

# 双模压缩真空场与耦合双原子相互作用系统中 光场的量子特性

黄春佳 周 明 厉江帆 孔凡志

(长沙电力学院物理与信息工程系,长沙 410077)  
(2000 年 5 月 7 日收到,2000 年 7 月 1 日收到修改稿)

研究了双模压缩真空场与耦合双原子系统中光场的压缩性质和相干性质. 讨论了光场的初始压缩因子、原子-场耦合常数及原子间偶极-偶极相互作用常数对光场量子特性的影响.

关键词:双模压缩真空场,耦合双原子系统,光场的非经典性质

PACC:4250

## 1 引 言

原子与光场的相互作用是近代量子光学中十分活跃的研究课题. 描述原子与光场相互作用系统的最典型的理论模型就是熟知的 Jaynes-Cummings (J-C) 模型<sup>[1]</sup>, 人们对这一模型及其推广做了大量的研究, 并揭示出它们各种各样的非经典性质, 如原子布居的周期崩塌与回复、原子算符的压缩、光场的压缩性质及非经典相关特性等<sup>[2-8]</sup>. 但 J-C 模型没有考虑原子间的相互作用, 因而无法揭示原子间相互作用对原子和光场的量子行为所产生的影响. 近年来, 描述两个全同的二能级原子与光场相互作用的 Tavis-Cummings (T-C) 模型<sup>[9]</sup>引起了人们广泛的兴趣. 研究表明, 原子间的相互作用对原子和光场的量子特性具有非常重要的影响<sup>[10-15]</sup>. 另一方面, 由于压缩光在光通信中具有重要的应用前景, 深入研究压缩光场与原子相互作用系统中光场的量子特性有实际意义. 众所周知, 压缩真空态反映了压缩态的本质属性. 因此, 本文将研究双模压缩真空场与有偶极-偶极相互作用的耦合双原子相互作用系统中光场的相干性质和压缩性质及其对光场的初始压缩因子、原子-场耦合常数及原子间偶极-偶极相互作用强度的依赖关系.

## 2 理论模型

在旋波近似下, 两个有偶极-偶极相互作用的二

能级原子与双模光场相互作用系统的哈密顿量为

$$H = H_0 + V, \quad (1)$$

式中

$$H_0 = \omega_0 \sum_{l=1}^2 S_3^{(l)} + \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2, \quad (2)$$

$$V = \epsilon \sum_{l=1}^2 (a_1^\dagger a_2^\dagger S_-^{(l)} + a_1 a_2 S_+^{(l)}) + \Omega (S_+^{(1)} S_-^{(2)} + S_-^{(1)} S_+^{(2)}), \quad (3)$$

(2) 和 (3) 式中  $a_i^\dagger$  和  $a_i$  分别为第  $i$  ( $i=1, 2$ ) 模光场的产生和湮没算符,  $S_3^{(l)}$  和  $S_\pm^{(l)}$  为第  $l$  ( $l=1, 2$ ) 个原子的赝自旋算符,  $\omega_i$  ( $i=1, 2$ ) 为光场频率,  $\omega_0$  为原子的本征跃迁频率,  $\epsilon$  为原子-光场耦合系数,  $\Omega$  为原子间偶极-偶极相互作用常数.

为简便起见, 只考虑共振情形, 即光场频率和原子本征跃迁频率之间满足  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$  的条件.

设初始时刻 ( $t=0$ ) 两个原子均处于激发态, 而光场处于双模压缩真空态, 即原子-光场耦合系统初始时刻的态矢可表示为

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |e, e, n, n\rangle, \quad f_n = (-e^{i\xi} \tanh r)^n / \cosh r, \quad (4)$$

式中  $r$  为表征光场压缩程度的压缩因子,  $\xi$  为压缩方向角, 为简便起见, 本文取  $\xi=0$ .

设  $t$  时刻系统状态演化为

$$|\psi^l(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t) |e, e, n, n\rangle + b_n(t) |g, g, n, n\rangle$$

$$\begin{aligned} & + c_n(t) | e \ g \ m \ m \\ & + d_n(t) | g \ e \ m \ m \rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

将(5)式代入薛定谔方程

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = V^I |\psi(t)\rangle, \quad (6)$$

可解得

$$\begin{aligned} a_n(t) = & f_n - (n+1)\beta_{n+1} \left\{ \exp\left(-i \frac{\Omega}{2} t\right) \right. \\ & \cdot \left[ \Omega \sin\left(\frac{\alpha_{n+1}}{2} t\right) - i \alpha_{n+1} \cos\left(\frac{\alpha_{n+1}}{2} t\right) \right] \\ & \left. + i \alpha_{n+1} \right\} \sqrt{2[(n+1)^2 + (n+2)^2] \epsilon^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} b_n(t) = & -n\beta_{n-1} \left\{ \exp\left(-i \frac{\Omega}{2} t\right) \left[ \Omega \sin\left(\frac{\alpha_{n-1}}{2} t\right) \right. \right. \\ & \left. \left. - i \alpha_{n-1} \cos\left(\frac{\alpha_{n-1}}{2} t\right) \right] \right. \\ & \left. + i \alpha_{n-1} \right\} \sqrt{2[(n-1)^2 + n^2] \epsilon^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$c_n(t) = d_n(t) = \beta_n \exp\left(-i \frac{\Omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\alpha_n}{2} t\right), \quad (9)$$

(7)–(9)式中

$$\begin{aligned} \alpha_n = & \{\Omega^2 + 8[n^2 + (n+1)^2] \epsilon^2\}^{1/2}, \\ \beta_n = & -2in\epsilon f_{n-1} / \alpha_n. \end{aligned} \quad (10)$$

将(7)–(10)式代入(5)式,即可得到系统态矢的时间演化式.

### 3 光场的压缩性质

为了讨论光场的压缩性质,定义光场的两个缓变的正交分量算符:

$$U_1 = \frac{1}{2^{3/2}} (a_1 e^{i\omega_1 t} + a_1^\dagger e^{-i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t} + a_2^\dagger e^{-i\omega_2 t}), \quad (11)$$

$$U_2 = \frac{1}{(2i)^{3/2}} (a_1 e^{i\omega_1 t} - a_1^\dagger e^{-i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t} - a_2^\dagger e^{-i\omega_2 t}). \quad (12)$$

容易证明,  $U_1, U_2$  满足下列对易关系:

$$[U_1, U_2] = \frac{i}{2}. \quad (13)$$

它们的均方涨落分别为

$$\begin{aligned} (\Delta U_1)^2 = & \frac{1}{4} (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 \\ & + a_1^\dagger a_2^\dagger e^{-i\omega_0 t} + a_1 a_2 e^{i\omega_0 t} + 1) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (\Delta U_2)^2 = & \frac{1}{4} (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 \\ & - a_1^\dagger a_2^\dagger e^{-i\omega_0 t} - a_1 a_2 e^{i\omega_0 t} + 1) \end{aligned} \quad (15)$$

(14)和(15)式中已经用到了共振条件  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ .

对于给定的状态,若光场  $U_i$  ( $i=1, 2$ )分量的涨落函数  $Q_i(t)$ 满足

$$Q_i(t) = (\Delta U_i)^2 - \frac{1}{4} < 0 \quad (i=1 \text{ 或 } 2), \quad (16)$$

则称光场的  $U_i$  ( $i=1, 2$ )分量被压缩.

系统处在由(5)式所描述的状态时,可以求得

$$\begin{aligned} a_1^\dagger a_1 = a_2^\dagger a_2 = & \sum_{n=0}^{\infty} n [ |a_n(t)|^2 + |b_n(t)|^2 \\ & + |c_n(t)|^2 + |d_n(t)|^2 ], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} a_1 a_2 e^{i\omega_0 t} = & a_1^\dagger a_2^\dagger e^{-i\omega_0 t} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \\ & \cdot [ a_{n+1}(t) a_n^*(t) + b_{n+1}(t) b_n^*(t) \\ & + c_{n+1}(t) c_n^*(t) + d_{n+1}(t) d_n^*(t) ]. \end{aligned} \quad (18)$$

由于  $Q_i$  ( $i=1, 2$ )的表达式较复杂,故借助于数值计算来揭示其时间演化特性.对  $Q_i(t)$ 所作的计算结果如图1所示.

从图1可以看出,在与原子相互作用过程中,光场的压缩随时间作不规则的振荡,其幅度与光场的初始压缩因子  $r$  和光场-原子耦合常数  $\epsilon$  有关.比较图1(a)和(b)可知,当  $r$  较小时,光场的压缩程度较浅,压缩时间较长,而当  $r$  较大时,光场的压缩程度较深,压缩时间较短;从图1(b)和(c)可以看出光场的压缩程度随  $\epsilon$  的减小而变浅;而图1(b)和(d)表明,原子偶极-偶极相互作用常数  $\Omega$  的大小对光场的压缩程度没有明显的影响.

### 4 光场的相干性质

#### 4.1 光子的聚束效应和反聚束效应

光场的二阶相干度定义为

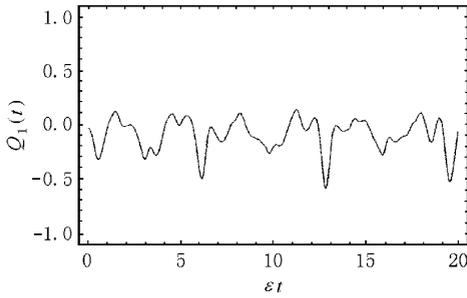
$$g_i^{(2)}(t) = \frac{a_i^{\dagger 2} a_i^2}{a_i^\dagger a_i} \quad (i=1, 2). \quad (19)$$

令

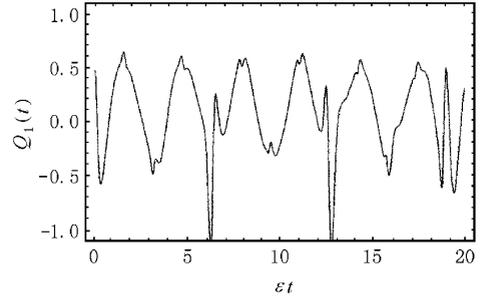
$$G_i(t) = g_i^{(2)}(t) - 1 \quad (i=1, 2), \quad (20)$$

若  $G_i(t)=0$ ,即  $g_i^{(2)}(t)=1$ ,则称光场是二阶相干的;若  $G_i(t)>0$ ,即  $g_i^{(2)}(t)>1$ ,则称光子呈现聚束效应,反之,若  $G_i(t)<0$ ,即  $g_i^{(2)}(t)<1$ ,则称光子呈现反聚束效应.

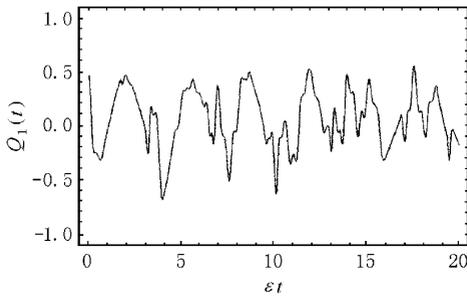
当系统处在由(5)式所描述的状态时,可以求得



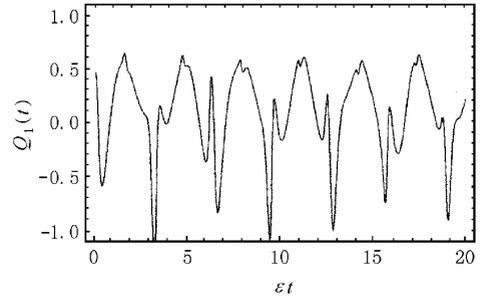
(a)  $r=0.5, \Delta\Omega=0.1, \varepsilon=0.1$



(b)  $r=1, \Delta\Omega=0.1, \varepsilon=0.1$



(c)  $r=1, \Delta\Omega=0.1, \varepsilon=0.01$



(d)  $r=1, \Delta\Omega=0.01, \varepsilon=0.1$

图 1  $Q_1(t)$  的时间演化规律

$$a_1^{+2} a_1^2 = a_2^{+2} a_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdot [ |a_n(t)|^2 + |b_n(t)|^2 + |c_n(t)|^2 + |d_n(t)|^2 ]. \quad (21)$$

根据 (17) (19)–(21) 式对  $G_1(t)$  作数值计算, 所得结果如图 2 所示. 可以看出, 光场的初始压缩因子  $r$  对光场的二阶相干度有明显的影 响, 当  $r$  较小时,  $G_1(t)$  的振荡较为剧烈, 光子的聚束效应和反聚束

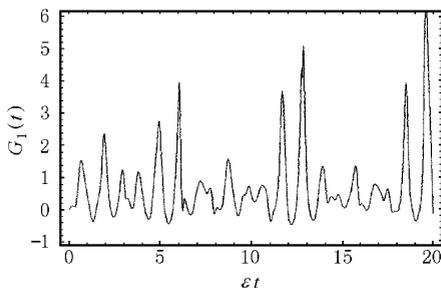
效应交替出现, 而当  $r$  较大时, 光子主要呈现聚束效应.

### 4.2 模间相关性

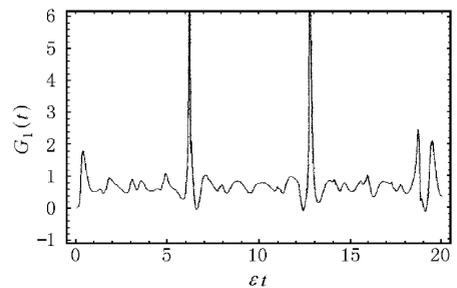
双模光场的模间相关度定义为

$$g_{12}^{(2)}(t) = \frac{a_1^+ a_2^+ a_1 a_2}{a_1^+ a_1 a_2^+ a_2}. \quad (22)$$

令



(a)  $r=0.5, \Delta\Omega=0.1, \varepsilon=0.1$



(b)  $r=1, \Delta\Omega=0.1, \varepsilon=0.1$

图 2  $G_1(t)$  的时间演化规律

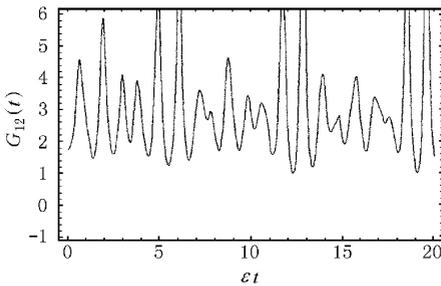
$$G_{12}(t) = g_{12}^2(t) - 1, \quad (23)$$

若  $G_{12}(t) > 0$ , 则光场两模间呈正相关; 反之, 若  $G_{12}(t) < 0$ , 则光场两模间呈负相关.

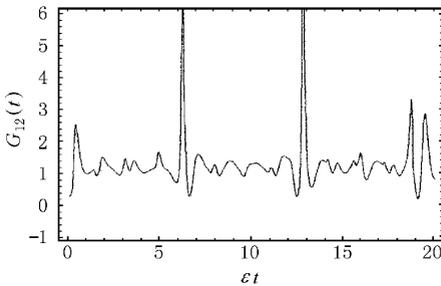
当系统处在由 (5) 式所描述的状态时, 可以求得

$$a_1^+ a_2^+ a_1 a_2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 [ |a_n(t)|^2 + |b_n(t)|^2 + |c_n(t)|^2 + |d_n(t)|^2 ]. \quad (24)$$

根据 (17) (22)–(24) 式对  $G_{12}(t)$  作数值计算, 所得结果如图 3 所示. 可以看出, 系统中光场的两模之间呈现正相关. 与光场的二阶相干度相似, 光场的初始压缩因子  $r$  对双模光场的模间相关性有明显的影响, 当  $r$  较小时, 模间相关的起伏较为剧烈, 平均相关较强, 而当  $r$  较大时, 平均相关较弱.



(a)  $r=0.5, \Omega=0.1, \epsilon=0.1$



(b)  $r=1, \Omega=0.1, \epsilon=0.1$

图 3  $G_{12}(t)$  的时间演化规律

### 4.3 Cauchy-Schwartz 不等式

对于双模光场, Cauchy-Schwartz 不等式表示为

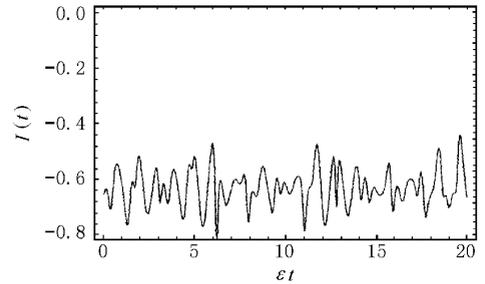
$$a_1^+ a_2^+ a_1 a_2 \leq a_1^{+2} a_1^2 a_2^{+2} a_2^2. \quad (25)$$

引入函数  $I(t)$ :

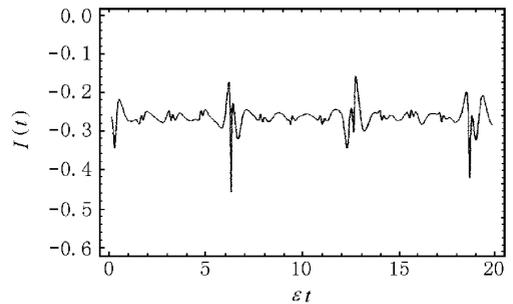
$$I(t) = \frac{(a_1^{+2} a_1^2 a_2^{+2} a_2^2)^{1/2}}{a_1^+ a_2^+ a_1 a_2} - 1, \quad (26)$$

若  $I(t) > 0$ , 则光场两模间的相关为经典相关; 反之, 若  $I(t) < 0$ , 则光场两模间的相关为非经典相关.

根据 (21) (24) (26) 式对  $I(t)$  作数值计算, 所得结果如图 4 所示. 可以看出, 在光场的初始压缩因子  $r$  不太大的情况下,  $I(t) < 0$ , 表明系统中光场的两模之间的相关是一种非经典相关, 且光场的初始压缩因子  $r$  对双模光场的模间相关的非经典程度有明显的影响. 比较图 4(a) 和 (b) 可知, 当  $r$  较小时, 模间相关的非经典程度的起伏较为剧烈, 其平均非经典程度较深, 而当  $r$  较大时, 其平均非经典程度则较浅.



(a)  $r=0.5, \Omega=0.1, \epsilon=0.1$



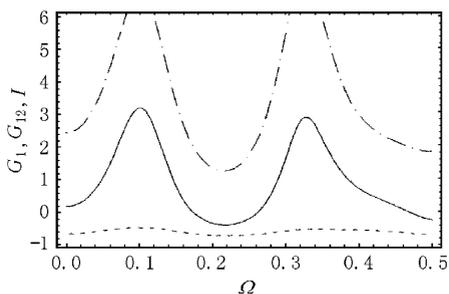
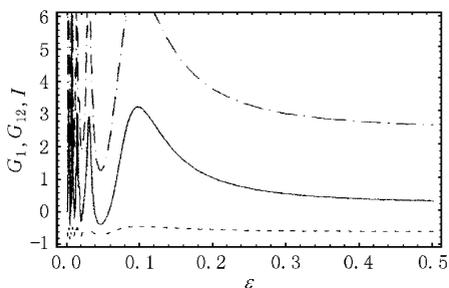
(b)  $r=1, \Omega=0.1, \epsilon=0.1$

图 4  $I(t)$  的时间演化规律

计算结果还表明, 系统中光场的相干性质不仅与光场的初始压缩因子  $r$  有关, 而且还受光场-原子耦合常数  $\epsilon$  和原子偶极-偶极相互作用常数  $\Omega$  的影响, 如图 5 所示. 不难看出,  $G_{11}(t)$  和  $G_{12}(t)$  随  $\Omega$  和  $\epsilon$  的变化较为明显, 而  $\Omega$  和  $\epsilon$  对  $I(t)$  的影响较小, 且  $\Omega$  和  $\epsilon$  的变化不改变双模光场模间相关的非经典性质.

## 5 结 论

应用全量子理论和数值计算方法, 研究了双模压缩真空场与有耦合双原子相互作用系统中光场的量子性质, 得到了如下结果:

(a)  $(G_1, G_{12}, I)-\Omega$  关系曲线(b)  $(G_1, G_{12}, I)-\epsilon$  关系曲线图 5  $G_1, G_{12}, I$  对  $\Omega, \epsilon$  的依赖关系( $r=0.5, \epsilon t=6$ )

——为  $G_1(\Omega, \epsilon)$  曲线, - - - 为  $G_{12}(\Omega, \epsilon)$  曲线,  
· · · 为  $I(\Omega, \epsilon)$  曲线

1. 系统中光场的压缩随时间作不规则的振荡,其幅度与光场的初始压缩因子  $r$  和光场-原子耦合常数  $\epsilon$  有关,而随原子偶极-偶极相互作用常数  $\Omega$  的变化很小,当  $r$  较小时,光场的压缩程度较浅,压缩时间较长,而当  $r$  较大时,光场的压缩程度较深,压缩时间较短。

2. 光场的初始压缩因子  $r$  对光场的二阶相干度有明显的影响。当  $r$  较小时,  $G_1(t)$  的振荡较为剧烈,光子的聚束效应和反聚束效应交替出现,而当  $r$  较大时,光子主要呈现聚束效应。

3. 系统中光场的两模之间呈现正相关,光场的初始压缩因子  $r$  对双模光场的模间相关性有明显的影响,当  $r$  较小时,模间相关的起伏较为剧烈,平均相关较强,而当  $r$  较大时,平均相关较弱。在光场的初始压缩因子  $r$  不太大的情况下,光场两模之间的相关是一种非经典相关。

4. 光场的相干性质不仅与  $r$  有关,而且还受光场-原子耦合常数  $\epsilon$  和原子偶极-偶极相互作用常数  $\Omega$  的影响,但  $\Omega$  和  $\epsilon$  的变化不改变双模光场模间相关的非经典性质。

- [1] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, *Proc. IEEE*, **51**(1963) 89.
- [2] Z. D. Liu, *Acta Physica Sinica*, **36**(1987), 1645 (in Chinese) [刘正东, *物理学报*, **36**(1987), 1645]
- [3] P. Zhou, J. S. Peng, *Acta Optica Sinica*, **10**(1990), 837 (in Chinese) [周鹏, 彭金生, *光学学报*, **10**(1990) 837]
- [4] W. K. Lai, V. Buzek, P. L. Knight, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 6043.
- [5] Z. F. Luo, Z. Z. Xu, L. Xu, *Acta Physica Sinica*, **41**(1992), 1950 (in Chinese) [罗振飞, 徐至展, 徐磊, *物理学报*, **41**(1992), 1950]
- [6] J. S. Peng, G. X. Li, *Phys. Rev.*, **A47**(1993) 3167.
- [7] Y. H. Tian, J. S. Peng, *Acta Physica Sinica*, **48**(1999), 2060 (in Chinese) [田永红, 彭金生, *物理学报*, **48**(1999), 2060]
- [8] C. J. Huang et al., *Acta Physica Sinica*, **49**(2000), 1490 (in Chinese) [黄春佳等, *物理学报*, **49**(2000), 1490]
- [9] M. Tavis, F. W. Cummings, *Phys. Rev.*, **170**(1968) 379.
- [10] G. S. Agarwal, *Opt. Commun.*, **36**(1981) 285.
- [11] R. D. Griffin, S. M. Harris, *Phys. Rev.*, **A25**(1982), 1538.
- [12] Z. Ficek, B. C. Sanders, *Quant. Opt.*, **2**(1990) 269.
- [13] A. Joshi, R. P. Puri, S. V. Lawande, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 2135.
- [14] Y. H. Tian, J. S. Peng, *Acta Physica Sinica*, **49**(2000), 67 (in Chinese) [田永红, 彭金生, *物理学报*, **49**(2000), 67]
- [15] J. S. Peng, G. X. Li, *Introduction of Modern Quantum Optics* (Science Press, Beijing, 1996) [in Chinese] [彭金生, 李高翔著, 近代量子光学导论(科学出版社, 北京, 1996)]

# QUANTUM PROPERTIES OF LIGHT IN THE SYSTEM OF TWO-MODE SQUEEZING VACUUM FIELD INTERACTING WITH TWO COUPLING-ATOMS

HUANG CHUN-JIA ZHOU MING LI JIANG-FAN KONG FAN-ZHI

( *Department of Physics and Information Engineering , Changsha University of Electric Power ,  
Changsha 410077 , China* )

( Received 7 May 2000 ; revised manuscript received 1 July 2000 )

## ABSTRACT

The squeezing and coherence properties of the light in the system of two-mode squeezing vacuum field interacting with two coupling-atoms are studied in the framework of quantum theory. The relation between the quantum properties of the light and the characteristics of the system itself is discussed.

**Keywords :** two-mode squeezing vacuum field , two coupling-atoms , non-classical properties of light

**PACC :** 4250