 AC Stark 移动

单模场与二能级原子相互作用时,相互作用算符 $\hat{H}_{in}$ 可视为微扰算符

$$\hat{V}(t) = \hat{H}_{in} = \hbar f(\hat{a}^+\hat{\sigma} + \hat{a}\hat{\sigma}_+), \quad (10a)$$

其中耦合常数 f 为

$$f = \mathrm{i}(\omega_0 d/\hbar)(2\pi\hbar/\omega V)^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}_d, \quad (10b)$$

$$\hat{\sigma}_+ = (\hat{\sigma})^* = \hat{\sigma}_1 + \mathrm{i}\hat{\sigma}_2, \quad (10c)$$

其中 d, $\boldsymbol{u}_d$ 分别为原子电偶极矢量的模和单位矢量, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为电场偏振矢量的单位矢量, V 为量子化体积, ω 为场频率, $\omega_0 = \frac{1}{\hbar}(E_2 - E_1)$ 为原子两能级之间的中心频率, $\hat{\sigma}_i(i=1,2)$ 为泡利矩阵算符.

假定场和原子整个系统初始处在态 $|\Psi_T(0)\rangle = |1,n\rangle = |1\rangle|n\rangle$,则算符 $\hat{\sigma}_3$ 的期望值为[11]

$$\langle\Psi_T(0)|\hat{\sigma}_3(t)|\Psi_T(0)\rangle = -1 + 2\sin^2\frac{1}{2}\Omega_R t\sin^2\phi_n, \quad (11a)$$

其中各量分别为

$$\Omega_R = \left[(\omega - \omega_0) + 4|f|^2\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^2, \quad (11b)$$

$$\cos\phi_n = (\omega - \omega_0)/\Omega_R, \quad (11c)$$

$$\tan\phi_n = \left[2|f|\left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2}\right]/(\omega - \omega_0). \quad (11d)$$

算符 $\hat{\sigma}_+$ 和 $\hat{\sigma}$ 的期望值可以在薛定谔图像给出,假定初始处在原子两个能态 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 的光子数分别为 n 和 $n-1$,则在任意时刻系统的状态可以用下面的波函数描述:

$$|\Psi(t)\rangle = a_{2,n-1}(t)|2,n-1\rangle + a_{1,n}(t)|1,n\rangle.$$

由此式及其归一性可以得到下面的关系:

$$|a_{1,n}(t)|^2 + |a_{2,n-1}(t)|^2 = 1, \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \langle\hat{\sigma}_1(t)\rangle_{\mathrm{H}} \\ &= \langle\Psi(t)|\hat{\sigma}_1|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} \\ &= a_{1,n}^* a_{2,n-1} + a_{1,n}a_{2,n-1}^*, \end{aligned} \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} s_2(t) &= \langle\hat{\sigma}_2(t)\rangle_{\mathrm{H}} \\ &= \langle\Psi(t)|\hat{\sigma}_2|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} \\ &= -\mathrm{i}(a_{1,n}^* a_{2,n-1}^* + a_{1,n}a_{2,n-1}^*), \end{aligned} \quad (12c)$$

$$\begin{aligned} w(t) &= \langle\hat{\sigma}_3(t)\rangle_{\mathrm{H}} \\ &= \langle\Psi(t)|\hat{\sigma}_3|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} \\ &= |a_{2,n-1}|^2 - |a_{1,n}|^2, \end{aligned} \quad (12d)$$

$$\langle\hat{\sigma}_+\rangle_{\mathrm{H}} = \langle\hat{\sigma}^*\rangle_{\mathrm{H}} = s_1(t) + \mathrm{i}s_2(t), \quad (12e)$$

其中下标 S 和 H 分别表示薛定谔图像和海森堡图像，* 表示复共轭. $a_{2,n-1}(t)$ 和 $a_{1,n}(t)$ 可以精确给出[12]

$$a_{2,n-1}(t)=\exp\left[-\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t\right]\times\{-[\cos^2(\phi_n/2)\exp[-\mathrm{i}\Omega_R t/2]+\sin^2(\phi_n/2)\exp(\mathrm{i}\Omega_R t/2]a_{2,n-1}(0)-[2\mathrm{i}\sin(\Omega_R t/2)\cos(\phi_n/2)\times\sin(\phi_n/2)a_{1,n}(0)]\},\tag{13a}$$

$$a_{1,n}(t)=\exp\left[-\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t\right]\times\{[\cos^2(\phi_n/2)\exp(\mathrm{i}\Omega_R t/2)+\sin^2(\phi_n/2)\exp(-\mathrm{i}\Omega_R t/2)a_{1,n}(0)]-[2\mathrm{i}\sin(\Omega_R t/2)\cos(\phi_n/2)\times\sin(\phi_n/2)a_{2,n-1}(0)]\},\tag{13b}$$

其中 $a_{2,n-1}(0)$ 和 $a_{1,n}(0)$ 为两个概率幅的初始值.

由(9)和(12)式，可以得到处在粒子数态的单模场引起能级 E_i 移动值为

$$\delta E_i=\frac{2\mathrm{Re}\langle\Psi_T(0)|\hat{H}_{in}|\Psi_T(0)\rangle}{1\pm\langle\Psi_T(0)|\hat{\sigma}_3(t)|\Psi_T(0)\rangle}\quad(i=1,2),\tag{14}$$

其中上能级 $i=2$，取正号；下能级 $i=1$，取负号.

将(11)式代入(14)式，并利用(12)式，可以得到

$$\delta E_i=\frac{2\hbar|f|\sqrt{n+1/2}}{1\pm w(t)}\mathrm{Re}\langle\Psi_a(0)|\hat{\sigma}(t)|\Psi_a(0)\rangle_{\mathrm{H}}=\frac{2\hbar|f|\sqrt{n+1/2}}{1\pm w(t)}s_1(t),\tag{15}$$

这里利用了关系式 $|\Psi_T(0)\rangle=|\Psi_F(0)\rangle|\Psi_a(0)\rangle$，$|\Psi_F(0)\rangle$ 和 $|\Psi_a(0)\rangle$ 分别表示初始时场和原子所处的状态.

在初始条件 $a_{2,n-1}(0)=0$，$a_{1,n}(0)=1$ 下，由(13)和(12)式可以得到

$$s_1(t)=-\sin\phi_n\cos\phi_n\sin^2\frac{1}{2}\Omega_R t.\tag{16}$$

现在考虑场的任意一量子态 $|\tilde{\beta}\rangle$，并假定在粒子数表象中可以表示为

$$|\tilde{\beta}\rangle=\sum_n\bar{q}(n)|n\rangle,\tag{17}$$

则由(11)和(16)式可以直接得到在态 $|\tilde{\beta}\rangle$ 中算符 $\hat{\sigma}_3$ 的期望值和 $\hat{\sigma}_+$ 的期望值的实部为

$$s_1^{(\tilde{\beta})}(t)=\mathrm{Re}\langle\hat{\sigma}_+\rangle=-\sum_n[\bar{q}(n)]^2\sin\phi_n\cos\phi_n\sin^2\frac{1}{2}\Omega_R t,\tag{18a}$$

$$w^{(\tilde{\beta})}(t)=\langle\hat{\sigma}_3\rangle=\sum_n[\bar{q}(n)]^2\left[-1+2\sin^2\frac{1}{2}\Omega_R t\sin^2\phi_n\right],\tag{18b}$$

其中 $\tilde{p}=[\bar{q}(n)]^2$ 表示在 $|\tilde{\beta}\rangle$ 态中有 n 个光子的概率.

由(9)，(15)和(18)式可以得到处在态 $|\tilde{\beta}\rangle$ 的单模场引起的能级移动值为

$$\delta E_i^{(\tilde{\beta})}=\frac{2\hbar|f|\sqrt{n+1/2}}{1\pm w^{(\tilde{\beta})}(t)}s_1^{(\tilde{\beta})}(t),\tag{19}$$

其中 $i=2$，取正号，对应上能级；$i=1$，取负号，对应下能级.

下面将利用(19)式来计算处在不同量子态单模场引起的二能级原子的能级移动值.

3.1 粒子数态

将(11)和(16)式直接代入(15)式，就可以得到处在粒子数态的单模场引起的下能级 E_i 移动值为

$$\delta E_1(t)=4|f|^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega_R t\right)\times\frac{\omega-\omega_0}{(\omega-\omega_0)^2+4|f|^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\cos^2\frac{1}{2}\Omega_R t}.\tag{20a}$$

以同样的方式，可以求得原子初始态处在上能态时引起上能级 E_2 的移动值为

$$\delta E_2(t)=4|f|^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega_R t\right)\times\frac{\omega_0-\omega}{(\omega-\omega_0)^2+4|f|^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\cos^2\frac{1}{2}\Omega_R t}.\tag{20b}$$

3.2 相干态

相干态可在粒子数表象中表示为

$$|\alpha\rangle=\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_n\frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle.\tag{21}$$

由(21)和(19)式可以得到处在相干态的场引起的原子两个能级的移动值为

$$\delta E_1(t)=\frac{\omega-\omega_0}{2}\frac{\sum_n g(n,t)}{1-\sum_n g(n,t)},\tag{22a}$$

$$\delta E_2(t)=\frac{\omega_0-\omega}{2}\frac{\sum_n g(n,t)}{1-\sum_n g(n,t)},\tag{22b}$$

$$g(n,t)=\exp(-|\alpha|^2)\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\times\left[4|f|^2\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)\Big/\Omega_R^2\right]\times\sin^2\frac{1}{2}\Omega_R t. \tag{22c}$$

3.3 单模热光场

对单模热光场而言,若场模中的平均光子数为 $\bar{n}$,则场模中有 n 个光子的概率为

$$p(n)=\left(\frac{1}{\bar{n}+1}\right)\left(\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}\right)^n. \tag{23}$$

用与推导(22)式类似的方法,可以得到热光场引起的能级移动值,其结果为

$$\delta E_1(t)=\frac{\omega-\omega_0}{2}\frac{\sum_n g'(n,t)}{1-\sum_n g'(n,t)}, \tag{24a}$$

$$\delta E_2(t)=\frac{\omega_0-\omega}{2}\frac{\sum_n g'(n,t)}{1-\sum_n g'(n,t)}, \tag{24b}$$

$$g'(n,t)=\frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}}\left[4|f|^2\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)\Big/\Omega_R^2\right]\times\sin^2\frac{1}{2}\Omega_R t. \tag{24c}$$

4 能级移动的特点

4.1 粒子数态的场

从(20)式可以看出处在粒子数态的场引起的能级移动具有以下特点:(1)能级移动是一以 Rabi 频率为振荡频率的瞬态振荡过程;(2)两个能级移动具有对称性,即移动方向相反,但大小相等;(3)保持场模中的光子数不变时,能级移动随场模频率的变化呈现出标准的色散线型.若保持场模频率不变,增加场模中的光子数,能级移动会逐渐达到饱和.这与经典场通过 AC Stark 效应引起能级移动所具有的特点类似.实际上,若令

$$E_0^2/4=4|f|^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar/d^2,$$

则(20)式变为

$$\delta E_1(t)=-\delta E_2(t)=|2b|^2\hbar\sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega_R t\right)\times\frac{\omega-\omega_0}{(\omega-\omega_0)^2+|2b|^2\cos^2\frac{1}{2}\Omega_R t}, \tag{25a}$$

$$|2b|^2=\frac{|\langle 1|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{E}_0|2\rangle|^2}{4\hbar^2}. \tag{25b}$$

这恰好就是经典场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\cos\omega t$ 通过 AC Stark 效应引起的能级移动[10].

4.2 相干态的场和单模热光场

与处在粒子数态的场相比,处在相干态的场和单模热光场场模中的光子数有个概率分布,这一分布会直接影响到原子的能级移动.首先,表现在能级移动的瞬态行为上,由(22)式可以看出,当场处在相干态时,振荡幅度随场模中的平均光子数的增加呈现出一种衰减的趋势,平均光子数越大,衰减的程度也越大,这类似于一种弛豫过程.对热光场而言,从(24)式可以看出能级移动表现出类似的行为,只不过是衰减的程度和方式有所不同.其次,光子数分布会直接影响到能级移动规律,使能级移动随场频率的变化不再呈现简单的色散关系,随光子数的变化趋势也与粒子数态的不同,这主要是因为能级移动公式中直接包含了光子数的概率分布表达式.

5 结 束 语

通过前面的分析可以看出量子场的统计特性会直接影响到能级的移动行为,反过来看,就是处在不同量子态的场引起的能级移动中包含了场的统计信息.因而,可以从量子化场引起的能级移动中提取场的量子统计特性,这意味着可以直接通过 AC Stark 效应来研究场的统计特性,这为研究光场的量子统计性质提供了一种新的方法和途径.

[1] A. Kastler, *J. Opt. Soc. Am.*, **53**(1963), 902.
[2] G. Borghs *et al.*, *Phys. Rev.*, **A31**(1985), 1434.
[3] A. Morinaga *et al.*, *Phys. Rev.*, **A48**(1993), 1346.
[4] P. Tamarat *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **75**(1995), 1514.
[5] S. Appelt *et al.*, *Phys. Rev.*, **A59**(1999), 2078.
[6] F. Levi *et al.*, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **46**(1997), 126.
[7] X. Z. Chu, S. Q. Liu, T. Q. Dong, *Acta Physica Sinica* (*Overseas Edition*), **5**(1996), 6.
[8] G. M. Pierre, 8th ETFF (European Time and Frequency Frorum), Munich(D)(1994), p. 377.
[9] W. Happer, B. S. Mathur, *Phys. Rev.*, **63**(1967), 12.
[10] A. T. Xing, T. Q. Dong, X. Y. Huang, *Acta Sinica Quantum Optica*, **4**(1998), 99(in Chinese)[邢爱堂、董太乾、黄湘友,量子光学学报, **4**(1998), 99].
[11] P. L. Knight, P. W. Milonni, *Phys. Rep.*, **66**(1980), 22.

[12] G. C. Guo, Quantum Optics (Advanced Education Publishing House, Beijing, 1990), p. 468 (in Chinese) [郭光灿,量子光学(高等教育出版社,北京,1990),第 468 页].

AC-STARK SHIFT OF LEVEL IN TWO-LEVEL ATOM UNDER THE INTERACTION OF MONO-MODE QUANTIZED FIELD*

XING AI-TANG
(*Department of Electronics Engineering*, *Shandong University of Technology*, *Jinan* 250061, *China*)
HUANG XIANG-YOU
(*Department of Physics*, *Peking University*, *Beijing* 100871, *China*)
DONG TAI-QIAN
(*Department of Electronics*, *Peking University*, *Beijing* 100871, *China*)
(Received 13 May 2000)

ABSTRACT

By analyzing the phase of transition probability amplitude, a formula for level shift induced by the time-dependent perturbation of quantum transition is given. AC-Stark shifts of the levels in two-level atoms are calculated, which are induced by mono-mode quantized field. The calculated results indicate that the quantum statistic property can directly influence the atomic level shift.

Keywords: AC Stark effect, mono-mode quantized field, two-level atom
PACC: 3260S

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19674005).