

# 平面横电磁波模的初值问题

陈 睿

(武汉市第二中学, 武汉 430010)

(2000 年 4 月 16 日收到, 2000 年 7 月 10 日收到修改稿)

经典理论所描述的电场和磁场处处同相的平面电磁波模并不存在. Maxwell 方程组的解依赖于电磁场的初始值或边界条件, 根据不同的初始条件解得的平面电磁波模是不同的. 结果表明, 平面电磁波是横波, 在不同的位置, 由变化的电场激发的磁场或由变化的磁场激发的电场振幅不同, 电场与磁场的相位差也不同.

关键词: Maxwell 方程组, 最优微分方程, 初始条件, 平面电磁波

PACC: 4110H

## 1 引 言

Maxwell 方程组揭示了变化的电场和磁场可以互相激发, 在空间运动传播形成电磁波, 但未能指明由变化的电场激发磁场或由变化的磁场激发电场之因果效应的时间与空间间隔, 在远离辐射源某点邻域的电场, 究竟是由辐射源在前一个时刻的电场传播而来的呢, 还是由周围空间何处变化的磁场在哪个时刻激发的呢? 于是存在着有关电磁波本性等问题论述的模糊概念. 经典电磁波理论讨论时谐电磁波, 首先选定了单色平面电磁波的表达形式

$$\begin{aligned} E(x, t) &= E(x) e^{-i\omega t}, \\ B(x, t) &= B(x) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (1)$$

导出时谐情形下的 Maxwell 方程组<sup>[1, 2]</sup>, 从而确定电场与磁场的关系为

$$B(x, t) = \sqrt{\mu\epsilon} n \times E, \quad (2)$$

$n$  为传播方向的单位矢量. 由此得到一些结论:

- 1) 电磁波为横波,  $E$  和  $B$  都与传播方向垂直;
- 2)  $E$  和  $B$  相互垂直,  $E \times B$  沿波传播方向;
- 3)  $E$  和  $B$  同相, 真空中振幅之比等于光速.

这种电场与磁场处处同相的平面电磁波模实际上不能产生或存在. 表征电磁波模的电场与磁场的表达式自然要满足 Maxwell 方程组, 但满足

Maxwell 方程组的电场磁场表达式未必构成一种电磁波模. 因为 Maxwell 方程组是微积分方程组, 微积分方程的解不仅仅决定于微分方程的形式, 还依赖于定解条件<sup>[3]</sup>, 由于定解条件的不同, 甚至会带来关于同一微积分方程完全不同的解法. 无界空间里 Maxwell 方程组的定解条件就是初始条件, 即要求解初值问题, 但经典理论根据 Maxwell 方程组确定平面电磁波模(1)和(2)式的过程似乎说明定解 Maxwell 方程组与初始条件无关. 另一方面, 变化的电场产生磁场, 变化的磁场产生电场, 如果  $E$  和  $B$  同相, 就会构成零时刻困难! 在  $LC$  振荡电路中, 平行板电容器充电稳定后, 空间任何区域的电场都恒定不变, 这时电场不激发磁场, 电场处处最大而磁场处处为零, 通常以电流开始发生振荡的时刻为时间的起点, 即零时刻. 反之, 如果空间任何区域的磁场不发生变化, 磁场不激发电场, 这时磁场处处最大而电场处处为零, 同样构成零时刻困难. 可见,  $E$  和  $B$  不能处处同时到达最大值或同时消失, 经典理论用以描述平面电磁波模的两个方程(1)和(2)不能够代表一种客观存在的或可能产生的电磁波模<sup>[1]</sup>.

## 2 产生平面电磁波的物理背景

确定无界空间里的某种电磁波模, 必须根据初

<sup>1)</sup>文献[3]第 613 页中运用环量积分“证明”了  $H_z = \epsilon_0 E_z v$  这一与初始条件相矛盾的结果. 一般而言, 只有在轴对称性或球对称性下才能运用通量或环量积分求解电磁场矢量的大小, 而平面电磁波不具备这样的对称性.

始条件定解 Maxwell 方程组. 初始条件的给出, 总是离不开具体的物理背景. 尽管电磁波可以独立于运动电荷或电流, 但是要在一定时间内维持周围空间里电磁波的存在, 则依赖于发射源做加速运动的电荷或变化的电流. 没有电视发射塔的正常工作, 附近空间里就没有它预定发射的电磁波. 发射源的电荷变化规律, 给出了自由空间里 Maxwell 方程组的初始条件, 并决定了电磁波的模式.

什么是平面电磁波呢? 设想两个有限宽足够长的矩形金属板  $P$  和  $M$  互相平行且靠得很近, 矩形板的平面与  $y$  轴垂直, 左端在坐标原点, 接有输出电压随时间变化的电源 (见图 1). 于是变化的电场在金属内部由左向右传播, 从而引起两平行金属板上任意位置电荷分布的不断改变, 板间产生方向与

$y$  轴平行的变化电场沿  $x$  轴正方向传播. 当矩形板靠得很拢的时候, 可以认为电场对  $y$  轴均匀分布; 因电场以光速传播, 可忽略电场对  $z$  轴的分布; 讨论超导状态, 传导过程中电磁波的能量不转化为焦耳热而损耗. 于是两平行板间的电场构成理想的平面电波模式, 即平面自由电波.

引入指数形式的复数表达物理量常常带来很方便<sup>[4]</sup>, 然而物理量的可测性起源于实数域, 最终也归结于实数域, 此处用实函数表达平行板间的变化电场

$$E = e_y E_y(x, t), \quad (3)$$

其中  $e_y$  表示沿  $y$  轴正方向的单位矢量, 以下类同. 产生时谐平面电磁波主要有两种情形 (见图 2).

第一种情形. 两平行板间所接交变电源的输出

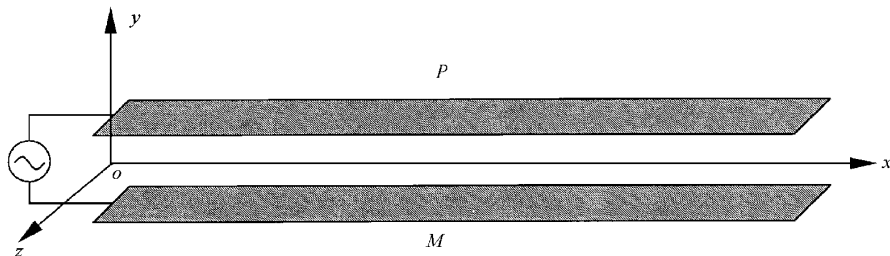


图 1 足够长平行板电容器间沿  $x$  轴正方向传播的平面电磁波模

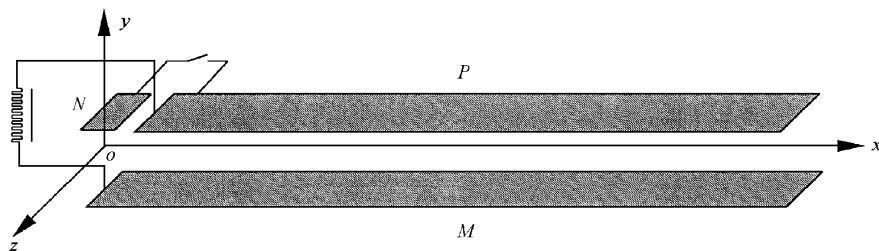


图 2 LC 电路中足够长平行板电容器间的平面电磁波模

电压呈正弦变化规律  $u(t) = U_m \sin \omega t$ , 在  $t = 0$  的时刻, 两平行板间及周围空间里的磁场为零. 如果不考虑平行板的边缘效应, 这一物理背景给出定解条件为

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(t = 0) &= 0, \\ E(x, t) &= e_y E_m \sin \omega(t - x/c). \end{aligned} \quad (4)$$

第二种情形. 将上述金属板  $P$  靠近原点沿垂直于  $x$  轴的方向铸开, 分成  $P$  和  $N$  两部分, 在  $P$  和  $M$  两平行板间接一个电感线圈, 先给由  $N$  和  $M$  所组成的平行板电容器充电, 然后接通  $P$  和  $N$ ; 使由电感线圈产生的磁场几乎不辐射出去, 类似于平行板  $P$  不铸开而在左端接上呈余弦变化规律的交变电

源  $u(t) = U_m \cos \omega t$ , 空间里的电磁场是由平行板间的振荡电场产生的; 在  $t = 0$  的时刻, 两平行板间及周围空间里的磁场为零. 不讨论平行板边界问题, 这一物理背景给出定解条件

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(t = 0) &= 0, \\ E(x = 0) &= e_y E_m \cos \omega(t - x/c). \end{aligned} \quad (5)$$

不同的定解条件决定了平行板间由变化的电场产生磁场的不同模式. 非均匀变化的电场与磁场可以相互激发, 但是从这些具体物理背景可以看到, 上述电磁波的产生实际上有其因果关系, 是由波源变化的电场引起的. 当然, 同样可以用变化的磁场作为电磁波源确定某种平面电磁波模式. 在无界空间里,

无论以后辐射源是否撤离,电磁场不会回头,初始条件是唯一的.

### 3 Maxwell 方程组平面波模的通解

电磁波在真空中以光速传播,电场和磁场的表达式满足 Maxwell 方程组

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

由此可导出关于  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B}$  的波动方程

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

(6) 和 (7) 式都是矢量微分方程,可以化为最优微分方程<sup>[5]</sup>. 方程组 (6) 写成分量的形式为

$$\begin{aligned} \left( e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (e_x E_x + e_y E_y + e_z E_z) \\ = -\frac{\partial}{\partial t} (e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z), \\ \left( e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z) \\ = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (e_x E_x + e_y E_y + e_z E_z), \\ \left( e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (e_x E_x + e_y E_y + e_z E_z) = 0, \\ \left( e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

根据方程 (3) 确定的平面波,有

$$E_x = E_y = 0, \quad \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

可见 (8) 式中的第三式是成立的,另三式简化为

$$\begin{aligned} e_z \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -e_x \frac{\partial B_x}{\partial t} - e_y \frac{\partial B_y}{\partial t} - e_z \frac{\partial B_z}{\partial t}, \\ e_x \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) &+ e_y \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\ &+ e_z \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = e_y \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

由第一行三个方程得到

$$\begin{aligned} B_x &= B_x(x, y, z), \quad B_y = B_y(x, y, z), \\ B_z &= a_z(x, y, z) - \int \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} dt, \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $a_z(x, y, z)$  是偏积分“常数”. 于是磁场的表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= e_x B_x(x, y, z) + e_y B_y(x, y, z) \\ &+ e_z \left[ a_z(x, y, z) - \int \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} dt \right], \end{aligned} \quad (13)$$

当然,  $\mathbf{B}$  的表达式必须满足 (11) 式中的最后一个方程. 前述关于时谐电磁波的两种定解条件中磁场初值均为零,代入上式得到

$$B_x(y, z) = 0; \quad B_y(x, z) = 0. \quad (14)$$

再代入 (13) 式得到

$$\mathbf{B} = e_z \left[ a_z(x, y, t) - \int \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} dt \right]. \quad (15)$$

另一方面,由 (11) 式中的第二行第二式积分又得到

$$B_z = b_z(y, z, t) - \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} dx + \int \frac{\partial B_x}{\partial z} dx,$$

其中  $b_z(y, z, t)$  是偏积分“常数”. 磁场的表达式形式上可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= e_x B_x(y, z) + e_y B_y(x, z) + e_z \left[ b_z(x, y, z) \right. \\ &\left. - \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t} dx + \int \frac{\partial B_x}{\partial z} dx \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

同样由初始条件,得到 (14) 式,因此

$$\mathbf{B} = e_z \left[ b_z(y, z, t) - \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t} dx \right]. \quad (17)$$

(15) 与 (17) 对时谐电磁波是等价的,这两式代表由电场激发平面电磁波的 Maxwell 方程组的通解. 前面已说明  $\mathbf{E} \perp \mathbf{v}$ , 这两个结果又说明了  $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} \perp \mathbf{v}$ , 因此平面电磁波是横波. 根据 (11) 式也可以推出电场波动方程的标量形式,无界空间里初值问题常用 d'Alembert 解. 方程 (3) 和 (15) 及初始条件决定了由变化的电场激发磁场的两种不同的时谐平面波. 同理,如果给定平面磁场波模,就可以求出平面电场波模的微积分表达式.

## 4 由初始条件确定的平面电磁波模

根据定解条件(4)式得到

$$\begin{aligned} E &= e_y E_m \sin \alpha(t - x/c), \\ \mathbf{B} &= e_z \left[ a_z(x, y, t) - \int \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} dt \right], \\ \mathbf{B}(t=0) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

解得到

$$\mathbf{B} = e_z (E_m/c) [\sin \alpha x/c + \sin \alpha(t - x/c)].$$

可见,由时谐电场激发的时谐磁场在空间不同的位置振幅不同.这种平面电磁波模为

$$\begin{aligned} E &= e_y E_m \sin \alpha(t - x/c), \\ \mathbf{B} &= e_z (E_m/c) [\sin \alpha x/c + \sin \alpha(t - x/c)]. \end{aligned} \quad (19)$$

电场与磁场的相位差也是位置的函数.

1) 在  $x = n\lambda = ncT$ , 即沿波传播方向距波源整数倍波长处,

$$E = e_y E_m \sin \omega t, \quad \mathbf{B} = e_z (E_m/c) \sin \omega t;$$

2) 在  $x = (2n + 1)\lambda/2 = (2n + 1)cT/2$ , 即沿波传播方向距波源奇数倍半波长处,

$$E = -e_y E_m \sin \omega t, \quad \mathbf{B} = -e_z (E_m/c) \sin \omega t.$$

可见在沿电磁波传播方向距波源半波长的整数倍处, 电场与磁场同相. 对于选定的坐标轴方向, 电场与磁场同时达到零, 同时达到正方向或反方向的最大值.

3) 在  $x = (n + 1/4)\lambda = ncT + cT/4$ , 即沿电磁波传播方向任意整数倍波长位置前四分之一波长处,

$$E = -e_y E_m \cos \omega t, \quad \mathbf{B} = e_z (E_m/c) (1 - \cos \omega t).$$

磁场的最大值为  $2E_m/c$ . 对于选定的坐标轴方向, 当电场正向达到最大值时, 磁场正向达到最大值; 当电场反向达到最大值时, 磁场为零; 当电场为零时, 磁场正向达到半振幅.

4) 在  $x = (n + 3/4)\lambda = ncT + 3cT/4$ , 即沿电磁波传播方向距波源任意整数倍波长位置前四分之三波长处,

$$E = e_y E_m \cos \omega t, \quad \mathbf{B} = e_z (E_m/c) (-1 + \cos \omega t).$$

磁场的最大值为  $2E_m/c$ . 对于选定的坐标轴方向, 当电场正向达到最大值时, 磁场为零; 当电场反向达到最大值时, 磁场反向达到最大值; 当电场为零时, 磁场反向达到半振幅.

根据定解条件(5)式得到

$$\begin{aligned} E &= e_y E_m \cos \alpha(t - x/c), \\ \mathbf{B} &= e_z \left[ a_z(x, y, t) - \int \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} dt \right], \\ \mathbf{B}(t=0) &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

解得到

$$\mathbf{B} = e_z (E_m/c) [-\cos \alpha x/c + \cos \alpha(t - x/c)]. \quad (21)$$

这种平面电磁波模为

$$\begin{aligned} E &= e_y E_m \cos \alpha(t - x/c), \\ \mathbf{B} &= e_z (E_m/c) [-\cos \alpha x/c + \cos \alpha(t - x/c)]. \end{aligned} \quad (22)$$

磁场的振幅是位置的函数.

1) 在  $x = n\lambda = ncT$ , 即沿波传播方向距波源整数倍波长处,

$$\begin{aligned} E &= -e_y E_m \cos \omega t, \\ \mathbf{B} &= e_z (E_m/c) (-1 + \cos \omega t). \end{aligned}$$

2) 在  $x = (2n + 1)\lambda/2 = (2n + 1)cT/2$ , 即距波源奇数倍半波长处,

$$\begin{aligned} E &= -e_y E_m \cos \omega t, \\ \mathbf{B} &= e_z (E_m/c) (1 - \cos \omega t). \end{aligned}$$

可见,沿电磁波传播方向距波源整数倍波长处前后二分之一波长位置, 磁场与电场不同相, 电场为零, 磁场并不为零, 磁场为零时, 电场达到最大值.

3) 在  $x = (n + 1/4)\lambda = ncT + cT/4$ , 即沿电磁波传播方向距波源任意整数倍波长位置前四分之一波长处,

$$\begin{aligned} E &= e_y E_m \sin \omega t, \\ \mathbf{B} &= e_z (E_m/c) \sin \omega t. \end{aligned}$$

4) 在  $x = (n + 3/4)\lambda = ncT + 3cT/4$ , 即沿电磁波传播方向距波源任意整数倍波长位置前四分之三波长处,

$$\begin{aligned} E &= -e_y E_m \sin \omega t, \\ \mathbf{B} &= -e_z (E_m/c) \sin \omega t. \end{aligned}$$

即在沿波传播方向距波源整数倍处前后四分之一波长的位置, 电场与磁场同相, 磁场取最小的振幅.

总之, Maxwell 方程组解的具体形式决定于定解条件, 定解条件不同, 电磁波模也不同, 这是符合逻辑的. 平面电磁波是横波, 尽管电场与磁场振荡的频率相同, 但并不处处同相, 电场与磁场之比不是一个常量, 在空间不同的位置, 磁场的振幅是不同的, 真空中电场的振幅与磁场的振幅之比最大为  $c$ , 最

小为  $c/2$ . 可见, 经典理论所描述的平面电磁波模  
(1)和(2)式是不成立的, 有关平面电磁波问题的讨  
论<sup>[6]</sup>应当以客观存在的波模作为基础.

- [ 1 ] S. H. Guo, *Electrodynamics* ( second edition ) Higher Education Publishing Lis. Beijing, 1997 ) p. 138 ( in Chinese ) 郭硕鸿, *电动力学* ( 第二版 ) 高等教育出版社, 北京, 1997 ) , 第 138 页 ]
- [ 2 ] R. D. Landau *et al.* , *Field Theory* ( People Education Publishing Lis. , Beijing , 1959 ) p. 132 ( in Chinese ) R. D. 朗道, E. M. 栗弗席兹著, 任 朗等译, *场论* ( 人民教育出版社, 北京, 1959 ) , 第 132 页 ]
- [ 3 ] C. B. Liang *et al.* , *Electromagnetics* ( People Education Publishing Lis. , Beijing , 1980 ) p. 606 ( in Chinese ) 梁灿彬等, *电磁学* ( 人民教育出版社, 北京, 1980 ) , 第 606 页 ]
- [ 4 ] R. Chen , *College Physics* , 6 ( 1987 ) , 41 ( in Chinese ) 陈睿, *大学物理* , 6 ( 1987 ) 41 ]
- [ 5 ] R. Chen , *Chinese J. Engineering Mathematics* , 17 ( 2000 ) , 82 ( in Chinese ) 陈睿, *工程数学学报* , 17 ( 2000 ) 82 ]
- [ 6 ] Q. C. He *et al.* , *Acta Physica Sinica* , 48 ( 1999 ) , 1044 ( in Chinese ) 贺奇才等, *物理学报* , 48 ( 1999 ) , 1044 ]

## THE PROBLEM OF INITIAL VALUE FOR THE PLANE TRANSVERSE ELECTROMAGNETIC MODE

CHEN RUI

( No. 2 Middle School , Wuhan 430010 , China )

( Received 16 April 2000 ; revised manuscript received 10 July 2000 )

### ABSTRACT

There actually does not exist the plane electromagnetic wave described by sutra theory that electric field and magnetic field are in phase everywhere. The solution of Maxwell equations depends on the original value of electromagnetic field or boundary conditions. According to different fixed-solution conditions, the plane electromagnetic modes obtained are different. The results indicate that the plane electromagnetic wave is a transverse wave; at different positions, the amplitudes of periodically changing magnetic field blazed by periodically changing electric field are different, so are the amplitudes of periodically changing electric field blazed by periodically changing magnetic field. The phase difference between electric field and magnetic field is different too.

**Keywords** : Maxwell equations, the optimum differential equation, original condition, plane electromagnetic wave

**PACC** : 4110H