第 49 卷 第 2 期 2000 年 2 月
1000-3290/2000/49(02)/0194-07
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 49, No. 2, February, 2000

对-谐条件下不存在引力辐射和引力波的研究

青 心

(烟台大学物理系,烟台 264005)

(1998 年 12 月 15 日收到;1999 年 6 月 21 日收到修改稿)

证明在对角度规谐和条件(对-谐条件)下,Vierbein 表述的行波 Riemann-Christoffel 曲率张量的所有分量为零;引力波的能量动量、功率流密度、辐射总功率和张力张量均为零.因而时空平直,既不存在引力辐射,也不存在任何形式的引力波.最后指出了引力理论与量子理论的内在联系.

PACC:0450;0430;0365

1 引 言

引力辐射和引力波的理论探讨和实验检测一直是引力研究领域的核心问题之一.广义相对论(GR)预言,运动物质系统在弱场近似下的引力辐射功率

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{G}{45c^5}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2,\tag{1}$$

其中

$$D_{\alpha\beta}=\int\rho(3x_\alpha x_\beta-\delta_{\alpha\beta}x^2)\mathrm{d}V\tag{2}$$

为系统的质量四极矩张量.即各方向的引力辐射总功率决定于 $D_{\alpha\beta}$ 的三阶时间导数[1].由于具有内禀自由度的微观粒子在引力场中的运动无法用四维时空的 Riemann 度规描述,因此必须采用新方法.活动标架 Vierbein 的引入和广泛应用,将旋量纳入了引力理论[2,3],进而架起了由引力理论通往量子理论的桥梁.1954 年杨振宁和 Mills 把规范不变的理论推广到内部对称的非 Abel 群[4].Utiyama[5]及其后的工作阐明了 GR 也是一种规范理论.由 Vierbein 表述的局域 Lorentz 群引力规范理论[6],亦得到与(1)式相同的结果.Taylor 和 Hulse 对天鹰座射电脉冲星 PSR1913+16 持续观测的结果表明,其引力辐射阻尼效应的综合数据分析很好地符合(1)式.间接地但却是定量地验证了引力辐射的存在(非对角度规情况).这一精彩成果获得了 1993 年度的 Nobel 物理学奖.虽然人们在理论和实验上都付出了巨大的努力,积极探索引力辐射和引力波,并且取得了非常出色的进展,但几十年来毕竟未能由实验直接检测出任何一种形式的引力波.因此我们认为换个角度研究问题是有益的.

本文证明在对-谐条件下,Vierbein 表述的局域 Lorentz 群引力规范理论中的 Riemann-Christoffel (R-C)曲率张量的所有分量为零,引力波的能量动量、功率流密度、辐射总功率和张力张量均为零,因而时空为四维平直时空,时空变换是且只能是 Lorentz 变换,这时既不存在引力辐射,也不存在任何形式的引力波和曲率波,但却存在不能通过 Lorentz 变换加以消除的纯纵波.最后简略地讨论了该波与量子理论深刻的内在联系.

2 R-C 曲率张量

在 Riemann 时空(挠率 $T_{abc}=e_a^\lambda e_b^\mu e_c^\nu T_{\lambda\mu\nu}=0$),在 Vierbein $e_{\mu(a)}$ 及其逆 $e^\mu_{(a)}$ 表述的局域 Lorentz 群规范理论中,场变量亦为 $e_{\mu(a)}$ 及 $e^\mu_{(a)}$.拉丁字母 $a=1,2,3,4$,为 Lorentz 参考系的指标,希腊字母 μ 为 Riemann 弯曲时空坐标的指标.$e^\mu_{(a)}$ 与 Riemann 度规 $g^{\mu\nu}$ 均为 x^μ 的函数,它们之间的关系为

$$\begin{gathered}g^{\mu\nu}=e^\mu_{(a)}e^\nu_{(a)},\quad g_{\mu\nu}=e_{\mu(a)}e_{\nu(a)},\\ e^\mu_{(a)}e_{\mu(b)}=\delta_{ab},\quad e^\mu_{(a)}e_{\nu(a)}=\delta^\mu_\nu,\end{gathered}\tag{3}$$

其中 Riemann 坐标是任意选取的.

局域 Lorentz 群规范理论的规范势

$$B_\mu=\frac{1}{2}\omega_{\mu(ab)}I_{(ab)},\quad \omega_{\mu(ab)}=-\omega_{\mu(ba)},\tag{4}$$

其中 $I_{(ab)}$ 为局域 Lorentz 群生成元,$I_{(ab)}=-I_{(ba)}$(a,b 反对称).规范场张量

$$F_{\mu\nu}=\frac{1}{2}R_{(ab)\mu\nu}I_{(ab)}.\tag{5}$$

在 Lie 群 G 的规范理论中

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu - [B_\mu, B_\nu], \tag{6}$$

则曲率张量[7]

$$R_{(ab)\mu\nu} = \partial_\mu \omega_{\nu(ab)} - \partial_\nu \omega_{\mu(ab)} - \omega_{\mu(ac)}\omega_{\nu(cb)} + \omega_{\nu(ac)}\omega_{\mu(cb)}, \tag{7}$$

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} = e_{\lambda(a)} e_{\rho(b)} R_{(ab)\mu\nu}, \tag{8}$$

其中

$$\omega_{\mu(bc)} = (e^\nu_{(b)})_{;\mu} e_{\nu(c)} = e_{\mu(a)}\omega_{(abc)}, \tag{9}$$

$()_{;\mu}$ 为局域 Lorentz 群规范理论的协变微商，$\omega_{(abc)}$ 为 Ricci 旋度系数.

$$\omega_{(abc)} = e^\mu_{(a)}\omega_{\mu(bc)} = e^\mu_{(a)} e_{\nu(c)} (e^\nu_{(b)})_{;\mu} = \frac{1}{2}[\Omega_{(abc)} - \Omega_{(bca)} - \Omega_{(cab)}], \tag{10}$$

$$\Omega_{(abc)} = \partial_\mu e_{\nu(a)} [e^\mu_{(b)} e^\nu_{(c)} - e^\mu_{(c)} e^\nu_{(b)}], \tag{11}$$

$$\omega_{(a)} = \omega_{(bab)} = (e^\mu_{(a)})_{;\mu} = \frac{1}{e}\partial_\mu (e e^\mu_{(a)}). \tag{12}$$

对于对角度规张量 $g_{\mu\mu}$，由于其对角阵可分解为两矩阵之积，并且一定可特别地分解为两对角阵之积，因而对角度规可用一般形式的 Vierbein 严格表述，亦可由对角型 Vierbein 的特别形式严格表述. 对于任意对角度规 $g_{\mu\mu}$，总可令

$$g_{\mu\mu} = H_\mu^2, \quad g^{\mu\mu} = \frac{1}{H_\mu^2}\ (\text{对 } \mu \text{ 不求和}),$$

$$\sqrt{g} = H_1 H_2 H_3 H_4. \tag{13}$$

(13)式可视为 $g_{\mu\mu}$ 的恒等变形 $g_{\mu\mu} = (\sqrt{g_{\mu\mu}})^2 = H_\mu^2$，若四个 $g_{\mu\mu}$ 不同，则 H_μ 即 H_1, H_2, H_3, H_4 亦不相同. 对于对角度规和对角型 Vierbein，则由(3)和(13)式有

$$e_{\mu(\mu)} = H_\mu, \quad e^\mu_{(\mu)} = \frac{1}{H_\mu}, \quad e = H_1 H_2 H_3 H_4. \tag{14}$$

将(13)式代入(10)—(12)式可得 Ricci 旋度系数

$$\omega_{(abc)} = \frac{1}{4H_aH_bH_c}[\partial_b (H_a^2 + H_c^2)\delta_{ac} - \partial_c (H_a^2 + H_b^2)\delta_{ab}], \tag{15}$$

$$\omega_{(b)} = \sum_{a=1, a\neq b}^{4} \frac{1}{H_aH_b}\partial_b H_a, \tag{16}$$

$\omega_{(abc)}$ 式中重复指标不取和. 由(15)，(16)和(7)式，对角度规曲率张量为

$$\begin{aligned} R_{(ab)\mu\nu} = {} & \frac{1}{4}\partial_\mu \left\{\frac{1}{H_aH_b}[\partial_a (H_\nu^2 + H_b^2)\delta_{\nu b} - \partial_b (H_\nu^2 + H_a^2)\delta_{\nu a}]\right\} - \frac{1}{4}\partial_\nu \left\{\frac{1}{H_aH_b} \cdot [\partial_a (H_\mu^2 + H_b^2)\delta_{\mu b} - \partial_b (H_\mu^2 + H_a^2)\delta_{\mu a}]\right\} \\ & - \frac{1}{16H_aH_bH_c^2}[\partial_a (H_\mu^2 + H_c^2)\delta_{\mu c} - \partial_c (H_\mu^2 + H_a^2)\delta_{\mu a}][\partial_c (H_\nu^2 + H_b^2)\delta_{\nu b} - \partial_b (H_\nu^2 + H_c^2)\delta_{\nu c}] \\ & + \frac{1}{16H_aH_bH_c^2}[\partial_a (H_\nu^2 + H_c^2)\delta_{\nu c} - \partial_c (H_\nu^2 + H_a^2)\delta_{\nu a}][\partial_c (H_\mu^2 + H_b^2)\delta_{\mu b} - \partial_b (H_\mu^2 + H_c^2)\delta_{\mu c}], \end{aligned} \tag{17}$$

式中 c 为求和指标，其余重复指标不求和. 对于引力行波，度规张量和 Vierbein 与 $x^2 = y, x^3 = z$ 无关，仅为波动参量 $u = k_1x^1 + k_4x^4$ 的函数，则有

$$H_\mu = H_\mu(u), \quad \partial_2 H_\mu = \partial_3 H_\mu = 0. \tag{18}$$

即 Vierbein 仅为 u 的函数，并且

$$\begin{aligned} &\partial_1 H_\mu = k_1 dH_\mu, \quad \partial_4 H_\mu = k_4 dH_\mu, \\ &\partial_1^2 H_\mu = k_1^2 d^2 H_\mu, \quad \partial_4^2 H_\mu = k_4^2 d^2 H_\mu, \end{aligned} \tag{19}$$

其中 $d = \mathrm{d}/\mathrm{d}u$，$d^2 = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}u^2$. 由(17)式，Vierbein 表述的局域 Lorentz 群规范理论中，行波对角度规 R-C 曲率张量不恒为零的独立分量的严格形式为

$$R_{1212} = H_1H_2\left[k_1^2 d\left(\frac{1}{H_1}dH_2\right) + \frac{k_4^2}{H_4^2}dH_1dH_2\right], \tag{20}$$

$$R_{1313} = H_1H_3\left[k_1^2 d\left(\frac{1}{H_1}dH_3\right) + \frac{k_4^2}{H_4^2}dH_1dH_3\right], \tag{21}$$

$$R_{1414} = H_1H_4 d\left(\frac{k_1^2}{H_1}dH_4 + \frac{k_4^2}{H_4}dH_1\right), \tag{22}$$

$$R_{2323} = H_2H_3 dH_2 dH_3\left(\frac{k_1^2}{H_1^2} + \frac{k_4^2}{H_4^2}\right), \tag{23}$$

$$R_{1224} = k_1k_4H_1H_2\left[\frac{1}{H_1H_4}dH_4dH_2 - d\left(\frac{1}{H_1}dH_2\right)\right], \tag{24}$$

$$R_{1334} = k_1k_4H_1H_3\left[\frac{1}{H_1H_4}dH_4dH_3 - d\left(\frac{1}{H_1}dH_3\right)\right], \tag{25}$$

$$R_{2424} = H_2H_4\left[\frac{k_1^2}{H_1^2}dH_2dH_4 + k_4^2 d\left(\frac{1}{H_4}dH_2\right)\right], \tag{26}$$

$$R_{3434} = H_3H_4\left[\frac{k_1^2}{H_1^2}dH_3dH_4 + k_4^2 d\left(\frac{1}{H_4}dH_3\right)\right]. \tag{27}$$

3 引力波的能量动量、功率流密度、辐射总功率和张力张量

由引力场总作用量对广义位移变换的不变性，经由 Nöether 定理并考虑到 Vierbein 表述中的 Einstein 方程，可得引力系统广义协变的能量动量守恒定律. 这一能量动量理论，克服了 Einstein-Tolman (E-T)，Landau-Lifshitz(L-L)，Møller 等人的非广义协变的守恒定律存在的各种缺陷，如 E-T，L-L 表述仅适用于准 Galilei 坐标系，Møller 表述不能解释 Bondi 平面波异于零的能量密度等问题. 并由这一理论可以得到与 GR 完全一致的引力辐射公式. 与用其他能量动量表述的计算结果的不同正在于这一理论对广义坐标变换的协变性，因此用这一理论计算的能量密度、能量、动量密度、动量、能量流密度、辐射功率和张力张量都是普遍成立的.

Vierbein 表述的对角度规引力波的能量密度、能量、动量密度和动量分别为[8,9]

$$w = \frac{k_1^2 c^4}{8\pi G e H_1}\left[\frac{1}{H_1} dH_1 d(H_2H_3) - d^2(H_2H_3)\right], \tag{28}$$

$$W = -\frac{k_1 c^4}{8\pi G}\oint_s \frac{1}{H_1} d(H_2H_3) n_1 \mathrm{d}s, \tag{29}$$

$$g_1 = \frac{\mathrm{i}k_1k_4c^3}{8\pi G e H_4}\left[d^2(H_2H_3) - \frac{1}{H_4} dH_4 d(H_2H_3)\right],$$
$$g_2 = g_3 = 0, \tag{30}$$

$$G_1 = \frac{\mathrm{i}k_4c^3}{8\pi G}\oint_s \frac{1}{H_4} d(H_2H_3) n_1 \mathrm{d}s,$$
$$G_2 = G_3 = 0, \tag{31}$$

其中 G 为引力常数. 对角度规引力波的能量流密度、辐射功率和张力张量分别为

$$J^j = \left(\frac{\mathrm{i}k_1k_4c^5}{8\pi G e} d\left[\frac{1}{H_1} d(H_2H_3)\right], 0, 0\right),$$
$$j = 1, 2, 3. \tag{32}$$

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \oint_s J^1 e n_1 \mathrm{d}s, \tag{33}$$

$$\chi^1_{(1)} = -\frac{k_4^2 c^4}{8\pi G e} d\left[\frac{1}{H_4} d(H_2H_3)\right], \tag{34}$$

$$\chi^2_{(2)} = -\frac{c^4}{8\pi G e} d\left[\frac{k_1^2}{H_1} d(H_3H_4) + \frac{k_4^2}{H_4} d(H_1H_3)\right], \tag{35}$$

$$\chi^3_{(3)} = -\frac{c^4}{8\pi G e} d\left[\frac{k_1^2}{H_1} d(H_2H_4) + \frac{k_4^2}{H_4} d(H_1H_2)\right]. \tag{36}$$

4 对-谐条件

由于引力场方程受到 Bianch 四个微分恒等式的限制，导致其十个分量方程并非十个函数上独立的方程. 因而谐和条件被自然地引入了引力理论. 文献[10,11]指出 谐和条件作为一个物理条件应该用于求解所有的引力问题. 只有赋予坐标以明确的几何和物理背景，才能将理论结果与实验观测作直接的比较. 谐和条件是加在 Einstein 场方程解上的普遍的物理条件. 场方程与谐和条件二者共同描述局域 Lorentz 时空中的物质的运动和引力现象. 事实上，正是弱场方程与线性化谐和条件共同预言了引力辐射和引力波的存在. 1938 年 Einstein-Infeld-Hoffman 由场方程导出运动理论时，也借助于谐和条件.

谐和条件由 Einstein 在引力波理论中以近似形式首先引入. 其严格形式由 de Donder 给出

$$\Gamma^\nu = g^{\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = 0, \tag{37}$$

其中 $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ 为 Riemann 时空的仿射联络. 对于对角度规，(37)式可写为

$$g^{\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \frac{1}{H_\nu^4}\partial_\nu H_\nu^2 - \frac{1}{2H_\nu^2H_\alpha^2}\partial_\nu H_\alpha^2 = 0, \tag{38}$$

对于对角度规引力行波，$H_\mu = H_\mu(u)$，(38)式的分量式为

$$\frac{1}{H_4}dH_4 - \frac{1}{H_1}dH_1 - \frac{1}{H_2}dH_2 - \frac{1}{H_3}dH_3 = 0,$$
$$\frac{1}{H_4}dH_4 - \frac{1}{H_1}dH_1 + \frac{1}{H_2}dH_2 + \frac{1}{H_3}dH_3 = 0, \tag{39}$$

上式可写成

$$d\frac{H_4}{H_1} = 0, \quad d(H_2H_3) = 0. \tag{40}$$

故

$$\frac{H_4}{H_1} = a, \quad H_2H_3 = b, \tag{41}$$

其中 a 和 b 均为与 u 无关的常量. 此即研究对角型引力波和引力辐射问题的对-谐条件.

5 引力波方程的严格解

Vierbein 表述的局域 Lorentz 群规范理论的场方程为

$$R^\nu_{(a)} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T^\nu_{(a)} + \frac{1}{2}e^\nu_{(a)} T\right). \tag{42}$$

由于目的是讨论行波问题，在物质体系之外 $T^{\eta}_{(a)}=T=0$. 故在谐和条件下真空引力场方程的分量式为[12,13]

$$\frac{2}{H_1H_4}\partial_4H_1\partial_1H_4-\frac{1}{H_4^2}\partial_1H_4\partial_4H_4-\frac{1}{H_1^2}\partial_4H_1\partial_1H_1+\frac{1}{H_2^2}\partial_1H_2\partial_4H_2+\frac{1}{H_3^2}\partial_1H_3\partial_4H_3=0,\tag{43}$$

$$\frac{1}{H_4^2H_1}[(\partial_4H_1)^2-(\partial_1H_4)^2]+\frac{2}{H_1^3}(\partial_1H_1)^2-\frac{1}{H_1^2}\partial_1^2H_1-\frac{1}{H_4^2}\partial_4^2H_1-\frac{1}{H_2^2H_1}(\partial_1H_2)^2-\frac{1}{H_3^2H_1}(\partial_1H_3)^2=0,\tag{44}$$

$$\frac{1}{H_1^2H_4}[(\partial_1H_4)^2-(\partial_4H_1)^2]+\frac{2}{H_4^3}(\partial_4H_4)^2-\frac{1}{H_4^2}\partial_4^2H_4-\frac{1}{H_1^2}\partial_1^2H_4-\frac{1}{H_2^2H_4}(\partial_4H_2)^2-\frac{1}{H_3^2H_4}(\partial_4H_3)^2=0,\tag{45}$$

$$\frac{1}{H_1^2}\partial_1^2H_2+\frac{1}{H_4^2}\partial_4^2H_2-\frac{1}{H_1^2H_2}(\partial_1H_2)^2-\frac{1}{H_4^2H_2}(\partial_4H_2)^2=0,\tag{46}$$

$$\frac{1}{H_1^2}\partial_1^2H_3+\frac{1}{H_4^2}\partial_4^2H_3-\frac{1}{H_1^2H_3}(\partial_1H_3)^2-\frac{1}{H_4^2H_3}(\partial_4H_3)^2=0,\tag{47}$$

其中 $\partial_\mu^2=\frac{\partial^2}{\partial x^\mu\partial x^\mu}$. 对于行波 $H_\mu=H_\mu(u)$，(43)—(47)式可写为

$$k_1k_4\left[\frac{2}{H_1H_4}dH_1dH_4-\frac{1}{H_4^2}(dH_4)^2-\frac{1}{H_1^2}(dH_1)^2+\frac{1}{H_2^2}(dH_2)^2+\frac{1}{H_3^2}(dH_3)^2\right]=0,\tag{48}$$

$$k_1^2\left[\left(\frac{1}{H_1^2}+\frac{k_4^2}{k_1^2}\frac{1}{H_4^2}\right)d^2H_1-\left(\frac{k_4^2}{k_1^2}\frac{1}{H_4^2}+\frac{2}{H_1^2}\right)\cdot\frac{1}{H_1}(dH_1)^2+\frac{1}{H_4^2H_1}(dH_4)^2+\frac{1}{H_2^2H_1}(dH_2)^2+\frac{1}{H_3^2H_1}(dH_3)^2\right]=0,\tag{49}$$

$$k_4^2\left[\left(\frac{1}{H_4^2}+\frac{k_1^2}{k_4^2}\frac{1}{H_1^2}\right)d^2H_4-\left(\frac{k_1^2}{k_4^2}\frac{1}{H_1^2}+\frac{2}{H_4^2}\right)\cdot\frac{1}{H_4}(dH_4)^2+\frac{1}{H_1^2H_4}(dH_1)^2+\frac{1}{H_2^2H_4}(dH_2)^2+\frac{1}{H_3^2H_4}(dH_3)^2\right]=0,\tag{50}$$

$$\left(\frac{k_1^2}{H_1^2}+\frac{k_4^2}{H_4^2}\right)\left[d^2H_2-\frac{1}{H_2}(dH_2)^2\right]=0,\tag{51}$$

$$\left(\frac{k_1^2}{H_1^2}+\frac{k_4^2}{H_4^2}\right)\left[d^2H_3-\frac{1}{H_3}(dH_3)^2\right]=0.\tag{52}$$

将行波对-谐条件(41)式中 $H_4/H_1=a$ 代入(48)式则有

$$\frac{1}{H_2^2}(dH_2)^2+\frac{1}{H_3^2}(dH_3)^2=0,\tag{53}$$

将(41)式中 $H_2H_3=b$ 代入上式，可得方程(48)式的严格解为 $H_2=A$，$H_3=B$. 其中 A 和 B 均为不等于零的任意常量. 该严格解满足(51)和(52)式. 因此(49)和(50)式可写成

$$d^2H_\mu-\frac{1}{H_\mu}(dH_\mu)^2=0,\tag{54}$$

式中 $\mu=1,4$，不求和. 由分离变量法易得(54)式的严格波动解为 $H_4=aH_1=Ce^{\pm iu}$. 其中 C 为任意常量. 故对-谐条件下真空引力波方程(48)—(52)式的严格波动解为

$$H_4=aH_1=Ce^{\pm iu},\quad H_2=A,\quad H_3=B,\tag{55}$$

即在 Vierbein 表述的局域 Lorentz 群引力规范理论中对-谐条件下，真空引力波方程的严格波动解为纯纵波，横波成分为零.

将对-谐条件下真空引力波方程的严格解(55)式代入(20)—(27)式，即得在 Vierbein 表述的行波对-谐条件下，Vierbein 表述的行波对角度规 R-C 曲率张量的所有分量恒为零，即

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}=0.\tag{56}$$

这时时空平直，不存在任何形式的引力波. 将(55)式代入(28)—(36)式，即得

$$J^j=\frac{\partial W}{\partial t}=w=W=g_k=G_k=\overset{k}{\chi}{}_{(k)}=0,\quad j,k=1,2,3,\tag{57}$$

即在 Vierbein 表述的行波对-谐条件下，Vierbein 表述的引力波的能量动量、功率流密度、辐射总功率和张力张量恒为零. 换句话说，在对-谐条件下，既不存在引力辐射，也不存在任何形式的引力波. 这与 Vierbein 表述的行波对-谐条件下 R-C 曲率张量的所有分量为零因而时空平直的结论完全一致.

对于引力纵波，Einstein 曾指出：由于线性化谐和条件下线性近似引力场方程的平面波解的能流不含纵波分量，该分量可通过坐标变换加以消除，所以引力纵波不是真实的引力波分量[14]. 以上则在严格对-谐条件下证明了严格引力波方程仅存在纯纵波

解，该解使 R-C 曲率张量的所有分量恒为零，因此时空平直；并且使引力波的能量动量、功率流密度、辐射总功率和张力张量均为零.故严格波动解(55)式为四维平直时空的平庸解，并不代表真正物理意义上的引力波及曲率波.这一结论当然不排除在非对-谐条件区域引力辐射的存在(1993 年 Nobel 物理学奖的成果).实验上要直接检测接收到引力波，恰恰应当努力寻求和创造非对角度规的物理条件.

6 对结论的简略讨论

以上结论是：在 Vierbein 表述的局域 Lorentz 群引力规范理论中严格对-谐条件下 R-C 曲率张量的所有分量为零，时空为平直时空，这时虽然不存在任何形式的引力波以及曲率波，但却存在不具有能量动量、功率流密度、辐射总功率和张力张量的纯纵波(55)式.对于平直时空，由 Vierbein 表述的局域 Lorentz 群引力规范理论，时空变换是且只能是 Lorentz 变换，而不能是其他任意变换，ds^2 为 Lorentz 变换的不变量，即 $ds'^2=ds^2$，$ds^2=H_\mu^2dx_\mu^2$.故时空平直时纯纵波(55)式不能通过坐标变换加以消除.因此可将(48)—(52)式称为度规波方程，度规波方程的严格解(55)式所代表的纯纵波称为度规波.

由对-谐条件 $H_4=aH_1$，$H_2=A$，$H_3=B$ 和 ds^2 的 Lorentz 变换不变性，可得对-谐条件中常量 $a=\pm1$，即 $H_4=\pm H_1$.由 $k_1=k$，$k_4=\mathrm{i}\omega/c$，可将 Vierbein 表述的局域 Lorentz 群引力规范理论中对-谐条件下的度规波方程的严格波动解写成显式

$$H_4=\pm H_1=C\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(kx-\omega t)}=C\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega(t-x/V)},$$
$$H_2=A,\quad H_3=B. \tag{58}$$

由(58)式，对于 S' 坐标系原点处的静止粒子，其度规波为 $H'=C\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega_0t'}$.由 Lorentz 变换的协变性有

$$H'_4=C\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega_0t'}=C\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega(t-x/V)}, \tag{59}$$

其中

$$\omega=\gamma\omega_0=\frac{\omega_0}{\sqrt{1-v/V}},\quad V=\lambda\nu=\frac{c^2}{v}=\frac{\omega}{k}. \tag{60}$$

故与静止于 S' 系的粒子联系的周期波只能是驻波，而 V 速运动的不携带能量动量的平面度规波则与 S 系中 v 速运动的自由粒子相缔合.这正是被 Einstein 称为“鬼场”(Gespensterfelder)的 de Broglie 的波粒二象性思想.注意到将 c^2/v 乘以 m/m 则分子具有能量量纲，分母具有动量量纲，记之为 E/p，由上式则有 $E/p=\omega/k$.由于以上时空度规不是 Minkowski 度规，因此时空不是 Minkowski 时空.可将此 Lorentz 变换不变量 $ds^2=H_\mu^2dx_\mu^2$ 所代表的四维时空称为度规波时空.

事实上，因为 Vierbein 表述的局域 Lorentz 群引力规范理论中严格对-谐条件下时空平直，由 $ds^2=H_\mu^2dx_\mu^2$ 为坐标变换的不变量和对-谐条件 $H_4=aH_1$，$H_2=A$，$H_3=B$ 并令 H_μ^2 为坐标变换的不变量，任意常数 $a=\pm1$，即可推出保证 $ds^2=H_\mu^2dx_\mu^2$ 为不变量的坐标变换是 Lorentz 变换，进而可得与狭义相对论(SR)力学完全相同的所有结论.因此无论对度规波时空或 Minkowski 时空，动量 $p_\mu=(\boldsymbol{p},\mathrm{i}E/c)$和位置 $x_\mu=(\boldsymbol{r},\mathrm{i}ct)$均为四维矢，而位相 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t$ 为不变量(四维标量)，故波矢 $k_\mu=(\boldsymbol{k},\mathrm{i}\omega/c)$必为四维矢[15].对于 1+1 维非平凡子空间，由于

$$\begin{vmatrix} p & k \\ \mathrm{i}\dfrac{E}{c} & \mathrm{i}\dfrac{\omega}{c}\end{vmatrix}=0. \tag{61}$$

因此$(p,\mathrm{i}E/c)$与$(k,\mathrm{i}\omega/c)$线性相关.故

$$\frac{E}{\omega}=\frac{p}{k}=\hbar, \tag{62}$$

其中 $\hbar$ 必然是既与 E，ω 无关，亦与 p，k 无关的实常数，其量纲为作用量 $\dim\hbar=ML^2T^{-1}$.此 Dirac 普适恒量 $\hbar$[16] 由实验确定为

$$\hbar=\frac{h}{2\pi}=1.05457266(63)\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}. \tag{63}$$

其中 h 为 Planck 常数.(62)式即 de Broglie 关系，将此代入(58)式即得与自由粒子 de Broglie 波的函数形式完全相同的度规波.

对度规波解(58)式，求导时有如下的对应关系：

$$\partial_t\sim\mp\mathrm{i}\omega,\quad \partial_t^2\sim\pm\omega^2,\quad \partial_x\sim\pm\mathrm{i}k,\quad \partial_x^2\sim\mp k^2. \tag{64}$$

可见微分算符等效于某种乘数.由(62)式即 de Broglie 关系，则

$$E\sim\pm\mathrm{i}\hbar\partial_t,\quad E^2\sim\mp\hbar^2\partial_t^2,$$
$$p\sim\mp\mathrm{i}\hbar\partial_x,\quad p^2\sim\pm\hbar^2\partial_x^2. \tag{65}$$

因此算符对应于力学量.

由于(19)式，则方程(54)式可写成

$$\partial_1^2H_\mu-\frac{1}{H_\mu}(\partial_1H_\mu)^2=0,$$
$$\partial_4^2H_\mu-\frac{1}{H_\mu}(\partial_4H_\mu)^2=0,\quad \mu=1,4. \tag{66}$$

或直接从(49)和(50)式亦得(66)式. 由(19),(66)式和 $k_1=k, k_4=\mathrm{i}\omega/c$ 及(62)式可得

$$\partial_x^2 H_\mu - \frac{p^2}{E^2}\partial_t^2 H_\mu = 0. \tag{67}$$

该方程与一维自由粒子的 Schrödinger 方程完全一致. 事实上,将经典力学中自由粒子的能量与动量的关系 $E=p^2/2m$ 代入上式,由算符对应关系即得

$$\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 H_\mu + \mathrm{i}\hbar\partial_t H_\mu = 0. \tag{68}$$

从时空几何角度看,四维平直时空的曲率张量为零,由与 H_2 和 H_3 无关的(22)式 $R_{1414}=0$,即可得度规波方程(54)式. 从物质运动角度看,四维平直时空的引力场张力张量为零,由(35)和(36)式等于零亦得到度规波方程(54)式. 因此本文给出的结论是自洽的.

当时空为 Minkowski 时空,即 $H_\mu^2=1$ 或 $H_\mu=1$ 时,由 Vierbein 表述的局域 Lorentz 群引力规范理论中对-谐条件下的度规波方程的严格度规波解(58)式,得 $u=n\pi$ 或 $u=2n\pi$,因而得到两组解,

$$\begin{cases}\Delta x = n\lambda/2\\ \Delta t = nT/2,\end{cases}\quad \begin{cases}\Delta x = n\lambda\\ \Delta t = nT,\end{cases}\quad n=0,1,2\cdots \tag{69}$$

因此,时空是离散(间断)的,时空度规是离散(间断)的. 式中 λ 和 T 分别为度规波的波长与周期. 两组解分别对应于弦理论中的开弦驻波与闭弦驻波,它们分别对应于量子论中不同情况下的角动量量子化条件. 早在 1854 年 Riemann 就提出了时空断裂、不连续等问题,1978 年 Ginzburg 再次提出[17]. 1912 年 Poincaré 提出时间原子(atom of time)概念,1982 年 Christ,Friedberg 和李政道提出随机格点规范理论[18—20],指出了时间可以是一个分立的动力学变量.

由以上的简略讨论可见,引力规范理论(挠率 $T_{abc}=e_a^\lambda e_b^\mu e_c^\nu T_{\lambda\mu\nu}=0$ 时即为 Vierbein 表述的 GR)增加了 SR 的内涵,使其概括了物质的波动性. 恢复了 de Broglie 对波粒二象性的诠释并注入了新的内容,从而揭示了引力理论、相对论与量子理论本质上存在着的逻辑上的、内在的深刻兼容和联系.

其他与量子理论或与 SR 相关的问题及新结论将在另文中讨论.

[1] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, The Classical Theory of Fields (Pergamon Press, Oxford, 1971), p. 336.

[2] D. Brill, J. A. Wheeler, *Rev. Mod. Phys.*, **29**(1957), 465.

[3] S. Weinberg,引力论和宇宙论,邹振隆、张历宁、陈建生等译(科学出版社,北京,1980),第 423 页 [S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, trans. by Zou Zhen-long, Zhang Li-ning, Chen Jian-sheng *et al*. (Science Press, Beijing, 1980), p. 423 (in Chinese)].

[4] C. N. Yang, R. L. Mills, *Phys. Rev.*, **96**(1954), 191.

[5] R. Utiyama, *Phys. Rev.*, **101**(1956), 1597.

[6] 邹振隆、黄硼、张元仲等,中国科学, **A9**(1979), 366 [Zou Zhen-long, Huang Pen, Zhang Yuan-zhong *et al*., *Science in China*, **A9**(1979), 366 (in Chinese)].

[7] Y. S. Duan, J. C. Liu, X. G. Dong, *Chinese Phys.*, **8**(1988), 120.

[8] 段一士、张敬业,物理学报, **19**(1963), 689 [Duan Yi-shi, Zhang Jing-ye, *Acta Physica Sinica*, **19**(1963), 689 (in Chinese)].

[9] 朱光亚、周光召主编,中国科学技术文库(数理科学和化学卷)(科学技术文献出版社,北京,1998),第 612 页 [Editor: Zhu Guang-ya, Zhou Guang-zhao, Papers on Science and Technology of China (Vol. on Mathematical Sciences and Chemistry) (Literature of Science and Technology Publishing Lts., Beijing, 1998), p. 612 (in Chinese)].

[10] 周培源,中国科学, **A12**(1982), 334 [Zhou Pei-yuan, *Science in China*, **A12**(1982), 334 (in Chinese)].

[11] 黄超光、周培源,中国科学, **A20**(1990), 295 [Huang Chao-guang, Zhou Pei-yuan, *Science in China*, **A20**(1990), 295 (in Chinese)].

[12] 青心,数学物理学报, **18**(1998), 407 [Qing Xin, *Acta Math. Scientia*, **18**(1998), 407 (in Chinese)].

[13] 青心,烟台大学学报(自然科学与工程版), **10**(1997), 94 [Qing Xin, *J. Yantai University* (*natural science and engineering*, **10**(1997), 94 (in Chinese)].

[14] A. Einstein, N. Rosen, *J. Franklin Inst.*, **223**(1937), 43.

[15] 吴大猷,量子力学(甲部)(科学出版社,北京,1984),第 51 页 [Wu Da-you, Quantum Mechanics (Vol. A) (Science Press, Beijing, 1984), p. 51 (in Chinese)].

[16] P. A. M. Dirac,量子力学原理,陈咸亨译(科学出版社,北京,1965),第 87 页 [P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, trans. by Chen Xian-heng (Science Press, Beijing, 1965), p. 87 (in Chinese)].

[17] V. L. Ginzburg,物理学和天体物理学中的若干重要问题,王贞松等译(科学出版社,北京,1987),第 42 页 [V. L. Ginzburg, Key Problems of Physics and Astrophysics, trans. by Wang Zhen-song *et al*. (Science Press, Beijing, 1987), p. 42 (in Chinese)].

[18] N. H. Christ, R. Friedberg, T. D. Lee, *Nuclear Physics*, **B202**(1982), 89.

[19] N. H. Christ, R. Friedberg, T. D. Lee, *Nuclear Physics*, **B210**(1982), 310.

[20] N. H. Christ, R. Friedberg, T. D. Lee, *Nuclear Physics*, **B210**(1982), 337.

A STUDY OF NON-EXISTENCE OF GRAVITATIONAL RADIATION AND GRAVITATIONAL WAVES UNDER THE DIAGONAL METRIC AND HARMONIC CONDITIONS

QING XIN

(*Department of Physics*，*Yantai University*，*Yantai* 264005)

(Received 15 December 1998；revised manuscript received 21 June 1999)

ABSTRACT

Under the strict diagonal metric and harmonic conditions，it is proved that all the components of the Riemann-Christoffel curvature tensor with Vierbein representation will vanish，and the energy-momentum，the power flow density，the total radiation power and the tension tensor of the gravitational waves will also vanish，thus the time-space will be flat and neither gravitational radiation nor gravitational waves will exist. Finally，the mathematical relation between the gravitational theory and the quantum theory is given.

PACC：0450；0430；0365