

耦合混沌系统的相同步 : 从高维混沌到低维混沌 *

郑志刚¹⁾²⁾ 胡 岗¹⁾ 周昌松²⁾ 胡斑比²⁾³⁾

¹⁾ 北京师范大学物理系, 北京 100875)

²⁾ 香港浸会大学物理系及非线性研究中心, 中国香港)

³⁾ 休斯顿大学物理系, Texas 77204, 美国)

(2000 年 4 月 10 日收到, 2000 年 7 月 5 日收到修改稿)

混沌系统的相同步现象是近几年混沌同步研究的热点, 它反映了混沌运动中的有序行为. 用分岔树来研究耦合系统相同步的进程, 并用 Lyapunov 指数谱来探讨系统动力学在相同步时从高维混沌向低维混沌过渡的进程. 发现了从多个有理同步的时间交替到完全相同步的道路. 还发现了相同步中的混沌抑制及通过倍周期分岔向混沌同步的恢复. 此外, 研究表明, 非对称耦合可以大大加强耦合系统的相同步, 这对实际应用有重要的意义.

关键词: 相同步, 分岔树, 李指数

PACC: 0545

1 引 言

同步是物理上常常观察到的现象. 关于同步现象最早的研究可以追溯到 1673 年惠更斯(Huygeni)关于耦合单摆的同步现象的观察^[1]. 同步在实际应用中是非常重要的. 若干个耦合单元之间通过相互作用达到同步的现象在许多领域中屡见不鲜. 例如对耦合的 Josephson 结的研究表明, 当若干 Josephson 结通过耦合达到同步时, 我们可以得到相干性非常好的交流微波输出. 另外一个关于应用的例子是激光的相干输出. 只有当各激光器通过耦合达到同步状态时, 我们才可以得到高功率的相干输出. 对人体心肺功能的研究表明, 人体的心跳和呼吸频率是在若干个有理的比例的同步(锁相)之间的变化, 尽管它们的自然频率非常不同^[2,3]. 在生态学上一个典型的例子就是马来西亚岛上成千上万只萤火虫在夜晚同步地闪动. 这些个体之间尽管各有差异, 但它们之间通过耦合却可以达到同步的状态. 人们在对化学波等的研究中也发现许多与同步有关的现象^[3]. 由此可见, 同步是自然界中的一种基本现象, 对同步现象的共性的研究及其对引致同步机理的研究有着极大的意义.

关于同步研究的数学模型有很多, 其中采用较

多的是相位的描述^[2-4]. 用一般的表达式可以写成 (N 个耦合振子)

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + K \sum_j F(\theta_j - \theta_i), \quad (1)$$

其中 $\theta_i(t)$ 是 t 时刻振子 i 的相位; $d\theta_i/dt$ 是相应的角频率; ω_i 为无耦合时的振子自然频率; K 为耦合强度; $F(x)$ 是耦合函数, 取决于具体的系统, 其中采用相当多的一种形式是 $F(x) = \sin(x)$. 自然频率 $\{\omega_i\}$ 假设符合某种分布, 通常是高斯分布 $g(\omega)$. Kuramoto^[3] 提出一种平均场模型, 即每个振子与其余的 $N-1$ 个振子都有耦合, 而且耦合强度是相同的, 方程可以写为

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N [\sin(\theta_j - \theta_i)]. \quad (2)$$

对这样的系统, 我们可以定义一个相干函数

$$R(t) \exp(i\varphi) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp[i\theta_j(t)], \quad (3)$$

$\varphi(t)$ 为一位相. Kuramoto 及其后继者研究发现^[3,4] 在 $N \rightarrow \infty$ 的情况下(热力学极限下), 系统(2)式的 $R(t)$ 不随时间变化, 而且在 $K = K_c = 2/[\pi g(0)]$ 时存在一个无序-有序相变. 当 $K < K_c$ 时 $R = 0$; 而当 $K \geq K_c$ 时, $R \propto (K - K_c)^{1/2}$, R 是描述振子之间相干性的函数, $R > 0$ 反映了振子之间已经出现同步行为. 这是一种典型的非平衡相变. 我们

* 国家自然科学基金(批准号: 19805002), 国家重点基础研究专项基金(批准号: G2000077304), 教育部骨干教师基金、香港 RGC 基金和香港浸会大学 FRG 基金资助的课题.

研究了在有限个振子时最近邻情形的同步行为^[5],

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{3}[\sin(\theta_{i+1} - \theta_i) + \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)], \quad (4)$$

并探讨了其同步的机理,发现其中丰富的相同步行为.

在上述关于相位的描述中我们将振子简化为周期振子,而非线性出现于耦合函数中.在一般情况下,振子不一定是周期的,因此对耦合复杂系统特别是混沌系统的同步问题的研究成为人们关注的焦点.1990年,Pecora和Carroll^[6]提出混沌同步的概念.他们发现,当两个相同的混沌振子耦合时,尽管系统存在由混沌引起的指数不稳定性,两振子在一定的耦合强度下仍然可以达到完全同步.混沌同步概念的提出,极大地推动了关于同步现象及非线性动力学的研究.此概念亦是同步原有概念的推广.在此之后,人们提出了各种各样的同步,如广义同步、相同步、滞后同步等^[7],其中相同步的研究引发了人们对混沌内部旋转动力学的关注.我们知道,以往关于混沌性质的研究大多只注意轨道指数不稳定性的描述,即考察系统的 Lyapunov 指数或 Kolmogorov-Sinai 熵,而对于混沌系统相位的研究却很少.其中一个主要原因是采用 Poincare 截面的技术忽略了对相位性质的描述.混沌的精髓在于拉伸与折叠,因此对旋转动力学的研究十分有意义.1996,1997年,Rosenblum及合作者研究了两个有小参量失配的 Rossler 振子的相位行为^[8,9].他们发现当耦合强度增大到一定程度时,两个自然频率不同的振子的相位被锁定,而此时两振子的振幅却没有关联.这种锁相行为与耦合周期振子的同步非常相似.混沌相同步在数值上被发现后,先后在电路实验^[10]及激光实验^[11]中得到了验证.相同步的研究也被应用到生物、医学、化学等领域中,使之成为一个方兴未艾的方向^[12,13].

探讨耦合导致同步的内在机理是一个很有意义但困难的问题.在相同步的进程中,耦合系统的拓扑动力学有何相应的变化有重要的理论意义.一方面,通过这一研究,我们可以把有序的产生与系统的内禀动力学变化联系起来;另一方面,这一研究对于理解时空混沌序列及其合作现象很有帮助.Rosenblum等研究耦合 Rossler 振子表明,当两个振子达到相同步时,系统的两个零 Lyapunov 指数中有一个变为负,说明动力学吸引子的维数降了 1.我们如下定义振子的平均旋转数:

$$\Omega_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\theta_i(t)}{dt} dt. \quad (5)$$

当两个振子满足如下的关系时:

$$\Omega_i = \Omega_j, \quad (6)$$

我们就说两个振子达到相同步.我们研究耦合极限环的相同步进程发现^[14,15],在非混沌情况下,当两个振子(或振子集团)发生相同步时, Lyapunov 指数谱中有一个零指数变负.这与 Rosenblum 对混沌振子的研究结果是一致的.但是,正如我们在后面指出的, Rossler 振子相位的行为更多地像周期振子.而对于一般的混沌振子,相位的相干性不是很强,系统所具有的时间尺度比较宽,此时上述的相同步与动力学变化的对应就模糊起来.当两个 Rossler 振子的参量失配很大时,我们发现动力学与小失配的情况截然不同.因此,有必要对于一般情况有一个更清楚的理解.

2 模 型

我们以 Rossler 和 Lorenz 系统为例研究耦合混沌系统在相同步时的动力学行为的变化.这两个系统实际上代表着两类截然不同的混沌. Rossler 为有一个旋转中心的混沌振子,而且在适当选取参数时系统具有非常好的相干性,因而相位具有非常好的类似于周期振子(极限环)的行为. Lorenz 系统则具有两个旋转中心,因此运动可以在两个中心吸引域之间跃迁,而且系统具有的混沌性更强.所以 Lorenz 系统具有更宽的时间尺度范围,相位的行为随机性更强.我们将会发现,这两类系统都具有相同步的性质,但是系统动力学行为的变化截然不同.

我们所研究的耦合 Rossler 系统可以写为

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= -\omega_i x_i - z_i + K(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}), \\ \frac{dy_i}{dt} &= \omega_i x_i + ay_i, \\ \frac{dz_i}{dt} &= -f + z_i(x_i - c), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $a=0.165$; $f=0.2$; $c=10$; $\omega_i=1.0+\Delta_i$, 其中 $\Delta_i \in [-\Delta, \Delta]$ 为失配大小, Δ 为一正值; K 为耦合强度.由于单个振子吸引子良好的旋转性,可以如下定义各振子的相位:

$$\theta_i(t) = \arctan(y_i(t)/x_i(t)). \quad (8)$$

耦合 Lorenz 系统动力学方程可以写为

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \sigma(y_i - x_i) + K(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}), \\ \frac{dy_i}{dt} &= r_i x_i - y_i - x_i z_i, \\ \frac{dz_i}{dt} &= -bz_i + x_i y_i, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\sigma = 10$; $b = 8/3$; $r_i = r_0 + \Delta_i$, 其中 $\Delta_i \in [-\Delta, \Delta]$ 为 r 的参数失配. 尽管单个 Lorenz 振子具有两个旋转中心, 但由于两个中心关于原点对称, 可以通过变换将两个中心折叠到一起, 这样可以用下面的相位来描述 Lorenz 振子的旋转性质^[16]:

$$\theta_i(t) = \arctan\left(\frac{\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - a_0^i}{z_i - (r_i - 1)}\right), \quad (10)$$

其中 $a_0^i, (r_i - 1)$ 是第 i 个振子的旋转中心, $a_0^i = \sqrt{2b(r_i - 1)}$. 在实际观察中, 发现上述相位的定义可以很好地描述混沌振子的旋转性质. 对于一般的混沌振子, 运动可能会绕多个旋转中心旋转, 因而相位的定义一般难以给出. 胡岗等^[17]及 Yalcinkaya 等^[18]均提出了关于一般混沌振子旋转性质的研究问题. 但定义的困难仍然未解决.

3 同步分岔树和动力学变化

在有了混沌振子的相位的定义之后, 就可以利用(5)式的定义来计算单个振子的平均旋转数, 并观

察平均旋转数随着耦合强度增大而发生的变化. 在图 1(a)和图 1(b)中, 给出了三个耦合的 Rossler 振子的平均旋转数随着耦合强度的变化. 可以发现随着耦合强度的增加, 1 和 2 振子逐渐达到相同步, 即在 $K \approx 0.014$ 时, $\Omega_1 = \Omega_2$. 继续增加耦合强度, 发现集团(1, 2)与 3 在 $K \approx 0.029$ 时达到了相同步. 这个同步的图象与分岔非常相象, 我们称之为同步分岔树. 运用同步分岔树的优点在于可以非常清楚地观察到各振子间相同步的具体情况^[5].

在图 1(a)和图 1(b)中可以看到, 当振子的自然频率差别较小(参数失配较小)时, 振子平均旋转数的同步行为很平缓, 而在失配较大时, 振子的相同步行为非常“陡”, 即在某一耦合强度 K_c , 即使二振子在 $K \rightarrow K_c$ 时平均旋转数差别很大, 在 K 接近 K_c 时两者会突然达到相同步, 如图 1(b)所示. 我们把前一种情形称为“软同步”而把后一种称为“硬同步”^[19].

我们可以用 Lyapunov 指数谱来考察在相同步进程中系统动力学行为的变化. 在图 1(c)和图 1(d)中, 画出相应于图 1(a)和图 1(b)的分岔数的 Lyapunov 指数谱 λ_i 的变化(我们通常只画出前 $2N$ 个指数). 对于小的参数失配, 发现当两个振子达到相同步时, 其中一个零指数变为负. 当耦合强度比较小, 对于三个耦合振子, 可以发现三个零 Lyapunov 指数, 说明运动是在混沌的 T^3 (三维准周期环面)上

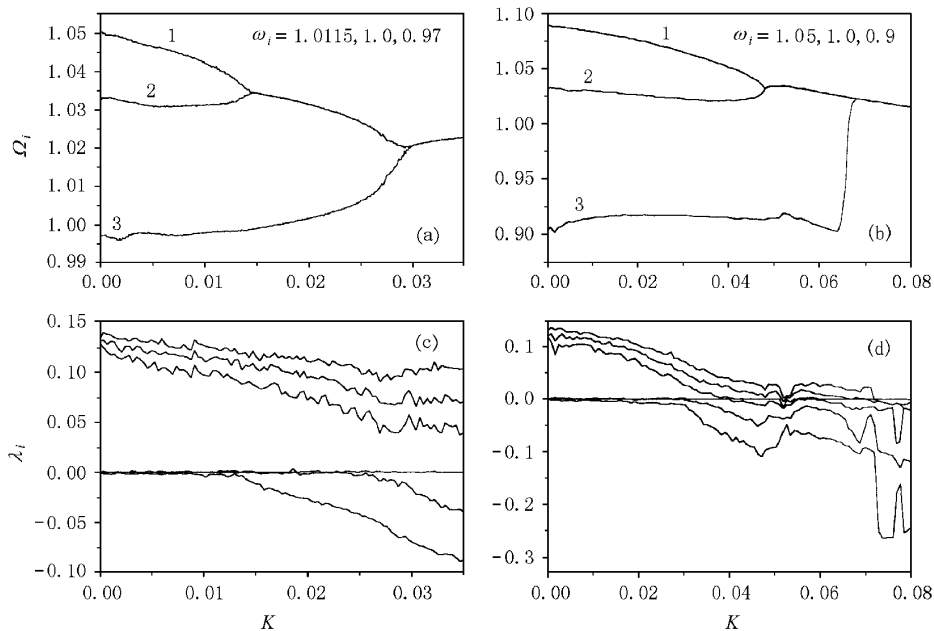


图 1 三个耦合 Rossler 振子的相同步 (a)和(b)为不同参数失配下平均旋转数的分岔树 (c)和(d)为相应于分岔树的 Lyapunov 指数谱随耦合强度的变化行为

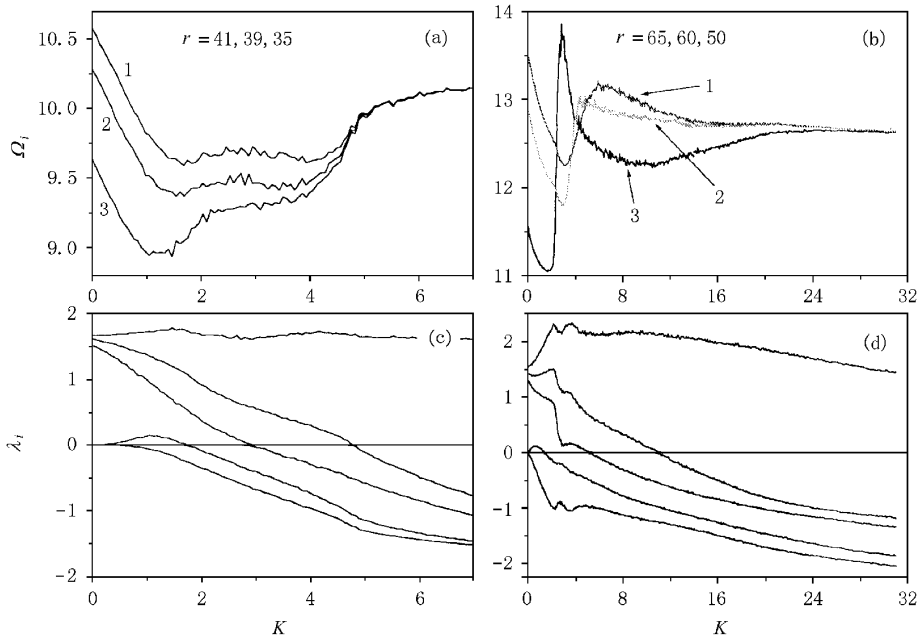


图2 三个耦合 Lorenz 振子的相同步 图注同图 1

进行;当相同步发生时, T^3 变为 T^2 , 在三个振子全部达到相同步时, 混沌的 T^2 变为 T^1 . 当振子的参数失配较大时, 从图 1(b) 中可以看到在相同步的过程中混沌逐步受到抑制. 当振子完全达到相同步时, 混沌可以完全被抑制, 运动可以落到准周期的环面或周期轨道上. 当失配非常大时, 系统在相同步的过程中甚至会出现运动被压制到不动点上.

Lorenz 振子的相同步则是一幅完全不同的图象. 在图 2(a) 和图 2(b) 中, 我们计算了三个 Lorenz 振子在不同失配下的同步分岔树. 当振子的参数失配较小时, 如图 2(a), 可以看到三个振子的平均旋转数随着耦合强度的增加被缓慢地拉至同步. 从同步树上没有看到类似 Rossler 的情况, 甚至很难准确说在什么耦合强度下振子达到相同步. 这种阈值不确定的情形对具有宽时间尺度的混沌系统来说是普适的, 它反映了混沌(内在随机性)的影响. 相比之下, Rossler 的相位行为更多地像周期振子而不是混沌振子. 当我们继续增大参数失配时, 在图 2(b) 中显现出更为复杂的分岔树, 三个振子的平均旋转数随耦合强度的增加经历了几次交叉后才逐步趋近于相同步, 而且所需的耦合强度相当大. 对于 Rossler 的情况, 我们发现相同步所需的耦合强度的阈值通常在 0.1 以下, 即当 $K \geq 0.1$, 不管振子的平均旋转数差别有多大, 系统均在 0.1 之前通过“软同步”或“硬同步”进入相同步状态. 造成这种差异的原因尚

在研究之中.

总体而言, 无论对 Rossler 系统还是 Lorenz 系统, 我们均观察到随着相同步的进程伴随着动力学从高维混沌向低维混沌的过渡. 但未必像耦合周期振子那样可以找到相同步与动力学拓扑变化的准确对应. 在图 2(c) 和图 2(d) 中, 我们给出了相应于分岔树的 Lyapunov 指数谱的变化(前 6 个). 在图 2 中, 根本就找不到相同步于系统动力学变化的准确的对应, 在几处零 Lyapunov 指数变负的地方均未发现平均旋转数有什么锁定行为. 这说明对于一般的混沌系统, 相同步的进程更为复杂, 进一步的分析有助于理解耦合混沌系统的内在的有序行为.

4 通过倍周期分岔到达混沌同步

在前面我们对耦合 Rossler 系统的相同步进行分析时提到, 当振子参数失配增大时, 系统的混沌会受到抑制. 而实际上, 系统随着耦合强度的增加会自动地进入混沌同步状态. 在图 3 中, 我们给出了两个耦合 Rossler 振子在大失配下的分岔图, 这里 $\omega_1 = 1.1$, $\omega_2 = 0.9$. 在 $K \approx 0.7$ 时, 系统可以达到相同步. 可以看到, 随着耦合强度的增加, 系统的混沌首先被压制为准周期运动, 然后准周期环面的宽度越来越小, 最后被周期运动所代替. 继续增大耦合强度, 又从非混沌同步通过倍周期分岔恢复到混沌同步, 我

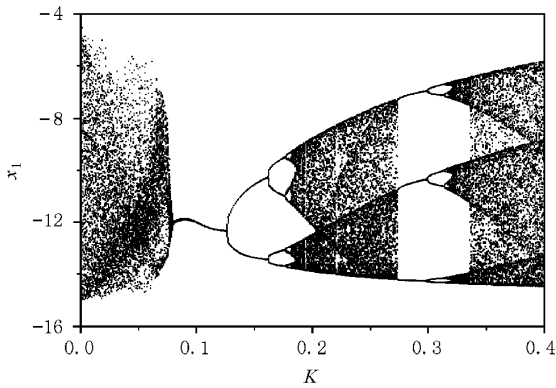


图 3 两个耦合 Rossler 振子相同步过程中动力学的变化 可以看到通过倍周期分岔向混沌同步的恢复

们分别观察到周期 2、周期 4、...、周期 2^n ...直到混沌的同步,而此时一直有 $\Omega_1 = \Omega_2$. 当振子的参量失配继续增大时,混沌会被完全抑制,同步由周期运动很快变成不动点,而耦合强度再增大,则倍周期分岔同步又出现. 出现这种现象的原因在于对大失配的情形,相位与振幅存在很强的关联,而小失配时,相位与振幅关联非常弱,相位的行为更多地接近于极限环. 通过倍周期分岔达到混沌同步的现象对于多个振子耦合的情形也同样存在.

5 从间歇同步到完全同步

在前面的分析中看到,对于像 Lorenz 振子这样混沌性较强的系统,虽然相同步也会达到,但在相同步进程中显然没有观察到在系统动力学行为(如 Lyapunov 指数谱)与相同步之间有何关联,如对于三个振子的系统, Lyapunov 指数谱中零指数变负的分岔处发生了什么变化? 为了弄清这个问题,我们考察两个耦合的 Lorenz 振子. 根据相同步的定义,对于相位的关系应有

$$|m\theta_i(t) - n\theta_j(t)| < C, \quad (11)$$

其中 C 为一个正的小量. 当上述关系成立时,我们认为 $\theta_i(t)$ 和 $\theta_j(t)$ 这中间出现了 $m:n$ 的相同步. 当在一段时间 T 内 $\theta_i(t)$ 和 $\theta_j(t)$ 亦满足上述关系时,我们认为 $\theta_i(t)$ 和 $\theta_j(t)$ 在 T 这段时间内发生了 $m:n$ 的锁相. 此时 $|m\theta_i(t) - n\theta_j(t)|$ 应该是一个在某个平均值附近的小的振荡(“平台”)^[20]. 最明显的是 1:1 的相同步,此时 $|\theta_i(t) - \theta_j(t)|$ 是一个小的振荡,且不会有 2π 的相位移动. 当系统达到完全相同步时,在所有时间内,应该看到相位差的一个平

台,当出现许多依次相差 2π 的平台时,说明 1:1 的锁相被阵发所打断. 可以统计在一段时间 T 内 1:1 的段数. 在图 4(a)中,给出了 1:1 段的个数的统计. 可以发现当耦合强度很小时, 1:1 段的个数很少,实际观察 $K < 2.5$ 时几乎没有看到 1:1 段的出现, $N(1:1)$ 是一个近乎单调的变化. 当 $K > 2.5$ 时,会发现段的个数随耦合强度有一个极快的增长,而在 $K \approx 2.5$ 时,恰恰发现有一个零 Lyapunov 指数变负,这说明 1:1 的可测度的段在 $K \approx 2.5$ 才出现,而且段的个数增长很快. 在 $K \approx 5$ 时,段的个数达到最大值,之后个数迅速减少,段的平均长度越来越大,系统的 1:1 锁相由个数增长进入平均长度增长的阶段,说明从此开始 1:1 的段进入由量变到质变的过程. 而恰恰在 $K \approx 5$ 附近(比 5 要略大)系统的另一个零 Lyapunov 指数变负. 在 $K \approx 12.0$ 时,随 K 增大,系统逐渐进入完全相同步. 在图 4(b)中是测量的单个 1:1 段的平均长度与耦合强度的曲线,可以看到,在 $K < 2.5$ 时长度很小且无明显增长,而在 $K > 2.5$ 时长度开始增长. 在 $K \approx 5$ 处曲线有一个拐点, $K \approx 12.0$ 时长度增长的速度开始减慢,逐渐趋近于 1.

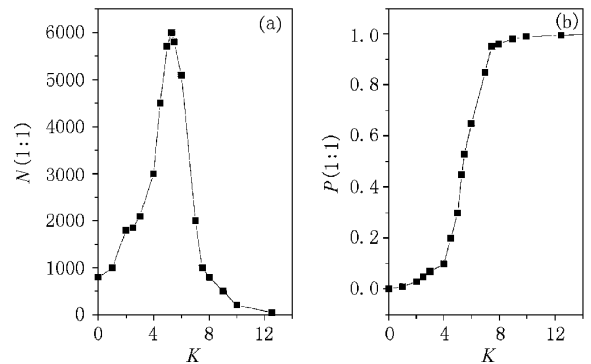


图 4 相同步过程 1:1 段数及 1:1 所占比例的统计

当 K 处于 2.5 和 12.0 之间时, 1:1 之间的间歇实际上包含着其他比例的锁相. 例如在 $K = 6.2$ 时,可以观察到 5:4, 17:14, 39:32, 40:33 和 41:34 等接近于 1:1 的锁相.

上面的讨论反映了混沌吸引子中不稳定周期轨道的关键作用. 当耦合强度增加到一定程度时,混沌振子之间的不稳定周期轨道由于耦合 $m:n$ 等有理数比例的周期轨道发生在一段时间内的锁定. 其中 1:1 的锁相最为强烈. 因此在 $K > 2.5$ 时,观察到 1:1 锁相的出现. 由于混沌运动引起的轨道不稳定性,这种锁定在一段时间之后被打破,因此有 2π 的相

移,另外的 1:1 的轨道又被锁定.这样我们发现 1:1 锁相是间歇性的.在 1:1 之间其他比例的不稳定周期轨道也会在一段时间内发生锁定,但锁定的时间比 1:1 要短.这样 1:1 和其他 $m:n$ ($m \neq n$) 的锁相交替出现.通常 $m:n$ 是非常接近于主要比例 1:1 的锁相.这种交替锁相的出现是各种有理比例的 Arnold 舌头重叠的结果^[20].当耦合强度继续增大时,1:1 和 $m:n$ ($m \neq n$) Arnold 舌头的重叠效应减弱,1:1 锁相越来越稳定.当 K 达到某一阈值时,1:1 的锁相会完全被稳定住.这条通向相同步的道路是一般耦合混沌系统普遍具有的特点. Rossler 振子由于具有良好的相干性,因此交替锁相的出现通常不易被观察到.

6 非对称耦合对相同步的加强

相同步反映了混沌系统中的合作行为,因此把混沌系统的相同步应用到实际中有重大的现实意义.近几年中,相同步已在生物、物理、医学等领域得到了有效的利用.一个非常有意义的问题是如何能尽可能地加强相同步.当然一个非常自然的方法就是加强耦合强度.但有时会为此付出的代价太大,另外有时即使加强耦合强度也未必能达到目的.一个非常有效的方法是采用非对称耦合,如对 Rossler 系统采用下面的耦合方式:

$$\begin{aligned} \text{耦合项} = & (K + \alpha)(x_{i+1} - x_i) \\ & + (K - \alpha)(x_i - x_{i-1}). \end{aligned} \quad (12)$$

对 Lorenz 系统我们也采用类似耦合方式.这样每一个振子与其邻近的振子的耦合不再是对称的.在一个方向上加强了耦合,而在另一个方向上减弱了耦合,但“总体”上并未“增加”系统的耦合.发现令人欣喜的现象:随着非对称耦合强度 α 的增加,原来未达到相同步的系统迅速达到相同步.在图 5(a)和图 5(b)中,画出了耦合 Rossler 系统($N=100$) Ω_i 的关系.在图 5(a)中, $K=0.6$, $\alpha=0$.可以看到振子形成了若干相同步的集团.当 $\alpha=0.3$ 时,在图 5(b)上发现全部振子被同步到同一集团中.类似的现象也发生在耦合 Lorenz 系统.在图 5(c)和图 5(d)中,给出了类似的图象.可以发现当 α 增加时,逐步出现了相同步集团.当 $\alpha=20$ 时,形成了两个相同步的集团.继续增加 α ,虽然两个集团的平均旋转数的差距不断拉开,但越来越多的振子落入其中一个集团之中,表明非对称耦合的确大大加强了系统的相同步^[21].

非对称耦合对相同步的促进作用可以解释为“同步流”的作用.在加入非对称耦合时,非对称性会导致一个在耦合链(或环,取决于边界条件)上传播的“波”.小的非对称耦合尚不足以使其传播.这时波是局域的,即其传播距离是很短的.此时它对耦合振子的相同步还不能起到全局性的作用.当非对称耦

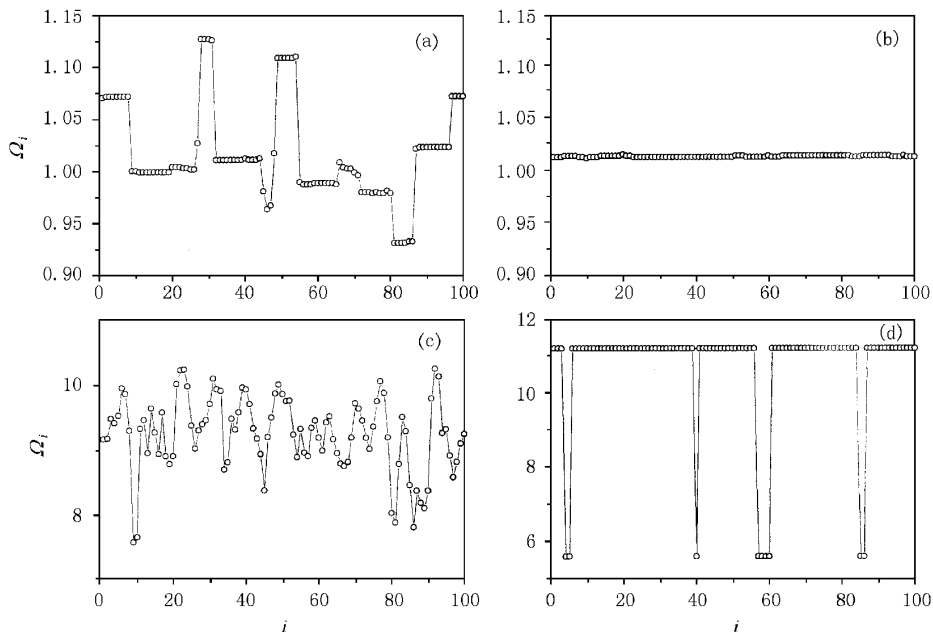


图 5 非对称耦合对相同步的加强 (a)和(b)为 100 个非对称耦合的 Rossler 振子, $K=0.6$ (c)和(d)为 100 个非对称耦合的 Lorenz 振子, $K=50$ (a)和(c)中非对称耦合为零

合强度达到一定程度时,波可以在整个链上传播,从而形成“同步流”。同步流使得各振子的平均旋转数迅速地被拉到同一个值上,即我们在图 5(b)中看到的一个大平台。对 Lorenz 系统而言,由于其很强的混沌性,各振子只能被逐渐同步。因此我们看到两个同步集团。随着非对称耦合强度的增大,两个同步集团慢慢趋于同步。

7 结 语

本文中我们对耦合混沌系统相同步问题的研究现状进行了评述与追踪。同步过程中的动力学变化是很重要的。同步在物理上也可看作是一种相变。近几年人们对哈密顿系统的混沌行为的研究表明,热力学系统的相变现象可以用系统内部动力学拓扑性质的变化来描述^[22]。人们已经建立了相变与拓扑描述的关系。对于相同步而言,我们通过系统 Lyapunov

指数谱的研究发现系统从高维混沌向低维混沌的过渡。对于一般的耦合混沌系统而言,相同步的发生首先是出现多个有理锁相的时间交替,即 Arnold 舌头的重叠,而 1:1 的出现越来越频繁,其次是 1:1 的维持时间越来越长,最后 1:1 被完全稳定住,系统达到完全相同步。这些转变都在系统动力学的拓扑变化中体现出来。

耦合混沌系统的相同步中尚有许多问题亟待解决。一个根本的问题就是如何定义一般混沌系统的相位。一般的混沌系统通常不止有一个旋转中心,因此如何解决多中心的问题是定义解决的关键。另外一个问题是把相同步的研究成果应用于时空混沌和斑图(pattern)动力学的探讨。混沌振子的相位是容易被“驯服”的一个自由度,因此时空动力学中花样的形成与振子的相位的同步应该有密切的联系。这方面的探讨尚在进行之中。

-
- [1] G. Huygenii, *Horoloquim Oscilatorium* (Parisiis, France, 1673).
- [2] A. T. Winfree, *Geometry of Biological Time* (Springer-Verlag, New York, 1990).
- [3] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [4] S. H. Strogatz, R. E. Mirollo, P. C. Matthews, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 2730.
- [5] Z. Zheng, G. Hu, B. Hu, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 5318.
- [6] L. M. Pecora, T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 821.
- [7] G. Chen, X. Dong, *From Chaos to Order, Methodologies, Perspectives and Applications* (World Scientific, Singapore, 1998).
- [8] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 1804.
- [9] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) A193.
- [10] U. Parlitz, L. Junge, W. Lauterborn, L. Kocarev, *Phys. Rev.* **E54** (1996) 2115.
- [11] D. Y. Tang, N. H. Heckenberg, *Phys. Rev.* **E55** (1997) 6618.
- [12] P. Tass *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 3291.
- [13] A. Neiman *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 660.
- [14] Z. Zheng, B. Hu, G. Hu, *Phys. Rev.* **E62** (2000) A02.
- [15] B. Hu, Z. Zheng, *Int. J. Bif. & Chaos* (2000) in press.
- [16] A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, G. Osipov, J. Kurths, *Physica* **D104** (1997) 219.
- [17] G. Hu *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 5314; W. Ma *et al.*, *Acta Physica Sinica* **48** (1999) 787 (in Chinese); 马文麒等, *物理学报* **48** (1999) 787.
- [18] T. Yalcinkaya, Y. C. Lai, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 3885.
- [19] G. Osipov, A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Phys. Rev.* **E55** (1997) 2353.
- [20] M. A. Zaks, E. Park, M. G. Rosenblum, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) A228.
- [21] Z. Zheng, G. Hu, *Phys. Rev.* **E** (2000) in Press; M. Zhan, Z. Zheng, G. Hu, *Phys. Rev.* **E62** (2000) 3552.
- [22] L. Casetti, E. G. D. Cohen, M. Pettini, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) A160.

PHASE SYNCHRONIZATION IN COUPLED CHAOTIC SYSTEMS : TRANSITIONS FROM HIGH-TO LOW-DIMENSIONAL CHAOS*

ZHENG ZHI-GANG^{a) b)} HU GANG^{a)} ZHOU CHANG-SONG^{b)} HU BAM-BI^{b) c)}

^{a)}*(Department of Physics , Beijing Normal University , Beijing 100875 ,China)*

^{b)}*(Department of Physics and Center for Nonlinear Studies ,Hong Kong Baptist University , Hong Kong ,China)*

^{c)}*(Department of Physics , University of Houston , Texas 77204 ,USA)*

(Received 10 April 2000 ; revised manuscript received 5 July 2000)

ABSTRACT

Phase synchronization in coupled chaotic systems is an interesting topic in recent years on nonlinear dynamics. Phase synchronization implies an ordered behavior embedded in chaotic motions. Recent progress on phase synchronizations is reviewed. The synchronization process is exhibited by applying the bifurcation tree. The synchronization process is identified as transitions from high-to low-dimensional chaos. An alternative phase locking among various rational ratios is found. Chaos suppression and the restoration to chaos synchronization via period-doubling is studied. It is found that asymmetric coupling can greatly enhance the phase synchronization of coupled oscillators.

Keywords : phase synchronization , bifurcation tree , Lyapunov exponents

PACC : 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19805002) , by the Special Foundation for Major State Basic Research Project of China (Grant No. 2000077304) , and by the Foundation for University Key Teacher by the Ministry of Education , China , and by the Hong Kong RGC and the FRG from Hong Kong Baptist University , China.