

非重正交的李雅普诺夫指数谱的计算方法*

赖建文 周世平

(上海大学物理系, 上海 201800)

李国辉 徐得名

(上海大学通信与信息工程学院, 上海 201800)

(2000 年 4 月 2 日收到, 2000 年 7 月 11 日收到修改稿)

推导了一种快速、有效的计算动力系统李雅普诺夫(Lyapunov)指数谱的方法. 该方法避免了一般算法的频繁的重正交过程;且在维数不高($n < 5$)的情况下,所需求解的方程数也较一般方法更少.该算法即适用于连续又适用于离散系统,当指数出现简并时同样有效.对以 Lorenz 动力系统为主的数值计算,验证了该算法的快速性及其稳定性.

关键词:混沌,李雅普诺夫指数,复合矩阵,特征值

PACC: 0545, 0547

1 引 言

对初始值的敏感性是混沌系统的一个最为重要的特征,李雅普诺夫指数就是这种敏感性的量化^[1].在 1983 年格里波基证明当一系统(非发散)的李雅普诺夫指数出现正值时,系统将是混沌的^[2].此外,在判定由混沌系统分解出的子系统间能否实现同步的主要判据之一即其子系统的李雅普诺夫指数(条件李雅普诺夫指数)皆应为负值^[3,4].可见了解李雅普诺夫指数谱在动力系统的时间发展过程的判定和混沌系统同步及控制应用中都是极为关键的.

对目前较为常用的方法,主要可分为基于正交上三角(QR)分解的离散^[5-7]和连续^[8]的方法,以及基于奇异值分解(SVD)的连续的方法^[9].然而,我们发现这些方法都有不足之处,如基于 QR 分解的离散的方法无论是利用 Gram-Schmidt 重正交归一(GSR)^[5]进行分解还是利用 Householder 变换^[6,7]都必须进行频繁的重正交及数值重整,大大影响计算的速度.对于连续的方法,虽然避免了重正交及重整,但基于奇异值分解的方法^[9]无法处理指数简并的情形,而基于 QR 分解的连续方法^[7]得出的关于 λ 的微分方程组在三维时即变得异常的复杂,难以处理.此外,连续方法的数值稳定性亚于离散的方

法^[10],且只能用于计算连续系统的李雅普诺夫指数.本文将引入复合矩阵的概念及它的一条重要性质,从一矩阵特征多项式系数的有关性质及李雅普诺夫指数的定义出发,详细的推导了一种计算李雅普诺夫指数谱的有效方法.该方法不需要进行频繁的重正交,且在维数不太高($n < 5$)的情形所需求解的方程个数 $2^n - 1$ 也要比常用方法所需求解的方程数 n^2 个少.若仅需求解部分指数,则所需求解的方程数目更少,并且对连续及离散系统都适用.在出现简并时,也依然有效.以 Lorenz 系统为例,求解了在不同参数下的李雅普诺夫指数谱,并为了验证其准确性还作出了相应参数下的准庞加莱截面图.结果表明该算法快速、稳定,尤其在维数不高情形,更体现着其优越性.

2 p 阶复合矩阵^[11]

设 A 为一 $n \times n$ 阶矩阵, a_{ij} 为其中的一个元素,则 A 的 p 阶复合矩阵 $D^p(A)$ 中的元素是由 A 划去 $n-p$ 行 $n-p$ 列所余 p 行 p 列的行列式所构成.特别地,有 $D^1 = A$, $D^n = \text{Det}|A|$. 设余下的 p 行指标为 $H = \{H_1, H_2, \dots, H_p\}$, 列指标为 $K = \{K_1, K_2, \dots, K_p\}$, 将 p 阶复合矩阵的元素表为 D_{HK} , 则

* 国家自然科学基金(批准号 69871016)资助的课题.

$$D_{HK} = \varepsilon_{K_1 \dots K_p}^{i_1 \dots i_p} a_{H i_1} a_{H_2 i_2} \dots a_{H_p i_p}, \quad (1)$$

其中 $\varepsilon_{K_1 \dots K_p}^{i_1 \dots i_p}$ 为 Kronecker tensor(克罗内克张量), 取值为

当 $(i_1 \dots i_p)$ 不是 $(K_1 \dots K_p)$ 的一个交换时取 0;

当 $(i_1 \dots i_p)$ 是 $(K_1 \dots K_p)$ 的一个偶交换时取 1;

当 $(i_1 \dots i_p)$ 是 $(K_1 \dots K_p)$ 的一个奇交换时取 -1.

由于行列指标 H, K 中的元素位置交换并不会产生新的元素, 所以 $D^p(A)$ 应是 $C_n^p \times C_n^p$ 阶的. 为论述方便我们规定 D_{HK} 在复合矩阵的位置利用字典排序的方法^[9], 即 H 大者它的行位置就大, K 大者它的列位置就大. 而 H 或 K 的大小是如下规定的:

若 $k_1 = l_1 \dots, k_{i-1} = l_{i-1}$, 而 $k_i > l_i$ 对某个 i 成立, 则称有序数组 $(k_1 \dots k_n)$ 大于 $(l_1 \dots l_n)$. 此外, 若我们设 B 为另一 $n \times n$ 阶矩阵, 它的 p 阶复合矩阵为 $D^p(B)$, 则由复合矩阵的定义不难得出以下的重要性质:

$$D^p(AB) = D^p(A)D^p(B). \quad (2)$$

在下面的推导中将利用这一性质.

3 动力系统的李雅普诺夫数(指数)

本节将首先介绍两条有关特征多项式系数的性质, 然后利用这两条性质及李雅普诺夫指数与特征值的关系, 详细阐述在离散系统和连续系统下的李雅普诺夫指数的计算.

对于一 n 阶方阵 A , 设它有 n 个特征值且按以下顺序排列:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|, \quad (3)$$

则它的特征多项式可表为

$$\text{Det} | A - \lambda I | = \sum_{i=0}^n (-\lambda)^i S^{(n-i)}, \quad (4)$$

则由高等代数的知识我们有^[12]

(i) S^p 是 A 的 p 阶主子式之和(所谓主子式就是行指标和列指标相同的子式), 则由 $D^p(A)$ 的定义可知应有

$$S^p = \text{Trac}(D^p) = \sum_{a=1}^p D_{aa}^p; \quad (5)$$

(ii) S^p 是 $\lambda_1 \dots \lambda_n$ 的 p 次初等对称多项式

$$S^p = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{p-1}} \lambda_{i_p}. \quad (6)$$

3.1 离散动力系统

现考虑一 n 维离散动力系统

$$X_{k+1} = f(X_k), \quad (7)$$

设 $\{X_{rk}\}$ 是该系统的一条轨道, 偏离该轨道一微小量

\tilde{X}_k 的另一轨道 $X_k = \tilde{X}_k + X_{rk}$ 的演化方程为

$$X_{k+1} = X_{rk+1} + \tilde{X}_{k+1} = f(X_{rk} + \tilde{X}_k) \xrightarrow{\text{Taylor}} f(X_{rk}) + \frac{\partial f}{\partial x} |_{X_{rk}} \tilde{X}_{rk} + \alpha \| \tilde{X}_k \|^2.$$

忽略 \tilde{X}_k 的高阶小量则有

$$\tilde{X}_{k+1} = J_k \tilde{X}_k \text{ 亦即 } \tilde{X}_{k+1} = J_k J_{k-1} \dots J_1 \tilde{X}_1 \quad (8)$$

其中 J_k 为 f 在 X_{rk} 的雅可比矩阵. 设 $J^k(X_{r1})$ 是 $X_{r1} \rightarrow X_{rk}$ 映射的雅可比则有

$$J^k(X_{r1}) = J(X_{rk}) J^{k-1}(X_{r1}) = J(X_{rk}) \dots J(X_{r1}). \quad (9)$$

如果 $D^{(k)}$ 和 d^p 分别是矩阵 $J^k(X_{r1})$ 和 $J(X_{rk})$ 的 p 阶复合矩阵. 则由复合矩阵的性质(2)及(9)式可得到

$$D^{(k)} = d^p D^{(k-1)}. \quad (10)$$

设 λ_p 是 $J^k(X_{r1})$ 的第 p 个特征值, 则我们可定义相应的李雅普诺夫数为

$$\eta_p = \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_p|^{1/k}. \quad (11)$$

又由(6)式可知

$$\begin{aligned} S^{(k)} &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{p-1} \lambda_{p+1} + \dots \\ &\quad + \lambda_{(n-p+1)} \dots \lambda_n \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p \left(1 + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{p-1} \lambda_{p+1}}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_{(n-p+1)} \dots \lambda_n}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时由我们的约定(3)式可得到

$$\begin{aligned} |S^{(k)}|^{1/k} &= |\lambda_1|^{1/k} \dots |\lambda_p|^{1/k} \\ &= \eta_1 \eta_2 \dots \eta_p. \end{aligned} \quad (13)$$

同理:

$$\begin{aligned} |S^{(p-1)k}|^{1/k} &= |\lambda_1|^{1/k} \dots |\lambda_{p-1}|^{1/k} \\ &= \eta_1 \eta_2 \dots \eta_{p-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

所以可得

$$\eta_p = |S^{(k)}|^{1/k} / |S^{(p-1)k}|^{1/k}. \quad (15)$$

对(15)式等号两端取常用对数, 即可得到我们所需要的李雅普诺夫指数

$$l_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln |(S^{(k)}) \mathcal{Y}(S^{(p-1)\mathbf{X}k})|, \quad (16)$$

式中的 S^p 可由 (5) 和 (10) 式推得. 同时我们注意到 (10) 式是一线性方程组, 即 D^p 的各个列向量的求解是相互独立的, 并且当经过多次迭代后, D^p 的各个列向量都将迅速的向主特征矢(最大特征值所对应)靠拢^[8, 13], 所以在实际计算中, 我们可仅取其中的任意一列向量进行求解, 则 (10) 式可简化为

$$\vec{D}^{(k)} = d^p \vec{D}^{(k-1)}, \quad (17)$$

式中 \vec{D}^p 为矩阵 D^p 中的一列向量, 同时有

$$S^{(k)} = \sum_{i=1}^p D_i^{(k)}. \quad (18)$$

3.2 连续动力系统

设有一微分方程组为

$$\dot{X}(t) = F(X(t)). \quad (19)$$

将上式进行欧拉离散可得到

$$X_{i+1} = X_i + F(X_i) \Delta t, \quad (20)$$

其中 $X_i = X(t)$, $X_{i+1} = X(t + \Delta t)$, Δt 是一微小量. 则映射 (20) 式的雅可比矩阵可写为

$$I + J(X(t)) \cdot \Delta t,$$

其中 $J(X(t))$ 是 F 的雅可比矩阵, I 为单位矩阵. 类似离散情形可令 d^p 是 $I + J(X(t)) \cdot \Delta t$ 的 p 阶复合矩阵. 同 (10) 式可得到

$$D^{(k)} = d^p D^{(k-1)}, \quad (21)$$

可导出

$$\frac{D^{(k)} - D^{(k-1)}}{\Delta t} = \frac{(d^p - I)D^{(k-1)}}{\Delta t}. \quad (22)$$

因为 Δt 是一微小量, 所以可得到

$$\dot{D}^{(k)}(t) = M^p(X(t))D^{(k)}(t). \quad (23)$$

在上式中我们令

$$M^p(X(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(d^p(I + J(X(t)))) - I}{\Delta t}. \quad (24)$$

同样 $S^p(t)$ 应满足关系式 (5), 即 $S^p(t) = \text{Tracc}(D^p(t))$. 与离散情形一样, 我们可对 (23) 式进行简化即仅取一 C_n^p 维列向量 $\vec{D}^{(k)}(t)$ 进行计算, 即

$$\dot{\vec{D}}^{(k)}(t) = M^p(X(t))\vec{D}^{(k)}(t), \quad (25)$$

同时有

$$S^p(t) = \sum_{i=1}^p D_i^p(t). \quad (26)$$

则同 (16) 式我们可得出连续系统的李雅普诺夫指数

$$l_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{S^p(t)}{S^{p-1}(t)} \right|. \quad (27)$$

3.3 算法实现

在实际计算时, 若对 (17) 或 (25) 式直接进行求解, 常会遇到数值溢出问题. 为了防止数值的溢出, 我们必须进行数值重整, 即将迭代(积分)向量加以规范化, 较为简便的方法是进行归一化, 即每次迭代或积分一短时间 Δt 后将新得的向量乘上该向量的 2-范数的倒数, 并作为下一次迭代的初值. 下面以离散系统为例进行简要的说明:

对 (17) 式的计算我们可改写为

$$\begin{cases} \vec{Y}^{k-1} = \frac{\vec{D}^{(k-1)}}{\|\vec{D}^{(k-1)}\|_2}; \\ \vec{D}^{(k)} = d^p \vec{Y}^{(k-1)}, \end{cases} \quad (28)$$

则不难看出此时应有

$$S^{(k)} = \|\vec{D}^{(k-1)}\|_2 \cdot \|\vec{D}^{(k-2)}\|_2 \dots \|\vec{D}^{(k-1)}\|_2 \sum_{i=1}^p D_i^{(k)}. \quad (29)$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时由 (16) 和 (29) 式可得到

$$l_p = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \|\vec{D}^{(i)} / \vec{D}^{(p-1)\mathbf{X}k}\|_2. \quad (30)$$

在上式中为计算方便我们将

$\frac{1}{k} \ln \left| \sum_{i=1}^p D_i^{(k)} / \sum_{i=1}^{p-1} D_i^{(p-1)\mathbf{X}k} \right|$ 这一无穷小量忽略. 对连续系统当 $n \rightarrow \infty$ 时我们有相似的结果

$$l_p = \frac{1}{n \cdot \Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \|\vec{D}^{(i \cdot \Delta t)} \mathcal{Y} \vec{D}^{(p-1)(i \cdot \Delta t)}\|_2, \quad (31)$$

其中 Δt 为一较小的时间段.

4 举例及结果分析

下面我们主要以 Lorenz 模型为例说明该算法的快速性及稳定性. Lorenz 模型的方程表述为

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (32)$$

由 (24) 式我们可构造出

$$M^1 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z + r & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix},$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} -1 - \sigma & -x & 0 \\ x & -\sigma - b & \sigma \\ -y & -z + r & -1 - b \end{bmatrix},$$

$$M^3 = -1 - \sigma - b.$$

利用 4 阶变步长龙格-库塔法同时对 (25) 和 (32) 式进行积分,并在积分一短时间 $\Delta t = 0.1$ 后进行数值重整,积分初始值 $\vec{D}^k(0)$ 可为任意非 0 向量,则由 (31) 式可得出该系统在不同参数 r ($11 < r < 400$, $\Delta r = 0.5$) 下的李雅普诺夫指数谱(另两参数为: $\sigma = 10$, $b = 8/3$),如图 1 所示.同时为便于比较我们还

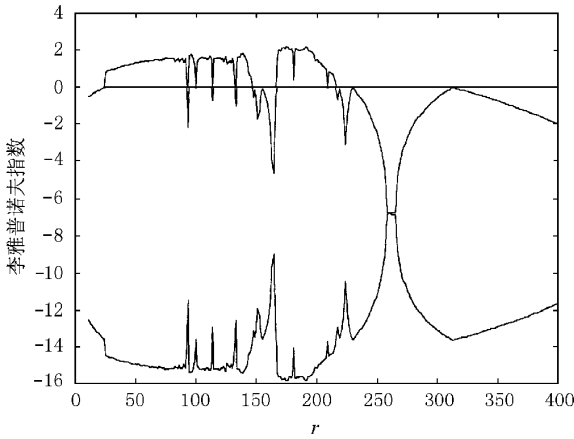


图 1 Lorenz 动力系统的李雅普诺夫指数谱图

作出了在相同参数范围及变化率下的准庞加莱图,如图 2 所示,以及在几个典型参数下的吸引子(图 3).图 2 中的 R 是将吸引子投影到 $x-y$ 平面上与直线 $x = y$ 的交点与原点的距离.在此不采用常见的庞加莱图^[21]是由于在有的参数下(如: $213 < r < 313$),系统会出现两个关于 z 轴对称但具有不同吸引域的吸引子(如图 3c)中的虚线和实线表示不同的吸引子),因此在作图时将容易产生遗漏(若仅从一个初始点出发),而利用距离则可避免这种情形.图 1 及图 2 表明,随控制参数 r ,当系统的最大指数值发生突变时(即由正值变到 0 或由 0 变到正值),

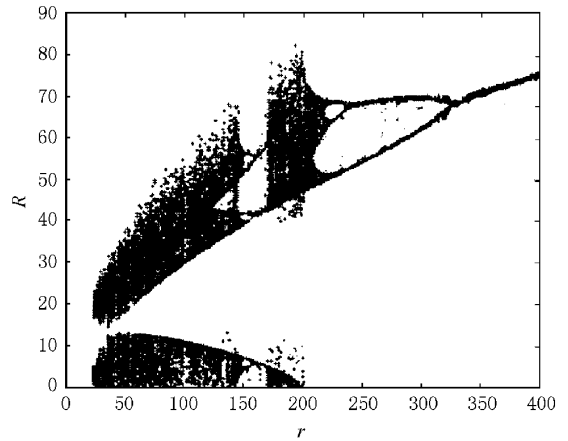


图 2 Lorenz 动力系统的准庞加莱图

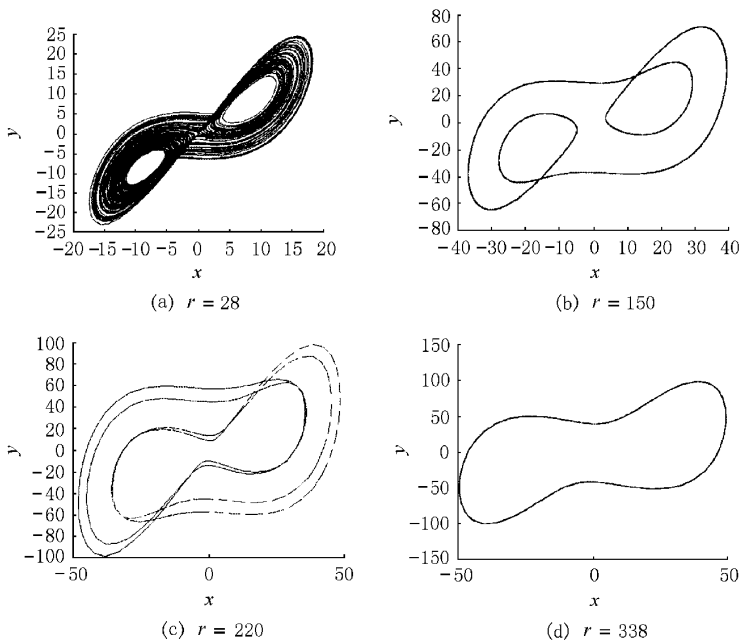


图 3 Lorenz 动力系统在不同参数下的吸引子在 $x-y$ 平面上的投影

Lorenz 模型将由混沌走向周期或由周期走向混沌. 类似于我们熟知的 Logistic 映射^[14]. 同时在混沌区域也有周期窗口出现(对应图 1, $\max\{l\}=0$ 时的 r 值). 事实上, 若设法提高 r 方向的分辨率, 这一现象将更为直观. 同样地, 由图 3 我们看到系统的吸引

子也随着指数的变化而在混沌与周期间变化. 此外, 我们还对常见的几种系统如: Henon 映射, Rossler 系统及超 Rossler 系统^[15]进行了计算, 该方法都迅速而准确地给出结果.

- [1] Heinx-OttoPeitgen, Chaos and Fractals (Springer Verlag, NewYork, 1992), Chapt. 12.
- [2] John Argyris, An Exploration of Chaos (Amsterdam, North-Holland, 1994), Chapt. 5.
- [3] L. M. Pecore, T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 821.
- [4] L. M. Pecore, T. L. Carroll, *Phys. Rev.*, **A44**(1991) 2374.
- [5] Alan Wolf *et al.*, *Physica*, **16D**(1985) 285.
- [6] J. P. Eckman, D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.*, **57**(1985) 617.
- [7] Govindan Rangarajan *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **80**(1998), 3743.
- [8] J. M. Greene, J. S. Kim, *Physica*, **24D**(1987) 213.
- [9] H. F. Von Bremen *et al.*, *Physica*, **D10**(1997) 1.
- [10] K. Geist *et al.*, *Prog. Theo. Phys.*, **83**(1990) 875.
- [11] Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette, *Analysis, Manifolds and Physics*(North-Holland, Amsterdam, 1977), p. 258.
- [12] X. K. Zhang, *Advanced Algebra*(Tsinghua University Press, Beijing, 1998) p. 22, 138 [in Chinese] 张贤科等, *高等代数学* (清华大学出版社, 北京, 1998), 第 22, 138 页.]
- [13] J. H. Wilkinsm, *The Algebraic Eigenvalue Problem*(Science Press, Beijing, 1987), Chapt. 1 [in Chinese] J. H. 威尔金森, *代数特征值问题* (科学出版社, 北京, 1987), 第一章.]
- [14] D. S. Wang, L. Cao, *Chaos, Fractal and Application* (Science and Technology University of China Press, Hefei, 1995), Chapt. 2 [in Chinese] 王东生、曹 磊, *混沌、分形及其应用* (中国科学技术大学出版社, 合肥, 1995), 第二章.]
- [15] O. E. Rossler, *Phys. Lett.*, **71A**(1979), 155.

A METHOD FOR COMPUTING LYAPUNOV EXPONENTS SPECTRA WITHOUT REORTHOGONALIZATION*

LAI JIAN-WEN ZHOU SHI-PING

(Department of Physics, Shanghai University, Shanghai 201800, China)

LI GUO-HUI XU DE-MING

(School of Communication and Information Engineering, Shanghai University, Shanghai 201800, China)

(Received 2 March 2000; revised manuscript received 11 July 2000)

ABSTRACT

We present a method for the computation of Lyapunov exponents without reorthogonalization. In the low dimension of system ($n < 5$), the equations needed in present algorithm is less than those in normal methods such as QR, SVD etc. This method is applicable to both discrete systems and continuous systems, and is still valid when the Lyapunov spectra is degenerate. Numerical analysis to Lorenz dynamical system indicates that the method converges quickly and steadily for arbitrary nonzero initial state.

Keywords: chaos, Lyapunov exponents, compound matrix, eigenvalue

PACC: 0545, 0547

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 69871016).