第 49 卷 第 2 期 2000 年 2 月
1000-3290/2000/49(02)/0177-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 49, No. 2, February, 2000

寻找变系数非线性方程精确解的新方法*

阮航宇[1)2)] 陈一新[2)]
[1)](宁波大学物理系,宁波 315211)
[2)](浙江大学近代物理中心,杭州 310027)
(1999 年 9 月 26 日收到)

将非线性方程的变系数看作与实际物理场具有相等地位的新变量,利用普遍的经典李群方法可以求解某些特殊类型的变系数方程,其解由相应的常系数方程的解表示. 以非线性薛定谔方程为具体例子,介绍了这种方法. 并给出了特例色散缓变光纤变系数非线性薛定谔方程的精确解.

PACC: 0220; 0230

1 引 言

非线性问题的求解是非线性科学中一项重要的工作. 众所周知非线性偏微分方程存在无限多解,而大部分能够较好描述实际物理问题的非线性方程又是变系数方程,所以要得到实际非线性方程的精确解是非常困难的工作. 虽然有不少求解非线性偏微分方程的方法,但对于变系数非线性偏微分方程,目前的研究手段只是停留在数值求解或近似求解.

最近,采用推广的对称群方法研究非线性方程对称性的研究报道令人很感兴趣[1—5]. 在这种方法中,势函数被作为新的独立变量,由此可得到保持原方程不变的新的推广对称群. 这些工作给了我们寻找变系数非线性偏微方程精确解的很好的启示.

如果我们把方程中的变系数取为与实际物理场有相等地位的变量,就可得到原方程推广的对称群和有限变换. 利用这个推广的对称群,我们可以在某些不同变系数方程的解之间建立一种关系. 尤其是在假定原方程是常系数方程时,某些特殊类型的变系数方程的解可由相应的常系数方程的解得到.

变系数薛定谔方程在众多物理领域,如等离子体物理、流体动力学、非线性光学、固体物理,尤其是纤维光学中有着极其重要的地位[6—9]. 在实际光纤通讯中传播信息的孤子一般满足变系数非线性薛定谔方程[10,11]

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\beta(z)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\gamma(z)\mid u\mid^2 u=0, \qquad (1)$$

式中 $\beta(z)$ 和 $\gamma(z)$ 分别是纵向距离缓变的二阶色散和非线性系数. (1) 式经过适当的变换,最后求解的方程实际是

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha(x)\mid u\mid^2 u=0. \qquad (2)$$

因此我们只需研究方程(2)的这种形式. 方程(2)是变系数方程,以往的工作都是用数值分析或近似微扰方法进行研究. 本文在用推广的对称群方法研究一般的变系数非线性薛定谔方程的基础上,给出其系数为某个距离缓变函数时的精确解.

本文给出薛定谔方程推广的对称群和相应的有限变换,建立某些不同变系数方程和相应的解之间的关系,给出色散缓变非线性薛定谔方程的精确解,并进行了讨论.

2 薛定谔方程的推广对称群

非线性薛定谔方程(2)可以写为更普遍形式

$$\mathrm{i}u_x+u_{tt}+W(x,t,\mid u\mid)u=0. \qquad (3)$$

假设 $W(x,t,|u|)$ 是一个与 u 具有相等地位的新变量. 这意味着方程(3)即使在势函数 W 与 u 无关时,仍是非线性方程. 我们寻求方程(3)在经典一阶微分算子

$$\begin{aligned}K=&\xi(x,t,u,u^*)\partial_x+\tau(x,t,u,u^*)\partial_t\\&+\eta(x,t,u,u^*)\partial_u+\eta^*(x,t,u,u^*)\partial_{u^*}\\&+\rho(x,t,u,u^*,W)\partial_W\end{aligned} \qquad (4)$$

作用下不变的对称操作. 利用方程(3)在算子(4)作

* 国家自然科学基金(批准号:19875041)资助的课题.

用下不变条件[1,12,13]，并考虑到 $W(x,t,|u|)$，即 $u\dfrac{\partial W}{\partial u}=u^*\dfrac{\partial W}{\partial u^*}$ 的事实. 可以得到确定对称操作的方程组

$$\xi_u=\xi_{u^*}=\xi_t=0,\tau_u=\tau_{u^*}=0,\xi_x=2\tau_t,$$

$$\eta_{u^*}=0,\eta_{uu}=0,\eta_{ut}=\frac{\mathrm{i}}{2}\tau_x,$$

$$\eta_u^*=0,\eta^*_{u^*u^*}=0,\eta^*_{u^*t}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\tau_x,$$

$$\mathrm{i}\eta_x+\eta_{tt}-\eta_uWu+2W\tau_tu+W\eta+\rho u=0,$$

$$-\mathrm{i}\eta_x^*+\eta_{tt}^*-\eta_{u^*}^*Wu^*+2W\tau_tu^*+W_{\eta^*}+\rho u^*=0,$$

$$\rho_u=\rho_{u^*}=0. \tag{5}$$

求解方程组(5)，可以得到各无穷小表达式

$$\xi=2A,\tau=A't+D,$$

$$\eta=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{2}A''t^2+D't+B\right)u,$$

$$\eta^*=-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{2}A''t^2+D'+E\right)u^*,$$

$$\rho=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}A'''t^2+D''t+B'\right)-2A'W-\frac{\mathrm{i}}{2}A'', \tag{6}$$

式中 A,D,B 和 E 是 x 的任意光滑函数. 在 $A\neq0$ 时，利用方程组(6)，可以得到普遍形式的有限变换

$$f_0(x_1)=\varepsilon+f_0(x),$$

$$t_1=\sqrt{A(x_1)}\left(f_1(x_1)-f_1(x)+\frac{t}{\sqrt{A(x)}}\right),$$

$$u_1=u\exp(f_2(x_1)-f_2(x)),$$

$$u_1^*=u^*\exp(f_2^*(x_1)-f_2^*(x)),$$

$$W_1=\frac{1}{A(x_1)}(WA(x)+f_3(x_1)-f_3(x)), \tag{7}$$

式中 ε 是群参数，

$$f_0(x_1)=\int\frac{\mathrm{d}x_1}{2A(x_1)},\ f_1(x_1)=\frac{1}{2}\int\frac{D(x_1)}{(A(x_1))^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x_1,$$

$$f_2(x_1)=\frac{\mathrm{i}}{4}\int\frac{\mathrm{d}x_1}{A(x_1)}\left(\frac{1}{2}A''(x_1)A(x_1)\right.$$
$$\cdot\left(f_1(x_1)-f_1(x)+\frac{t}{\sqrt{A(x)}}\right)^2$$
$$+D'(x_1)\sqrt{A(x_1)}(f_1(x_1)$$
$$\left.-f_1(x)+\frac{t}{\sqrt{A(x)}})+B(x_1)\right),$$

$$f_3(x_1)=\int\left(-\frac{\mathrm{i}}{4}A''(x_1)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}A'''A(x_1)\right.\right.$$
$$\cdot\left(f_1(x_1)-f_1(x)+\frac{t}{\sqrt{A(x)}}\right)^2$$
$$+D''(x_1)\sqrt{A(x_1)}(f_1(x_1)-f_1(x)$$
$$\left.\left.+\frac{t}{\sqrt{A(x)}})+B'(x_1)\right)\right)\mathrm{d}x_1. \tag{8}$$

如果 $A=0$，则相应的有限变换为

$$t_1=t+\varepsilon D,x_1=x,$$

$$u_1=u\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{4}D'D\varepsilon^2+\frac{\mathrm{i}}{2}(D't+B)\varepsilon\right),$$

$$u_1^*=u^*\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{4}D'D\varepsilon^2-\frac{\mathrm{i}}{2}(D't+B)\varepsilon\right),$$

$$W_1=W+\frac{1}{4}DD''\varepsilon^2+\frac{1}{2}(D''t+B')\varepsilon. \tag{9}$$

在有限变换(7)式中，已取 $B=E$. 如果给定任意函数 A,D,B 的具体形式，有限变换普遍式(7)是个明确的式子. 下面给出几种某些任意函数为特定形式时(7)式的表达式. 取 $A=x,D=0$，则(7)式为

$$t_1=t\exp(\varepsilon),x_1=x\exp(2\varepsilon),$$

$$u_1=u\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{4}\int\frac{B(x_1)}{x_1}\mathrm{d}x_1-\frac{\mathrm{i}}{4}\int\frac{B(x)}{x}\mathrm{d}x\right),$$

$$u_1^*=u^*\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{4}\int\frac{B(x_1)}{x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\mathrm{i}}{4}\int\frac{B(x)}{x}\mathrm{d}x\right),$$

$$W_1=\frac{1}{x_1}\left(xW-\frac{1}{4}\int B'(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int B'(x_1)\mathrm{d}x_1\right). \tag{10}$$

如果取 $A=\dfrac{x^2}{2},D=0,B=\mathrm{i}x$，有限变换(8)式成为

$$t_1=\frac{t}{1-\varepsilon x},x_1=\frac{x}{1-\varepsilon x},$$

$$u_1=u(1-\varepsilon x)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\varepsilon t^2}{4(1-\varepsilon x)}\right),$$

$$u_1^*=u^*(1-\varepsilon x)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\varepsilon t^2}{4(1-\varepsilon x)}\right),$$

$$W_1=W(1-\varepsilon x)^2. \tag{11}$$

3 变系数非线性薛定谔方程的解

利用推广的对称操作和相应的有限变换，可以在某些不同变系数非线性薛定谔方程之间建立一种关系. 尤其是，若原始方程是一个常系数方程，则某些类型的变系数方程的解可以通过该常系数方程的解得到. 采用有限变换(7)式，可以得到变系数方程

$$\mathrm{i}u_{1_{x_1}}+u_{1_{t_1t_1}}+\frac{u_1}{A(x_1)}(A(x_2)W(t_2,x_2,u_2,u_2^*)$$
$$-f_3(x_2)+f_3(x_1))=0. \tag{12}$$

在(12)式中，$x_2=f_0^{-1}(f_0(x_1)-\varepsilon)$，$t_2=\sqrt{A(x_2)}\cdot\left[\dfrac{t_1}{\sqrt{A(x_1)}}+f_1(x_2)-f_1(x_1)\right]$，$u_2=u_1\exp(f_2(x_2)$

$-f_2(x_1))$, $u_2^* = u_1^* \exp(f_2^*(x_2) - f_2^*(x_1))$,而 f_0^{-1} 是 f_0 的反函数.(12)式的解可以表示为

$$u_1 = u(t_2, x_2)\exp(f_2(x_1) - f_2(x_2))\mid_{t=t_2, x=x_2}, \tag{13}$$

式中 $u(t, x)$ 是方程

$$\mathrm{i}u_x + u_{tt} + W(t, x, |u|)u = 0 \tag{14}$$

的解.

通过有限变换(9)式,可以得到变系数方程

$$\mathrm{i}u_{1_{x_1}} + u_{1_{t_1t_1}} + (W(t_1 - \varepsilon D(x_1), x_1, |u_1|) + W_0)u_1 = 0. \tag{15}$$

式中 $W_0 = \frac{1}{4}\varepsilon^2 D''(x_1)D(x_1) + \frac{1}{2}\varepsilon(D''(x_1)(t_1 - \varepsilon D(x_1)) + B'(x_1))$.

(15)式的解为

$$u_1 = u(t_1 - \varepsilon D(x_1), x_1)\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon^2 D'D + \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon((t_1 - \varepsilon D)D' + B)\right), \tag{16}$$

其中 $u(t, x)$ 是(14)式的一个解.

从有限变换(11)式,可以得到变系数方程

$$\mathrm{i}u_{1_{x_1}} + u_{1_{t_1t_1}} + \frac{1}{(1+\varepsilon x_1)^2} \cdot W\left(t = \frac{t_1}{1+\varepsilon x_1}, x = \frac{x_1}{1+\varepsilon x_1}, |u| = |u_1|(1+\varepsilon x_1)^{\frac{1}{2}}\right)u_1 = 0, \tag{17}$$

该方程的解表示为

$$u_1 = u\left(t = \frac{t_1}{1+\varepsilon x_1}, x = \frac{x_1}{1+\varepsilon x_1}\right)(1 + \varepsilon x_1)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\varepsilon t_1^2}{4(1+\varepsilon x_1)}\right). \tag{18}$$

(18)式的 $u(t, x)$ 也是(14)式的一个解.

若考虑的原始方程是标准的常系数非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}u_x + u_{tt} + |u|^2 u = 0, \tag{19}$$

即(3)式中的 $|W|$ 取为 $|u|^2$. 那么由有限变换(11)式得到的变系数方程(17)具有形式

$$\mathrm{i}u_{1_{x_1}} + u_{1_{t_1t_1}} + \frac{1}{1+\varepsilon x_1}|u_1|^2 u_1 = 0. \tag{20}$$

在该方程中引入适当的坐标变换 $z_1 = \frac{1}{\varepsilon}\ln(1 + \varepsilon x_1)$,并令 $\varepsilon = -\theta$,则(20)式就是色散缓变光纤中的非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}u_{1_{z_1}} + \exp(-\theta z_1)u_{1_{t_1t_1}} + |u_1|^2 u = 0. \tag{21}$$

(21)式的解可由(18)式表示,其中的 x_1 用 $\frac{1}{\theta}(1 - \exp(-\theta z_1))$, ε 用 $-\theta$ 表示. 也就是说,只要知道常系数非线性薛定谔方程(19)的解,就可得到色散缓变光纤中非线性薛定谔方程的精确解. 而这种类型的方程在以往的研究中只能进行数值分析或近似求解[14—16]. 显然

$$u = \sqrt{2}l\,\mathrm{sech}(2lkx - lt)\exp[\mathrm{i}((l^2 - k^2)x + kt)] \tag{22}$$

是(19)式的一个解. 按照(18)式

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}l}{\sqrt{1+\varepsilon x_1}}\mathrm{sech}\left(\frac{l}{1+\varepsilon x_1}(2kx_1 - lt_1)\right) \cdot \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{1+\varepsilon x_1}\left(\frac{\varepsilon t_1^2}{4} + (l^2 - k^2)x_1 + kt_1\right)\right] \tag{23}$$

是(20)式的解.

在(23)式中进行坐标变换 $x_1 = \frac{1}{\theta}(1 - \exp(-\theta z_1))$, $\varepsilon = -\theta$,可以得到(21)式的精确解

$$u_1 = \sqrt{2}l\exp\left(\frac{\theta z_1}{2}\right)\mathrm{sech}\left(\frac{2kl}{\theta}(\exp(\theta z_1) - 1) - l^2\exp(\theta z_1)t_1\right)\exp\left[\mathrm{i}\left(\exp(\theta z_1)\left(\frac{l^2 - k^2}{\theta} + kt_1 - \frac{\theta}{4}t_1^2\right) - \frac{l^2 - k^2}{\theta}\right)\right]. \tag{24}$$

(24)式清晰地表明,光孤子在色散缓变光纤中传输时其幅值随传播距离指数增加,而脉宽随传播距离指数衰减. 这种效应正好与光纤损耗的影响相反,所以适当地选择光纤色散变化率可以完全补偿光纤损耗的影响,从而维持孤子无变形传输. 这些结论与文献[14—16]的数值分析和近似结果一致.

4 结论与讨论

本文提出了求解某些变系数非线性方程的新方法. 采用文献[1—5]提出的推广的对称群并且把方程的变系数作为一个新的与原始实际物理场同等地位的变量,可以找到在某些变系数方程和方程解之间的关系式. 如果原始模型是一个常系数方程,则该常系数方程的任意解都可用来表示相应的变系数方程的解. 由于有限变换包含了一些关于变量的任意函数,只要合适地选择任意函数,可以找到一些具有实际物理意义的变系数方程.

变系数非线性薛定谔方程在许多物理领域起着

重要的作用，而精确求解则非常困难. 我们对该方程进行了详细研究，获得了含有三个任意函数的普遍的变系数非线性薛定谔方程. 在某些特殊情况下，该方程的解可以由相应的常系数方程的解表示. 当任意函数和势函数取某些特定函数时，普遍的变系数非线性薛定谔方程就成为色散缓变光纤中的非线性薛定谔方程. 其精确解可通过标准的常系数非线性薛定谔方程的解得到. 我们得到的结论与文献[14—16]数值分析和近似解的结论类似. 虽然本文只讨论了薛定谔方程，但提出的方法可以用来求解其他类型的变系数方程.

作者之一感谢楼森岳教授的帮助和讨论.

[1] W. Fushchych, V. Shtelen, N. Serov, Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[2] W. Fushchych, A. Nikitin, Symmetry of Equations of Quantum Mechanics, Allerton Press, New York, 1994.

[3] C. Boyer, *Helv. Phys. Acta*, **47** (1974), 589.

[4] D. R. Truax, *J. Math. Phys.*, **22** (1981), 1959.

[5] F. Wilhelm, S. Zoya, T. Ivan, *J. Non. Math. Phys.*, **5** (1998), 13.

[6] A. C. Newell, J. V. Moloney, Nonlinear Optics (Addison-Wesley, Redwood city, CA, 1992).

[7] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, Solitons, Nonlinear Evolution Equation, and Inverse Scattering (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1991).

[8] A. Hasegawa, Y. Kodama, Solitons In Optical Communications (Clarendon, Oxford, 1995).

[9] D. J. Kaup, A. C. Newell, *Proc. R. Soc. London, Ser.*, **A 361** (1978), 413.

[10] Y. Chen, H. A. Haus, *Opt. Lett.*, **24** (1999), 217.

[11] H. Sugahara, A. Maruta, Y. Kodama, *Opt. Lett.*, **24** (1999), 145.

[12] L. V. Ovsyannikov, Group Analysis of Differential Equations, Academic Press, New York, 1982.

[13] P. Olver, Application of Lie Groups to Differential Equations, Springer, New York, 1986.

[14] 曹文华、姚爱民、廖常俊等，光学学报，**14** (2) (1994), 119. [W. H. Cao *et al.*, *Acta Optica Sinica*, **14** (2) (1994), 119 (in Chinese)].

[15] 徐文成、郭旗、廖常俊等，光学学报，**14** (3) (1994), 287. [W. C, Xu *et al.*, *Acta Optica Sinica*, **14** (3) (1994), 287 (in Chinese)].

[16] 文双春、徐文成、郭旗、刘颂豪，中国科学，**27** (10) (1997), 949. [S. C. Wen *et al.*, *Science in China* (*Series A*). **27** (1997), 949 (in Chinese)].

A NEW METHOD TO SOLVE NONLINEAR VARIABLE-COEFFICIENT EQUATION

RUAN HANG-YU[1)2)] CHEN YI-XIN[2)]

[1)] (*Institute of Modern Physics, Normal College of Ningbo University, Ningbo* 315211)

[2)] (*Zhejiang Institute of Modern Physics, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

(Received 26 September 1999)

ABSTRACT

Starting from symmetry properties of equation and considering the variable-coefficient of the equation as a new dependent variable, a new general method to solve variable-coefficient equation is proposed. The solution of variable-coefficient equation can be expressed by an arbitrary solution of the corresponding constant-coefficient equation. Taking Schrödinger equation as a concrete example, the method is recommended in detail.

PACC: 0220; 0230

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19875041).