第 49 卷 第 2 期 2000 年 2 月
1000-3290/2000/49(02)/0186-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 2, February, 2000

电磁波在一维非均匀介质中的透射*

刘新芽

(南昌大学物理系,南昌 330047)

(1998 年 12 月 14 日收到;1999 年 5 月 9 日收到修改稿)

推导了一维非均匀介质中透射电磁波的电场振幅与介质表面入射电磁波电场振幅之间的关系式.

PACC:0340K;4220;4110H

1 引 言

研究电磁波在非均匀媒质中的传播性质不仅具有理论意义而且关系到许多实际的应用.近年有关这方面的论文增多了,但大部分工作是关于层状介质的[1—4].本文讨论一维连续变化的非均匀介质中电磁波的透射规律.结果表明,电磁波在一维连续变化的介质中的透射过程能用两个张量的乘积 $T^{(z,z_0)}T^{(0)}$ 表示,其中 $T^{(0)}$ 代表介质表面的透射,而 $T^{(z,z_0)}$ 代表在介质内从表面处坐标 z_0 到坐标 z 的透射.

2 连续变化介质中透射波的振幅

假定介质是一维非均匀的,其变化是沿着与表面垂直的方向.我们选取笛卡尔坐标并置原点于介质表面,让 z 轴与表面垂直,则介质的介电常数可表为 $\varepsilon(z)$,磁导率为 $\mu(z)$,假定介质的外部空间充满另一种均匀介质 $\varepsilon^{(0)}$,$\mu^{(0)}$.设有一平面电磁波从 $\varepsilon^{(0)}$,$\mu^{(0)}$ 介质空间以任意入射角入射到所考虑的介质的表面,部分透入其内部,我们来讨论介质内透射波振幅的变化规律.

为了研究方便,我们选取 x 轴位于电磁波的入射面内并将上述一维非均匀介质沿 z 轴方向分成 n 个薄层,记各层分界面的 z 坐标为 z_i,第 i 层的厚度为 $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ ($i=1,2,3,\cdots,n$;$z_0=0$),让 n 足够大,以便 Δz_i 足够小,使每一层都可视为均匀介质.我们下面来讨论电磁波对各层分界面的透射.

首先讨论界面 z_n,与之相邻的介质层内的电磁场为

$$E = E_{\mathrm{i}}^{(n)}\exp[\mathrm{j}(\omega t - k^{(n)}\cdot r)] + E_{\mathrm{r}}^{(n)}\exp[\mathrm{j}(\omega' t - k'^{(n)}\cdot r)] \quad z_{n-1} < z < z_n, \tag{1}$$

$$E = E_{\mathrm{t}}^{(n+1)}\exp[\mathrm{j}(\omega'' t - k^{(n+1)}\cdot r)] \quad z_n < z, \tag{2}$$

式中脚标 i 代表入射波,r 代表反射波,t 代表透射波,$(n+1)$ 代表 $z > z_n$ 空间.

相应的磁场可以从法拉弟定律得到

$$\nabla\times E = -\mu\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{3}$$

电磁场必须满足边界条件.在界面 $z=z_n$ 电场和磁场的切向分量必须连续,这意味着(1)和(2)式中频率都相同、各波矢的 x 分量相同以及 $k'^{(n)}$ 的 z 分量与 $k^{(n)}$ 的 z 分量大小相等方向相反.

边界条件还给出关于场的振幅的方程组.按照入射波的电场 E 垂直于入射面和平行于入射面两种偏振情形,场的振幅关系分别为

(i) 当 $E\perp$ 入射面时,

$$E_{\mathrm{i}}'^{(n)} + E_{\mathrm{r}}'^{(n)} = E_{\mathrm{t}}'^{(n+1)}, \tag{4}$$

$$H_{\mathrm{i}}'^{(n)}\cos\theta_n - H_{\mathrm{r}}'^{(n)}\cos\theta_n = H_{\mathrm{t}}'^{(n+1)}\cos\theta_{n+1}. \tag{5}$$

(ii) 当 $E /\!/$ 入射面时,

$$E_{\mathrm{i}}'^{(n)}\cos\theta_n - E_{\mathrm{r}}'^{(n)}\cos\theta_n = E_{\mathrm{t}}'^{(n+1)}\cos\theta_{n+1}, \tag{6}$$

$$H_{\mathrm{i}}'^{(n)} + H_{\mathrm{r}}'^{(n)} = H_{\mathrm{t}}'^{(n+1)}. \tag{7}$$

上述(4)—(7)式中

$$E_{\mathrm{i}}'^{(n)} = E_{\mathrm{i}}^{(n)}\exp(-\mathrm{j}k_z^{(n)}z_n), \tag{8}$$

$$E_{\mathrm{r}}'^{(n)} = E_{\mathrm{r}}^{(n)}\exp(\mathrm{j}k_z^{(n)}z_n), \tag{9}$$

$$E_{\mathrm{t}}'^{(n+1)} = E_{\mathrm{t}}^{(n+1)}\exp(-\mathrm{j}k_z^{(n+1)}z_n). \tag{10}$$

而 θ_n 表示电磁波对界面 z_n 的入射角或反射角,

* 江西省自然科学基金(批准号:961247)资助的课题.

θ_{n+1}为折射角.

应用电磁波电场与磁场的关系 $H=\sqrt{\varepsilon/\mu}E$,(4),(5)式可化为

$$E_{\mathrm{i}}^{\prime(n)}+E_{\mathrm{r}}^{\prime(n)}=E_{\mathrm{t}}^{\prime(n+1)}, \tag{11}$$

$$E_{\mathrm{i}}^{\prime(n)}-E_{\mathrm{r}}^{\prime(n)}=I_{n,n+1}E_{\mathrm{t}}^{\prime(n+1)}. \tag{12}$$

(6),(7)式可化为与(11),(12)式完全相同的形式,区别在于 $I_{n,n+1}$ 的表达式不同,以及 $E_{\mathrm{t}}^{\prime(n+1)}$ 由 $[\varepsilon^{(n+1)}\mu^{(n)}/\mu^{(n+1)}\varepsilon^{(n)}]^{1/2}E_{\mathrm{t}}^{\prime(n+1)}$ 代替. 因此,(11),(12)式实际上表示 $E\perp$入射面和 $E\,/\!/$入射面两种情形下场的振幅关系,只是 I 应分别选用 $I^{\perp}$和 $I^{/\!/}$,它们的表达式为

$$I_{i,j}^{\perp}=\sqrt{\varepsilon^{(j)}\mu^{(i)}}\cos\theta_j/\sqrt{\varepsilon^{(i)}\mu^{(j)}}\cos\theta_i, \tag{13}$$

$$I_{i,j}^{/\!/}=\sqrt{\varepsilon^{(i)}\mu^{(j)}}\cos\theta_j/\sqrt{\varepsilon^{(j)}\mu^{(i)}}\cos\theta_i. \tag{14}$$

(11),(12)式的解为

$$E_{\mathrm{r}}^{\prime(n)}=r_{n,n+1}E_{\mathrm{i}}^{\prime(n)},\ r_{i,j}=(1-I_{i,j})/(1+I_{i,j}), \tag{15}$$

$$E_{\mathrm{t}}^{\prime(n+1)}=t_{n,n+1}E_{\mathrm{i}}^{\prime(n)},\ t_{i,j}=2/(1+I_{i,j}). \tag{16}$$

我们进一步考虑反射波、透射波和入射波的电场在坐标轴上的分量之间的关系. 电场与其分量的关系为 $E=E_\alpha/\cos\theta_\alpha$,其中 $\alpha=x,y,z$;θ_α 表示电场矢量E 与α 轴正方向之间的夹角,与入射角、反射角或折射角有关. 以 $E_\alpha/\cos\theta_\alpha$ 表示(15),(16)式两边相应的电场,即过渡到分量关系式. 当 $E\,/\!/$入射面时还应注意到在 $E_{\mathrm{t}}^{\prime(n+1)}$ 前面补上因子$[\varepsilon^{(n+1)}\mu^{(n)}/\mu^{(n+1)}\varepsilon^{(n)}]^{1/2}$. 在前已选定的坐标系中,$y$ 轴与入射面垂直,因此,当 $E\perp$入射面时,$E_{\mathrm{r}}^{\prime}$,$E_{\mathrm{t}}^{\prime}$ 和 $E_{\mathrm{i}}^{\prime}$ 都与 y 轴平行,且取向一致;当 $E\,/\!/$入射面时,$E_{\mathrm{r}}^{\prime}$ 和 $E_{\mathrm{i}}^{\prime}$ 在 x 轴上的分量取向相反,其余各分量取向一致. 因此,反射波、透射波和入射波的电场在三个坐标轴上的分量之间的关系可用矩阵表示如下:

$$E_{\mathrm{r}}^{\prime(n)}=R^{(n)}E_{\mathrm{i}}^{\prime(n)}, \tag{17}$$

$$E_{\mathrm{t}}^{\prime(n+1)}=T^{(n)}E_{\mathrm{i}}^{\prime(n)}, \tag{18}$$

其中

$$R^{(n)}=\begin{bmatrix}-r_{n,n+1}^{/\!/} & 0 & 0\\ 0 & r_{n,n+1}^{\perp} & 0\\ 0 & 0 & r_{n,n+1}^{/\!/}\end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$T^{(n)}=\begin{bmatrix}I_{n,n+1}^{/\!/}t_{n,n+1}^{/\!/} & 0 & 0\\ 0 & t_{n,n+1}^{\perp} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\epsilon^{(n)}}{\epsilon^{(n+1)}}t_{n,n+1}^{/\!/}\end{bmatrix}, \tag{20}$$

R 和 T 称为反射和透射张量.

接着考虑界面 $z=z_{n-1}$,边界条件给出

$$E_{\mathrm{i}}^{\prime(n-1)}+E_{\mathrm{r}}^{\prime(n-1)}=E_{\mathrm{t}}^{\prime(n)}+E_{\mathrm{r}}^{\prime(n)}\exp[-\mathrm{j}k_z^{(n)}(z_n-z_{n-1})], \tag{21}$$

$$E_{\mathrm{i}}^{\prime(n-1)}-E_{\mathrm{r}}^{\prime(n-1)}=I_{n-1,n}\{E_{\mathrm{t}}^{\prime(n)}-E_{\mathrm{r}}^{\prime(n)}\exp[-\mathrm{j}k_z^{(n)}(z_n-z_{n-1})]\}. \tag{22}$$

由于在同一层介质中波的振幅是相同的,因而有条件

$$E_{\mathrm{i}}^{\prime(n)}=E_{\mathrm{t}}^{\prime(n)}\exp[-\mathrm{j}k_z^{(n)}(z_n-z_{n-1})]. \tag{23}$$

再运用(17),(18)式,则(21)和(22)式可化为

$$E_{\mathrm{i}}^{\prime(n-1)}+E_{\mathrm{r}}^{\prime(n-1)}=E_{\mathrm{t}}^{\prime\prime(n)}, \tag{24}$$

$$E_{\mathrm{i}}^{\prime(n-1)}-E_{\mathrm{r}}^{\prime(n-1)}=I_{n-1,n}^{\prime}E_{\mathrm{t}}^{\prime\prime(n)}, \tag{25}$$

$$E_{\mathrm{t}}^{\prime\prime(n)}=[1+R^{(n)}\exp(-\mathrm{j}\phi^{(n)})]E_{\mathrm{t}}^{\prime(n)}, \tag{26}$$

$$\phi^{(n)}=2k_z^{(n)}(z_n-z_{n-1}), \tag{27}$$

$$I_{n-1,n}^{\prime}=[1-R^{(n)}\exp(-\mathrm{j}\phi^{(n)})]/[1+R^{(n)}\exp(-\mathrm{j}\phi^{(n)})]. \tag{28}$$

(24),(25)式的解为

$$E_{\mathrm{r}}^{\prime(n-1)}=R^{(n-1)}E_{\mathrm{i}}^{\prime(n-1)}, \tag{29}$$

$$E_{\mathrm{t}}^{\prime(n)}=T^{(n-1)}E_{\mathrm{i}}^{\prime(n-1)}/[1+R^{(n)}\exp(-\mathrm{j}\phi^{(n)})], \tag{30}$$

依次类推,对于界面 $z=z_{n-m}$,可以得到

$$E_{\mathrm{r}}^{\prime(n-m)}=R^{(n-m)}E_{\mathrm{i}}^{\prime(n-m)}, \tag{31}$$

$$E_{\mathrm{t}}^{\prime(n-m+1)}=T^{(n-m)}E_{\mathrm{i}}^{\prime(n-m)}/[1+R^{(n-m+1)}\exp(-\mathrm{j}\phi^{(n-m+1)})], \tag{32}$$

基于(17),(18),(23)和(29)—(32)式,透过界面 $z=z_m$ 的电磁波的电场振幅可表示为

$$E_{\mathrm{t}}^{(m+1)}=\frac{T^{(0)}E_{\mathrm{i}}^{(0)}\exp[\mathrm{j}(k_z^{(m+1)}z_{m+1}-k_z^{(0)}z_0)]}{\exp(\mathrm{j}k_z^{(m+1)}\Delta z_{m+1})+R^{(m+1)}\exp(-\mathrm{j}k_z^{(m+1)}\Delta z_{m+1})}\cdot\prod_{p=1}^{m}\frac{T^{(p)}}{\exp(\mathrm{j}k_z^{(p)}\Delta z_p)+R^{(p)}\exp(-\mathrm{j}k_z^{(p)}\Delta z_p)}, \tag{33}$$

其中 $E_{\mathrm{i}}^{(0)}$ 为表面入射波的振幅.

令 $\Delta z\to0$ 以过渡到介质沿 z 轴方向连续变化的情形. 因为,当 $\Delta z\to0$ 时,

$$T^{(p)}\{\exp(\mathrm{j}k_z^{(p)}\Delta z_p)+R^{(p)}\exp(-\mathrm{j}k_z^{(p)}\Delta z_p)\}^{-1}=\frac{T^{(p)}\exp\{\tan^{-1}[(R^{(p)}-1)\tan(k_z^{(p)}\Delta z_p)/(R^{(p)}+1)]\}}{(1+R^{(p)})\sqrt{1-4R^{(p)}\sin^2(k_z^{(p)}\Delta z_p)/(1+R^{(p)})^2}}, \tag{34}$$

因而

$$\lim_{\Delta z\to 0}\prod_{p=1}^{m}T^{(p)}\{\exp(\mathrm{j}k_z^{(p)}\Delta z_p)+R^{(p)}\exp(-\mathrm{j}k_z^{(p)}\Delta z_p)\}^{-1}$$
$$=T^{(m,1)}\exp\left\{\int_{z_0}^{z}[R(z)-1]k_z(z)\mathrm{d}z\Big/[R(z)+1]\right\},\tag{35}$$

其中

$$T^{(m,1)}=\prod_{p=1}^{m}\frac{T^{(p)}}{1+R^{(p)}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\varepsilon^{(l)}/\varepsilon^{(m)}\end{pmatrix}.\tag{36}$$

将(35)式代入(33)式可以得到

$$E_t(z)=\lim_{\Delta z\to 0}E_t^{(m+1)}$$
$$=\frac{T^{(0)}T^{(z,z_0)}}{1+R(z)}\exp\left\{\mathrm{j}k_z(z)z-\mathrm{j}k_z(z_0)z_0+\mathrm{j}\int_{z_0}^{z}[R(z)-1]k_z(z)\mathrm{d}z\Big/[R(z)+1]\right\}E_i^{(0)},\tag{37}$$

因此介质中透射波的电场振幅为

$$|E_t(z)|=\frac{1}{1+R(z)}T^{(z,z_0)}T^{(0)}E_i^{(0)},\tag{38}$$

式中 $T^{(0)}$是介质表面的透射张量,按照(20)式,可表示为

$$T^{(0)}=2\begin{pmatrix}t_{11}&0&0\\0&t_{22}&0\\0&0&t_{33}\end{pmatrix},\tag{39}$$

其中

$$t_{11}=\frac{f(\theta_i)}{f(\theta_i)+\eta^{(0)}/\eta(z_0)},\tag{40}$$

$$t_{22}=\frac{1}{1+f(\theta_i)\eta^{(0)}/\eta(z_0)},\tag{41}$$

$$t_{33}=\frac{\varepsilon^{(0)}}{\varepsilon(z_0)}\frac{1}{1+f(\theta_i)\eta(z_0)/\eta^{(0)}},\tag{42}$$

$$f(\theta_i)=\frac{\cos\theta(z_0)}{\cos\theta_i}=\frac{\sqrt{1-\mu^{(0)}\varepsilon^{(0)}\sin^2\theta_i/\mu(z_0)\varepsilon(z_0)}}{\cos\theta_i},\tag{43}$$

$$\eta^{(0)}=\sqrt{\mu^{(0)}/\varepsilon^{(0)}},\tag{44}$$

$$\eta(z_0)=\sqrt{\mu(z_0)/\varepsilon(z_0)},\tag{45}$$

$\varepsilon(z_0)$和$\mu(z_0)$是表面处介质的介电常数和磁导率,$\varepsilon^{(0)}$和$\mu^{(0)}$是表面处介质外部空间的介电常数和磁导率. θ_i是介质表面外入射电磁波的入射角.

3 讨论与结语

在非均匀介质内透射电磁波的振幅与介质表面入射电磁波振幅之间的关系(38)式中,$R(z)$是介质内所要求透射波振幅的位置 z 点的反射张量. 由于(13)式和(14)式中的 I_{ij}应为$I_{z,z+\mathrm{d}z}$,如果介质内介电常数 $\varepsilon(z)$和磁导率 $\mu(z)$都是关于 z 的可微函数,则 $I_{z,z+\mathrm{d}z}\to 1$,因而 $R(z)=0$,(38)式变为$|E_t(z)|=T^{(z,z_0)}T^{(0)}E_i^{(0)}$,其中 $T^{(0)}$表示入射波对介质表面的透射,$T^{(z,z_0)}$表示介质内电磁波从坐标 z_0 到坐标 z 的相继透射. 如果整个介质是均匀的,则 $T^{(z,z_0)}=1$,因而$|E_t(z)|=T^{(0)}E_i^{(0)}$,将(39)—(45)式代入,结果与 Fresnel 定理完全一致.

[1] J. Navasquillo, V. Such, F. Pomer, *Am. J. Phys.*, **57** (1989), 1109.

[2] F. Pomer, J. Navasquillo, *Am. J. Phys.*, **58** (1990), 763.

[3] V. Palleschi, M. de Rosa, S. Rastelli, *Phys. Lett.*, **A172** (1993), 256.

[4] 刘新芽,光学学报, **15** (1995), 122 [X. Y. Liu, *Acta Optica Sinica*, **15** (1995), 122 (in Chinese)].

TRANSMISSION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN INHOMOGENEOUS MEDIA OF ONE-DIMENSION*

LIU XIN-YA
(*Department of Physics*, *Nanchang University*, *Nanchang* 330047)
(Received 14 December 1998; revised manuscript received 9 May 1999)

ABSTRACT

In this paper the relations between the amplitudes of electromagnetic waves transmitting in inhomogeneous media of one-dimension and those of incident waves on surface are deduced. The resultant expressions are succinct and significative of physics.

PACC: 0340K; 4220; 4110H

* Project supported by the Natural Science Foundation of Jiangxi Province (Grant No. 961247).