第 49 卷 第 12 期 2000 年 12 月
1000-3290/2000/49(12)/2394-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 12, December, 2000

托卡马克低混杂波电流驱动实验中低混杂波传播的解析分析*

石秉仁

(核工业西南物理研究院,成都市 432 信箱,成都 610041)

(2000 年 4 月 10 日收到;2000 年 5 月 3 日收到修改稿)

通过对小参量 $\delta=(\omega_{pe}^2/\omega^2)^{-1}$ 展开,导出了简化但普遍的低混杂波电流驱动(LHCD)参量状态下的低混杂波色散方程.讨论了环形效应(环向磁场的 R^{-1} 关系及磁面的 Shafranov 位移)引起的平行折射率的上移或下移及慢波与快波的模转换条件,得到一个关于低混杂波可以向等离子体内部传播的充分条件,它与 LHCD 实验中普遍观察到的密度极限现象有密切联系.预期的临界密度 $n_{ec}\propto f^{4/3}B^{2/3}A^{4/3}$($f$,$B$,$A$ 分别为波的频率、磁场强度和环径比),与圆截面托卡马克装置中 LHCD 实验结果较好地符合.关于波传播和平行折射率移动的理论结果可作为子程序用于 LHCD 的大型计算编码,使计算得到简化.

关键词:托卡马克,低混杂波电流驱动,密度极限

PACC:5235,5240,5255

1 引 言

低混杂波电流驱动(LHCD)是托卡马克反应堆非感应电流驱动的主要选择方案之一,除用来维持长电流脉冲外,近期实验中还用于产生具有反向磁剪切的'先进约束位形'[1,2].我国的两个主要托卡马克实验装置 HL-1M 和 HT-7 上已在这一领域开展研究多年[3,4],在建的两大装置 HL-2A 和 HT-7U 也将其列为主要研究方向.虽然关于 LHCD 的理论研究已开展多年,已有多个大型计算编码可用于确定波功率沉积和驱动电流剖面[5,6],但由于波功率是在多次穿越过程中逐渐沉积的,物理图象非常复杂,人们对很多重要的物理问题并未获得清晰的了解.仅就波传播而言,在 LHCD 参量状态下(即 $\omega>2\omega_{lh}$,ω_{lh}为低杂共振频率),不存在共振区域,而且也不存在一般意义上的截止区域,同时环形效应(主要是环向磁场的 R^{-1} 关系及磁面的 Shafranov 位移)可以引起平行折射率的上移或下移,这个问题本身已经非常复杂.数值模拟给出的波迹投影图是一堆重叠的曲线,很难从中看出清晰的物理图象.文献[7,8]试图进行解析分析,但限于静电近似,并且所分析的问题中等离子体参数限于 $\omega\approx\omega_{pi}$的情形.本文的目的是在更一般的条件下对局域色散关系进行简化,在此基础上研究波迹方程,进而研究波的传播性质,了解一些重要问题的物理图象.

2 局域色散关系的简化

与低混杂波加热情况不同,在托卡马克 LHCD 实验中采用较高的波频率,即 $\omega>2\Omega_{lh}$,其中

$$\omega_{lh} = \omega_{pi}/\sqrt{1+\omega_{pe}^2/\Omega_e^2} \tag{1}$$

是低混杂波频率.一般而言,波的传播特性可以用冷等离子体色散关系描述,我们将采用文献[5]中符号.包括快波和慢波的一般色散关系为

$$P_4 n_\perp^4 + P_2 n_\perp^2 + P_0 = 0, \tag{2}$$

其中 P_0,P_2,P_4 是介电张量的三个分量 $\varepsilon_\perp$,$\varepsilon_{/\!/}$,ε_{xy} 及平行折射率 $n_{/\!/}$的函数.将其解出

$$n_\perp^2 = \frac{-P_2 \pm \sqrt{P_2^2 - 4P_0P_4}}{P_4}, \tag{3}$$

"+"号对应于慢坡,"-"号对应于快波.对于 LHCD 实验,$P_4\neq0$,即不存在低混杂波共振条件.由于 ω_{pe}^2/ω^2 大于 10^2,其倒数可以作为展开小量,可以发现如下的量级关系:

$$\varepsilon_\perp\approx O(1),\ \varepsilon_{/\!/}\approx O(10^2-10^3),\ \varepsilon_{xy}\approx O(10^1).$$

* 国家自然科学基金(批准号:19975015)资助的课题.

保留最低一级，我们有

$$P_4 = \varepsilon_\perp = 1 + \omega_{pe}^2/\Omega_e^2 - \omega_{pi}^2/\omega^2, \quad (4)$$

$$P_2 = (\varepsilon_{/\!/} + \varepsilon_\perp)(n_{/\!/}^2 - \varepsilon_\perp) + \varepsilon_{xy}^2 \approx -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left[n_{/\!/}^2 - \varepsilon_\perp - \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2}\right], \quad (5)$$

$$P_0 = \varepsilon_{/\!/}\left[(n_{/\!/}^2 - \varepsilon_\perp)^2 - \varepsilon_{xy}^2\right] \approx \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^4}\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2}. \quad (6)$$

利用这些近似式，快慢波的色散关系可以简化为

$$n_\perp^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 \varepsilon_\perp} F_f(n_{/\!/}, r, \theta), \quad (7)$$

$$n_\perp^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 \varepsilon_\perp} F_s(n_{/\!/}, r, \theta), \quad (8)$$

其中 r, θ 是局部坐标系的径向半径和极向角.

$$F_{s,f}(n_{/\!/}, r, \theta) = \frac{1}{2}\left[\left(n_{/\!/}^2 - \varepsilon_\perp - \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2}\right) \pm \sqrt{(n_{/\!/}^2 - n_{/\!/1}^2)(n_{/\!/}^2 - n_{/\!/2}^2)}\right], \quad (9)$$

$$n_{/\!/1,2} = \sqrt{\varepsilon_\perp} \mp \omega_{pe}/\Omega_e. \quad (10)$$

特别是，$n_{/\!/} > n_{/\!/2}$ 对应于所谓的波的可近性条件. 下面将指出，满足可近性条件的波并不一定能传入等离子体内部.

当 $n_{/\!/}^2 \gg n_{/\!/2}^2$ 且 $\omega_{pe}/\Omega_e < 1$ 时，快慢波色散关系可进一步简化为

$$F_s \approx n_{/\!/}^2 - \varepsilon_\perp - \Omega_{pe}^2/\Omega_e^2, \quad (11)$$

$$F_f \approx \frac{\varepsilon_\perp \ \omega_{pe}^2/\Omega_e^2}{n_{/\!/}^2}. \quad (12)$$

此时，慢波色散关系基本上与静电波的色散关系

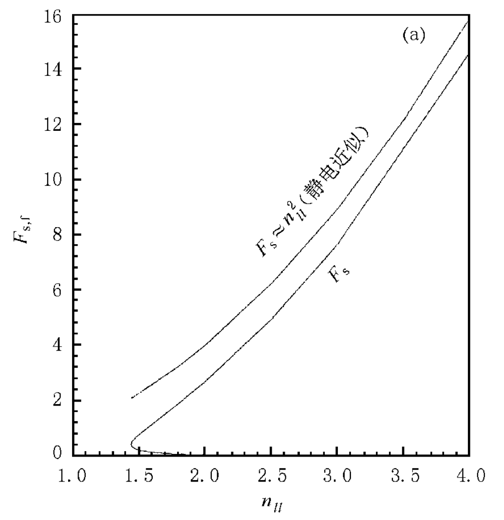
$$\varepsilon_\perp n_\perp^2 + \varepsilon_{/\!/} n_{/\!/}^2 = 0$$

一致[7,8]. 从图 1 关于 F_s 和 F_f 随 $n_{/\!/}$ 的变化中可以看出，这两个函数处在一条光滑的曲线的上下两侧，在 $n_{/\!/} > n_{/\!/2}$ 的区域，快、慢波完全分离，$n_{/\!/}$ 很大时，慢波的 $F_s \to n_{/\!/}^2$（静电近似）.

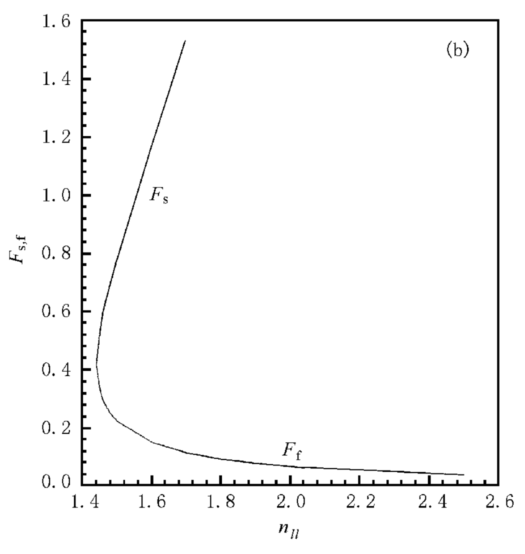
在满足可近性条件下，波的垂直折射率为实数且不会达到零值. 即在一般意义上（平板位形中）波并不会被截止. 但在环形系统等离子体中波不可能到达磁轴附近，这是因为环形效应会改变极向模数 m，当 m 很大时，径向波数（或 n_r）将变为零. 文献中称

$$n_r = 0 \quad (13)$$

的空间点为 whispering-gallery 点（简写为 WG 点）[7,8]. 其物理图象是，在该点附近区域，波迹主要沿极向运动. 可以看到，由于慢波的垂直折射率远大于快波的垂直折射率，因此慢波的WG点的位置远



(a)为 $F_{s,f}$ 随 $n_{/\!/}$ 的变化



(b)为(a)的部分放大图

图 1

较快波的深入等离子体内部. 对 $n_{/\!/}^2 \gg 1$ 情形，慢波的 WG 点位置由

$$r_{WG} = \frac{cm\sqrt{\varepsilon_\perp}}{\omega_{pe} n_{/\!/}} \approx \frac{\omega R q}{\omega_{pe}}. \quad (14)$$

这里已利用平行折射率的定义

$$n_{/\!/} = \frac{c}{\omega R}(n + m/q), \quad (15)$$

R 和 q 分别为环的大半径及安全因子. 快波 WG 点位置近似为

$$r_{WG} \approx \frac{cm\Omega_e n_{/\!/}}{\omega_{pe}^2} \approx \frac{\omega R q}{\omega_{pe}}\left(n_{/\!/}^2 \frac{\Omega_e}{\omega_{pe}}\right). \quad (16)$$

即快波的 WG 点半径是慢波的 $q n_{/\!/}^2 \Omega_e/\omega_{pe}$ 倍. 一般

而言，慢波可以进入 $q=1$ 磁面内部，而快波在非常靠近表面的区域. 由于靠近表面的区域中密度涨落很大，会对低混杂波造成强烈的散射[9]. 所以，快波通道中的波功率将很快损失.

现在讨论因平行折射率减小(通常是因为极向模数 m 负向增大所致)而使可近性条件破坏的情形. 当

$$n_{/\!/} = n_{/\!/2} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}} + \omega_{\mathrm{pe}}/\Omega_{\mathrm{e}} \tag{17}$$

时，快慢波的垂直折射率趋于相等，都等于

$$n_{\perp}^2 = \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}\,\omega^2}\frac{\omega_{\mathrm{pe}}}{\Omega_{\mathrm{e}}}. \tag{18}$$

满足上述条件的区域称波的汇合点(confluence point)，在该点附近，慢波和快波可以发生模转换. 汇合点的位置要由极向模数 m 的变化确定. 如果波进入等离子体时 $m=0$，记 $n_{/\!/0}=n/R$. 对 $m<0$，当

$$|m| = \frac{\omega}{c}Rq\left[n_{/\!/0} - \left(\sqrt{\varepsilon_{\perp}} + \omega_{\mathrm{pe}}/\Omega_{\mathrm{e}}\right)\right] \tag{19}$$

时发生汇合. 在汇合点附近，慢波功率的一部分模转换到快波通道. 根据上面的讨论，这部分功率实际上不能用于电流驱动. 模转换的效率要由波的高阶微分方程确定，本文不包括这部分内容.

3 波迹方程

为导出简化的波迹方程，定义慢波的 Hamilton 量为

$$H = k_{\perp}^2 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\varepsilon_{\perp} c^2}F_{\mathrm{s}}(n_{/\!/}, r, \theta). \tag{20}$$

可以一般地写出关于波迹在 r,θ 面上的投影及极向模数变化的两个联立方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{k_r}{\left[(m/r^2) - (\omega_{\mathrm{pe}}^2/2\varepsilon_{\perp} c^2)\partial F_s/\partial m\right]}, \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = -\frac{\partial H/\partial\theta}{2k_{\mathrm{r}}}. \tag{22}$$

一般情况下，上述方程的解要通过数值积分得出. 但在两种有意义的极限条件下，可以进行解析分析. 第一种情形是 $n_{/\!/}^2 \gg 1$，这时，慢波色散关系化为静电波色散关系：$F_{\mathrm{s}} \approx n_{/\!/}^2$，这已在文献[7,8]中详细分析(但限于 $\omega \approx \omega_{\mathrm{pi}}$ 情形)，其主要结论是，由于环形效应，慢波的平行折射率在多次穿越等离子体的过程中将不断地上移，直到波功率谱 $P(n_{/\!/})$ 的峰值位置移至可以与大量热电子发生共振吸收，波的大部分功率被衰减. 这个问题又称波谱空缺的填补，解释了为什么从波导口发射的峰值处在 $n_{/\!/}$ 较低处的功率谱(通常装置中选取 $1.4<n_{/\!/0}<2.4$)可以有效地驱动环向电流. 文献[7,8]中的结果与数值模拟的结果比较接近.

本文将着重讨论另一问题，即平行折射率的下移及其引起的物理效应. 数值模拟中早已发现这种下移现象，它可能是密度提高时波功率不能沉积到等离子体内部区域的原因[10]. 波谱下移不能再用静电近似描述，波迹方程的求解一般要做一些不很复杂的数值计算. 但当平行折射率接近可近性条件的情形，可得(主要考虑了主磁场的 R^{-1} 依赖关系)

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} \approx \frac{n_{/\!/}^2}{2\sqrt{2}}\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\varepsilon_{\perp} c^2 k_{\mathrm{r}}}(n_{/\!/}^2 - n_{/\!/2}^2)^{-1/2}\frac{r}{R}\sin\theta, \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} \approx -\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{4\sqrt{2}k_{\mathrm{r}}\varepsilon_{\perp} c\omega Rq}\left(\frac{\omega_{\mathrm{pe}}}{\Omega_{\mathrm{e}}}\right)^{1/2}(n_{/\!/}^2 - n_{/\!/2}^2)^{-1/2}. \tag{24}$$

上述方程表明，在平行折射率下降到接近临界值时，极向模数和极向角都随小半径迅速变化. 由 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}\theta$ 方程可以得出

$$\delta m \approx -\frac{2\omega}{c}\int \mathrm{d}\theta(n_{/\!/}^2 Rq\sin\theta). \tag{25}$$

对典型 LHCD 实验参量，只要波迹在下半平面顺时针方向或在上半平面逆时针方向转动一定角度，使 $\delta(\cos\theta)\approx -1$ 量级，δm 的变化很易达到(-100). 从(23)和(24)式可知，密度增大时 m 和 θ 随半径的快变化按 $n_{\mathrm{e}}^{5/4}$ 定标. 另一方面，平行折射率的临界值随密度加大，两者结合，在密度加大时就容易发生平行折射率下降现象，引起慢波向快波的模转换. 这很可能是出现密度极限的原因.

4 波可透入等离子体内部区域的充分条件和密度极限

回到波传播问题，考虑接近模转换点时情形. 模转换点的径向位置为

$$r_{\mathrm{c}} = |m|\,c\sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}^{1/2}\Omega_{\mathrm{e}}}{\omega_{\mathrm{pe}}^3}} \approx \frac{|m|\,c\Omega^{1/2}}{\omega_{\mathrm{pe}}^{3/2}}. \tag{26}$$

利用(19)式，可得

$$\frac{r_{\mathrm{c}}}{a} = \frac{\omega\Omega_{\mathrm{e}}^{1/2}}{\omega_{\mathrm{pe}}^{3/2}}\frac{Rq}{a}(\Delta n_{/\!/}), \tag{27}$$

其中 $\Delta n_{/\!/} = n_{/\!/0} - n_{/\!/2}$，对于每一束波，可以透入等

离子体内部区域的充分条件为

$$n_{/\!/0} > n_{/\!/2} + Cg(x), \tag{28}$$

上式等号右方是 $x = r/a$ 的函数,其中

$$C = \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^{3/2}(0)}{\Omega_{\mathrm{e}}^{1/2}\omega}\frac{a}{Rq_0}, \tag{29}$$

$$g(x) = x\frac{n_{\mathrm{e}}(x)/n_{\mathrm{e}0}}{q(x)/q_0}, \tag{30}$$

宗量为零或下标为零都对应于磁轴处的值. 这里所说的充分条件的含义是:满足条件(28)式的波束一定能向内部传送,而不满足的波束虽也可能进入内部,但由于环形效应可能产生的平行折射率下移,这类波束有很大的概率会转换成快波. 对给定的密度和安全因子剖面,(28)式由图 2 所示. (28)式等号右方函数具有极大值. 显然,对于 $n_{/\!/0}$ 大于该极大值的波束,可以透入等离子体内部.

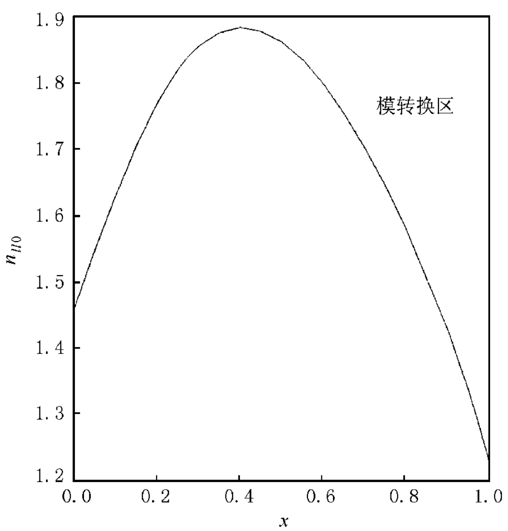


图 2　模转换点的位置　对应参量为 $n_{\mathrm{e}}(x) = 1\times10^{13}\ \mathrm{cm}^{-3}\times(1-0.9x^2)$;$q(x) = 1 + 2.5x^2$;$B = 2.5\mathrm{T}$;$f = 2.45\ \mathrm{GHz}$

函数 $g(x)$ 在 $x = 0.5$ 附近达到极大值,其值约为 0.25. 因此(28)式可以近似地表为

$$\Delta n_{/\!/} > 0.25C, \tag{31}$$

对应地可以定义一个临界密度

$$n_{\mathrm{ec}} = 0.06 f^{4/3} B^{2/3} (Aq_0)^{4/3} (\Delta n_{/\!/})^{4/3}, \tag{32}$$

式中波频率以 GHz 计,磁场强度以 T 计,A 为环径比. 该关系式不仅可以定性地说明提高频率和磁场有利于提高临界密度,而且具有定量可比性. 不过,对具体的装置,平行折射率的改变量 $\Delta n_{/\!/}$ 是不容易简单确定的. 一般 LHCD 实验中波功率的选取原则是:波束在通过边缘附近的消散层(密度满足 $\varepsilon_{/\!/} = 0$)时被反射部分要尽可能小,同时又满足可近性. 关于平行折射率的波功率谱的宽度约为 $\delta n_{/\!/} \approx 0.5$. 因此,$\Delta n_{/\!/}$ 有一定的可变范围. 表 1 是给定 $q_0 = 1$,$\Delta n_{/\!/} = 1$ 时对一些圆截面托卡马克装置计算出的临界密度值,与实验的符合程度相当好(理论为中心密度,实验为平均密度).

表 1　一些托卡马克 LHCD 实验的临界密度

装置名	R/a	B/T	f/GHz	$n_{\mathrm{ec}}/10^{13}\mathrm{cm}^{-3}$	$\bar{n}_{\mathrm{e}}/10^{13}\mathrm{cm}^{-3}$
HL-1M[3]	4	2.5	2.45	2.3	2
HT-7[4]	4.5	2.2	2.45	2.5	2
FT-U[11]	3	7	8	15.2	>10
TS[12]	2.95	4.5	3.7	3.4	3
ASDEX[13]	3.3	4	2.45	2.4	2
ALCATOR[14]	3.76	10	4.6	10.3	10

但是,对于 JET,JT-60U 种类具有拉长截面的位形,由上述公式得出的临界密度明显低于实验值. 例如,JET 上最近的实验表明,在 $\bar{n}_{\mathrm{e}} = 1\times10^{13}\ \mathrm{cm}^{-3}$ 时,低杂波功率在规范化磁面 $\psi < 0.7$ 内的功率沉积达到 100%,而当 $\bar{n}_{\mathrm{e}} > 3.5\times10^{13}\ \mathrm{cm}^{-3}$ 时,该区域内的功率沉积下降到小于 25%[15]. 即 JET 上 LHCD 的临界密度应在 $3\times10^{13}\ \mathrm{cm}^{-3}$ 附近,但由上述公式得出的临界密度仅为 $1\times10^{13}\ \mathrm{cm}^{-3}$. 因为我们没有考虑拉长截面效应(此时极向模数 m 随极向角的变化呈振荡型),这是值得进一步研究的问题.

本文关于慢波传播的简化方程可以作为子程序用于完整的 LHCD 计算编码的波束计算.

[1] F. X. Soldner, *Plasma Phys. Contr. Fusion*, **39**(1997), B353.
[2] ITER Phys. Expert Group, *Nucl. Fusion*, **39**(1999), 2513.
[3] Ding Xuan-tong, Wang En-you, Zheng Yong-zheng *et al.*, *Nucl. Fusion and Plasma Phys.*, **14**(2)(1994), 12 (in Chinese) [丁玄同、王恩跃、郑永真等,核聚变与等离子体物理,**14**(2)(1994),12].
[4] G. L. Kuang, W. H. Xu, X. Q. Zhang *et al.*, *Chin. Phys. Lett.*, **15**(1998), 435.
[5] P. T. Bonoli, R. C. Englade, *Phys. Fluids*, **29**(1996), 2937.
[6] V. Fuches, P. T. Bonoli, I. P. Shkasovsky *et al.*, *Nucl. Fusion*, **35**(1995), 1.
[7] A. Cardinali, F. Romanelli, *Phys. Fluids*, **29**(1986), 810.
[8] E. Barbato, F. Romanelli, *Phys. Fluids*, **B2**(11)(1990), 359.
[9] P. T. Bonoli, E. Ott, *Phys. Fluids*, **26**(1982), 359.

[10] S. W. Xue, B. R. Shi, Q. D. Gao, X. D. Li, *Nucl. Fusion and Plasma Phys.*, **15**(3)(1995), 21(in Chinese)[薛思文、石秉仁、高庆弟、李晓东,核聚变与等离子体物理,**15**(3)(1995),21].
[11] V. Pericoli-Ridolfini, E. Barbato, S. Cirant *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **82**(1999), 93.
[12] D. Van Houtte *et al.*, *Nucl. Fusion*, **33**(1993), 137.
[13] F. Leuterer *et al.*, *Nucl. Fusion*, **31**(1991), 315.
[14] M. Porkolab *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **53**(1983), 450.
[15] V. Pericoli-Ridolfini, E. Ekedahl, Y. Baranov *et al.*, *Plasma Phys. Contr. Fusion*, **39**(1997), 1115.

ANALYTIC STUDY OF LOWER HYBRID WAVE PROPAGATION IN TOKAMAK LHCD EXPERIMENTS*

SHI BING-REN
(*Southwestern Institute of Physics, P. O. Box 432, Chengdu 610041, China*)
(Received 10 April 2000; revised manuscript received 3 May 2000)

ABSTRACT

General but simplified dispersion relation for the lower hybrid wave in low hybrid current drive (LHCD) regime is derived by expanding technique through the small parameter $\delta = (\omega_{pe}^2/\omega^2)^{-1}$. The upward and the downward shifts of the parallel refractive index, and the relevant mode conversion due to toroidal effects (such as the R^{-1} dependence of the toroidal magnetic field and the Shafnanov shift of magnetic surfaces) are discussed. A sufficient condition for the wave that is possible to penetrate into the inner region of the plasma column is obtained, which has a relationship with the experimentally observed LHCD density limit. A scaling about the critical density is found to be $n_{ec} \propto f^{4/3} B^{2/3} A^{4/3}$, with f, B, A being the wave frequency, the magnetic field and the aspect ratio, respectively. There exists a quite good agreement between theory and experiments. The simplified equations for wave propagation can be used as a subroutine in a complete LHCD code.

Keywords: tokamak, LHCD, density limit
PACC: 5235, 5240, 5255

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19975015).