

# 用演化算法计算磁场 $B \leq 10^9$ G 中 二电子体系的基态能\*

刘莲君<sup>1)</sup> 徐静雯<sup>2)</sup> 赵 力<sup>1)</sup> 毛有东<sup>1)</sup> 李元香<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> 武汉大学物理系, 武汉 430072)

<sup>2)</sup> 武汉大学软件工程国家重点实验室, 武汉 430072)

(1999 年 7 月 12 日收到)

精确地计算磁场中二电子体系的基态能量是非常复杂和困难的, 利用 MCI 方法和演化算法获得了高精度的结果, 并进一步讨论了磁场对体系基态能的影响, 也探讨了直接利用演化算法进行变分计算的可能性, 结果表明演化算法与其他的优化算法相比, 能更有效地用于基态能量的计算, 并可望在物理学的其他领域也获得成功的应用.

PACC : 3110 ; 3115 ; 3120 ; 3190

## 1 引 言

在非相对论的情况下, 磁场中原子的哈密顿算符  $\hat{H}$  由于其中的库仑项与抗磁项具有不同的对称性, 使得相应的定态 Schrödinger 方程无法精确求解, 因而对这类问题的研究涉及到量子力学与原子物理学的许多基本问题, 如不可分离变量的量子体系的求解、对称性对结构和动力学的影响、经典混沌运动的量子力学表现等等. 这些问题的解决必然会推动原子分子物理、固体物理、天体物理等多方面进一步发展.

本文利用演化算法计算磁场  $B \leq 10^9$  G 中  $H^-$  离子等二电子体系的基态能. 这种思考是基于变分原理与求解 Schrödinger 方程等价<sup>[5]</sup>, 变分原理通过构造试探波函数使得体系哈密顿算符  $\hat{H}$  的期望值  $\bar{H}$  对变分参数进行变分时达到最小, 只要在试探波函数中增加变分参数的数目, 变分法得到的结果总可以很好地趋近于真实的能量值.

既然变分原理将求体系能量本征值问题变为了函数优化问题这就必然能用演化算法实现. 演化算法是为了解决函数优化等问题而发展起来的一种新型“仿生”方法<sup>[4]</sup>, 它模拟生物界的进化规律, 采用简单的编码技术来表示复杂的结构, 通过对编码进行各种遗传操作和用优胜劣汰的自然选择法则去指

导学习及确定下一步搜索方向, 因而不受其搜索空间的限制性条件(如可微、单峰等要求)的约束及不需要其他辅助信息而可获得最优解. 不仅如此, 由于它采用种群来组织搜索, 可以同时搜索多个区域而具有内在并行性及自组织、自学习、自适应等智能特点, 因此自其提出以来, 在许多领域获得了成功的应用.

本文用 1995 年 Goldman 提出的组态相互作用方法(MCI)<sup>[1]</sup>处理二电子体系的状态波函数(作为试探波函数)并将试探波函数中的变化参数构成的实数作为染色体, 将变分参数的搜索空间分成若干种群, 将  $\hat{H}$  的泛函作为适应函数,  $\bar{H}$  作为适应值, 利用仿射遗传算子或旋转遗传算子产生后代, 并进行杂交、变异, 最终得到了  $H^-$  离子等 10 种不同原子序数的二电子原子(或离子)的基态能.

## 2 物理方法

当  $B \leq 10^9$  G, 忽略相对论效应, 二电子体系的  $\hat{H}$  为(采用质心坐标系, 原子单位)

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \nabla_1^2 - \frac{1}{2} \nabla_2^2 - \frac{Z}{r_1} - \frac{Z}{r_2} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{2} \gamma^2 (\rho_1^2 + \rho_2^2), \quad (1)$$

式中  $r_{12} = |r_1 - r_2|$  为电子间的距离,  $\gamma \equiv B/2 =$

\* 中国科学院武汉物理研究所波谱与原子分子物理国家重点实验室开放基金(批准号 981510)资助的课题.

$$(2.12715 \times 10^{-10} \text{ a. u. / G}) B(G),$$

$$\rho_1 = r_1 \sin \theta_1 = x_1^2 + y_1^2,$$

$$\rho_2 = r_2 \sin \theta_2 = x_2^2 + y_2^2,$$

其中略去了电子的自旋-轨道相互作用,电子的自旋-自旋相互作用等以及核的有限质量,有限体积效应,核的电磁多极矩等超精细作用项,并且对于基态,  $S_z = 0, L_z = 0$ . 显然宇称  $\hat{P}$  及轨道角动量  $\hat{L}_z$  是本问题的守恒量. 与(1)式相应的定态 Schrödinger 方程为

$$\hat{H}\Psi(r_1, r_2) = E\Psi(r_1, r_2), \quad (2)$$

式中  $E$  是二电子体系的能量,  $\Psi(r_1, r_2)$  是二电子体系的状态波函数. 欲求解方程(2)是困难的. 因为(1)式中的库仑项与抗磁项具有不同的对称性,使得方程(2)无法分离变量. Goldman 提出的组态相互作用方法(CI)可以用于处理这类问题. CI 方法的实质是将精确的多电子原子的波函数用无穷多个组态的波函数的线性叠加表示:

$$\Psi(r_1, r_2) = \sum_{i=1}^N a_i \Phi_i^{\text{Slater}}(r_1, r_2), \quad (3)$$

$\{\Phi_i^{\text{Slater}}\}$  是一组组态波函数, 每个  $\Phi_i^{\text{Slater}}$  是一个电子组态波函数, 相应于一个 Slater 行列式. 取

$$\Phi_i^{\text{Slater}}(r_1, r_2) = e^{-\alpha r_1} e^{-\beta r_2} r_1^{a_i} r_2^{b_i} \Delta_{l_1 l_2}^{L M}(\hat{r}_1, \hat{r}_2) \pm r_1 \leftrightarrow r_2, \quad (4)$$

其中

$$\Delta_{l_1 l_2}^{L M}(\hat{r}_1, \hat{r}_2) = \sum_{m_1 m_2} l_1 m_1 l_2 m_2 |L_i M_i \cdot Y_{l_1 m_1}(\hat{r}_1) Y_{l_2 m_2}(\hat{r}_2). \quad (5)$$

为了保证  $\{\Phi_i^{\text{Slater}}\}$  的完备性, 原则上  $N$  应取无限大, 但实际计算时  $N$  取有限值. 库仑相互作用势用单电子球谐函数展开:

$$\frac{1}{r_{12}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2\lambda+1} \frac{r_{<}^{\lambda}}{r_{>}^{\lambda+1}} \sum_{q=-\lambda}^{\lambda} Y_{\lambda q}^*(\hat{r}_1) Y_{\lambda q}(\hat{r}_2). \quad (6)$$

基态下,  $l_1 = l_2 = 0, L = 0$ .  $\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{r_{>}}$ .

这个方法的一个弱点就是收敛速度相当缓慢, 欲获得高精度的结果需要大量的基矢, 计算量相当巨大. 究其原因是因为二电子体系波函数由于  $\frac{1}{r_{12}}$  的存在, 在  $r_1 = r_2$  处存在歧点(cusp point), 使得波函数在此处的微商不连续. 而 Slater 基矢(以  $r_1, r_2$  为显自变量的连续可微函数)的“光滑”性, 难以反映其客观实在. 1995年, Goldman 提出了修改的组态相

互作用方法(MCI)<sup>[1]</sup>, 对 Slater 基做了如下修改:

$$\Phi_i^{\text{Slater}}(r_{>}, r_{<}) = e^{-\alpha r_{<}} e^{-\tau r_{>}} r_{<}^{s_i} r_{>}^{t_i} [\Delta_{l_1 l_2}^{L M}(\hat{r}_1, \hat{r}_2) + \Delta_{l_1 l_2}^{L M}(\hat{r}_2, \hat{r}_1)]. \quad (7)$$

它是以  $r_{>} = \max(r_1, r_2), r_{<} = \min(r_1, r_2)$  为显自变量的函数, 在  $r_{<} = r_{>}$  (即  $r_1 = r_2$ ) 处微商不连续, 可以更好地反映物理实在, 从而克服了 Slater 基的缺点大大加快了其收敛性, 使用较少的基就可获得相当高的精度<sup>[2,3]</sup>.

将(3)式代入(2)式并进行运算, 可得矩阵形式的本征值方程为

$$HA = EBA, \quad (8)$$

式中  $H, B$  均为  $N \times N$  矩阵,  $A = (a_1, a_2, \dots, a_N)$  为列向量, 哈密顿矩阵元与交迭矩阵元分别为

$$H_{ij} = \Phi_i | \hat{H} | \Phi_j, \quad B_{ij} = \Phi_i | \Phi_j, \quad (9)$$

其中  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ,

求解方程(8)便可得问题的解.

在 MCI 方法中, 有一个重要步骤是确定最优的基矢, 这其实是一个函数优化的问题. 通常的计算程序都是采用单纯形法. 而传统的基于迭代原理的函数优化方法(如单纯形法, 共扼方向法, 惩罚函数法, 复合形法等), 一般对于目标函数都有较强的限制要求, 如连续, 可导, 单峰等, 而且大多根据目标函数局域性质确定下一步的搜索方向. 不同的初始值可能导致不同的结果.

为了克服上述不足, 从函数优化的角度来考虑这个问题, 将(2)式改写为

$$E(\sigma, \tau) = \bar{H} = \frac{\Psi | \hat{H} | \Psi}{\Psi | \Psi} = \frac{\sum_{i,j} a_i^* a_j \Phi_i | \hat{H} | \Phi_j}{\sum_{i,j} a_i^* a_j}, \quad (10)$$

再应用变分原理, 视  $\sigma, \tau$  为变分参数, 对泛函  $E(\sigma, \tau)$  变分为

$$\delta E(\sigma, \tau) = 0, \quad (11)$$

即可确定最佳变分参数  $\sigma, \tau$ , 进而可得体系基态能的上限值及相应的基态波函数的近似值.

由此可见, 求复杂原子的基态能问题实则为泛函(10)的优化问题, 记为

$$\min\{E(x), x_i > 0, x_i \in R, i = 1, 2, 3, \dots, N\}, \quad (12)$$

用演化算法可得问题的近似解.

### 3 演化算法

#### 3.1 基本概念

考虑优化问题  $\min\{f(x) | x \in X\}$  其中  $f$  称为目标函数,  $X$  称为解空间. 当用演化算法求解上述的问题时, 首先要通过某种编码方案将  $X$  映射到  $X_g$  (本文采用实数编码), 则  $X_g$  被称为基因空间;  $X$  中的自变量取值  $x$  在基因空间  $X_g$  中被称为个体, 而它的编码表示则被称为染色体, 同时与  $x$  对应的函数值  $f(x)$  被称为此个体的适应值, 演化算法即通过对适应值的判断进行最优搜索.

另外对于高维函数优化问题, 考虑到自变量可以表示为一个向量, 因此它的编码可表示为  $X_i(t) = (x_{1i}(t), x_{2i}(t), \dots, x_{mi}(t))$ , 其中  $i$  由群体规模  $n$  确定,  $m$  为目标函数的维数,  $t$  为演化代. 当算法具体执行时, 主要是对父体的染色体进行各种遗传操作, 包括复制、杂交和变异, 所有这些操作可统称为遗传算子.

#### 3.2 算法设计

```

{
  将搜索区域等分成  $n$  份, 在每一个区域中随机地取一个染色体, 得到初始群体.
  计算每个个体的适应值;
  按照适应值的好坏将适应值取前  $l$  名的个体挑选出来, 从而将种群规模收缩到  $l$ .
label 1: 寻找适应值最好和最坏的个体;
  if( 最好的适应值与最坏的适应值之差大于精度要求 )then
    {
label 2: 随机选择两个染色体作为父代;
      经过遗传算子产生一个后代;
      if( 该后代的适应值比最坏的适应值好 )
        用该后代替换掉适应值最坏的个体;
      else goto label 2;
      goto label 1;
    }
  输出结果;
}
  在以上算法中, 我们采用了两种遗传算子, 一种

```

是仿射遗传算子, 另一种是旋转遗传算子. 仿射遗传算子为

若父代

$$x_i(t) = (x_{1i}(t), x_{2i}(t), \dots, x_{mi}(t))$$

$$i = 1, 2, \dots, k,$$

则子代的等位基因

$$x_j(t+1) = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_{ji}(t) \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

其中  $\alpha_i$  为固定区间中的随机数, 且  $\sum \alpha_i = 1$ .

而旋转遗传算子(二维向量)为

若父代为

$$x_i(t) = (x_{1i}(t), x_{2i}(t), \dots, x_{mi}(t)),$$

$$x_j(t) = (x_{1j}(t), x_{2j}(t), \dots, x_{mj}(t)),$$

则子代为  $x_p(t+1), x_q(t+1)$  的等位基因

$$x_{kp}(t+1) = \cos\theta x_{ki}(t) + \sin\theta x_{kj}(t),$$

$$x_{kq}(t+1) = -\sin\theta x_{ki}(t) + \cos\theta x_{kj}(t),$$

其中  $k = 1, 2, \dots, m$ ,  $\theta$  为区间  $(0, 2\pi)$  中的随机数.

算法采用实数编码, 染色体记为  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ . 设初始种群规模为  $n$ , 收缩后的规模为  $l$ ,  $n > l$ . 适应函数取目标函数  $E(x)$ , 适应值取为  $E$ . 显然, 适应值越小越好. 在计算中, 取初始种群  $n = 100$  或  $50$ , 对每个参数在  $(0, 100)$  或  $(0, 50)$  的区间内粗略搜索, 收缩后的种群  $l = 3$ , 演化杂交算子中的随机参数  $\alpha$  在区间  $[-0.5, 1.5]$  内.

具体计算时, 我们将 slater 基  $\Phi_i$  (如(7)式所示) 分为三组, 相应的参数选取如下:

<p>第一组</p> $\begin{cases} \sigma_1 = Z, \tau_1 \text{ 由优化确定} \\ s_1 = 0 \\ t_1 = 0 \end{cases}$	<p>第二组</p> $\begin{cases} \sigma_2, \tau_2 \text{ 由优化确定} \\ s_2 = 0, 1, \dots, m_2^s - 1 \\ t_2 = 0, 1, \dots, m_2^t - 1 \end{cases}$
<p>第三组</p>	
$\begin{cases} \sigma_3, \tau_3 \text{ 由优化确定} \\ s_3 = 0, 1, \dots, m_3^s - 1 \\ t_3 = -s_3 + 1, -s_3 + 2, \dots, \max\{-s_3 + m_3^t - 1\} \end{cases}$	

(13)

基矢的个数由  $n_2^s, m_2^t, m_3^s, m_3^t$  确定. 本文中取  $n_2^s = 4, m_2^t = 4, m_3^s = 6, m_3^t = 5$ , 得到 20 套径向基矢, 它们确定了所取径向基函数的总数.

在具体的计算中, 我们取了 20 组 slater 基函数, 相应的参数设置为

第一组设置包含一个基函数  $s = 0, t = 0$ .

第二组设置包括 12 个基函数

$$s = 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 0,$$

$$t = 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3.$$

第三组设置包括 7 个基函数

$$s = 2, 3, 3, 4, 4, 5,$$

$$t = -1, -2, -1, -3, -2, -4, -3.$$

另外对于角向部分,由于体系处在基态、偶宇称,故总磁量子数  $M_z = 0$ ,总角量子数  $L = \text{偶数}$ .再考虑到三角形法则,所取 20 组 Slater 角向基函数中的参数  $l_1, l_2, L$  的设置

$$l_1 = 0, 1, 2, \dots, 15, 0, 5, 10, 15,$$

$$l_2 = 0, 1, 2, \dots, 15, 2, 7, 12, 17, \quad (14)$$

$$L = 0, 0, 0, \dots, 0, 2, 2, 2, 2.$$

具体计算时,我们先在零磁场的情况下仅取 20 个基函数确定最优变分参数,然后用这组参数按 (13) 式 (14) 式设置 400 个基函数,再用这 400 个基函数来求磁场取各种值时的基态能.相应的目标函数记为  $E_{(20)}(x)$ .

另外,严格说来当磁场取不同的值时,对应的最优参数是不同的.因此,对磁场取各种值的情况应该分别对参数进行优化,直接得到相应的基态能.于是按 (13) 式 (14) 式设置 400 个基函数直接对 (10) 式进行优化,也得到了体系的基态能.相应的目标函数记为  $E_{(400)}(x)$ .

## 4 结果和讨论

按上述方法,我们先计算了 10 种不同核电荷数的二电子体系相应的  $\tau_1, \sigma_2, \tau_2, \sigma_3, \tau_3$  的最优参数值,如表 1 所示.

表 1 零磁场下 10 种二电子体系相应的 5 个最优参数值

	$\tau_1$	$\sigma_2$	$\tau_2$	$\sigma_3$	$\tau_3$
$Z = 1$	0.23470	0.71401	0.57115	0.53135	0.48334
$Z = 2$	4.71321	1.59120	1.95321	1.50541	1.19335
$Z = 3$	5.70444	2.31768	2.50435	2.81335	2.39676
$Z = 4$	6.79143	3.71655	3.12384	3.32648	3.53165
$Z = 5$	7.72946	4.81654	6.09198	4.98333	4.22245
$Z = 6$	8.52324	5.61683	7.89122	5.91231	5.00492
$Z = 7$	9.98953	6.61385	6.04468	6.76131	6.09999
$Z = 8$	11.01593	8.69946	8.00004	7.70094	7.27413
$Z = 9$	11.51665	8.96458	9.80103	8.91253	8.00117
$Z = 10$	13.11490	9.79962	9.71343	9.68876	9.19547

上述数据说明随着核电荷数  $Z$  的增长,各参数相应变大.这是因为我们所取的径向基矢的形式为  $\eta_i = e^{-\sigma_i r} < e^{-\tau_i r} > r^{\sigma_i} < r^{\tau_i} >$ .随着  $Z$  变大,核对电子的束缚越紧,所以 5 个参数也变大.

表 2 不同磁场下二电子体系的基态能量

	$H^-$	He	$Li^+$	$Be^{2+}$	$B^{3+}$
0	-0.527736	-2.903714	-7.27990	-13.65555	-22.03096
$10^3$	-0.527736	-2.903714	-7.27990	-13.65555	-22.03096
$10^6$	-0.527736	-2.903714	-7.27990	-13.65555	-23.03096
$10^7$	-0.527700	-2.903710	-7.27990	-13.65555	-22.03096
$6 \times 10^7$	-0.526487	-2.903584	-7.27985	-13.65553	-22.03094
$10^8$	-0.524425	-2.903354	-7.27977	-13.65548	-22.03091
$2 \times 10^8$	-0.515965	-2.902276	-7.27936	-13.65527	-22.03079
$4 \times 10^8$	-0.489014	-2.897984	-7.27775	-13.65443	-22.03027
$6 \times 10^8$	-0.452923	-2.890902	-7.27506	-13.65303	-22.02942
$8 \times 10^8$	-0.410119	-2.881127	-7.27131	-13.65108	-22.02822
$10^9$	-0.361884	-2.868776	-7.26650	-13.64856	-22.02668

表 2 给出了最终计算结果,即不同磁场下,各种不同类型的双电子体系的基态能量(实际计算了  $Z = 1$  到 10 的各种情况,限于篇幅只列出了部分结果).图 1(a)~(e)则分别反映了  $H^-, He, Li^+, Be^{2+}, B^{3+}$ ,各自基态能量随着磁场的变化情况.可以看出一方面对于同一  $Z$  值,体系基态能量随着  $B$  的增长而升高,这可以从  $\hat{H}$  中的逆磁项  $\frac{1}{2} \gamma^2 (\rho_1^2 + \rho_2^2)$  中找到答案;另一方面随着  $Z$  核电荷数增加,核的库仑作用增强,磁场的影响相对而言逐渐减弱,能量变化越来越不明显.图 2 对此反映得更加清楚.考虑逆磁项  $\frac{1}{2} \gamma^2 (\rho_1^2 + \rho_2^2)$  的形式以及磁场对于波函数的影响不大,可以预料能量与磁场成二次方关系.据此我们对计算结果进行了二次拟合,并在图中绘出了它们各自的拟合曲线,从图中可以看到拟合曲线(用虚线表示)同实际点(以 \* 号标出)拟合得非常好.这证实了我们的猜想.图(f)反映了核电荷数  $Z = 1-5$  的二电子体系在磁场中的基态能量变化情况(相对零场而言),可见随着  $Z$  的增大,同一磁场中不同体系由于磁场引起的能量的增加迅速减小.

表 3 给出与用其他方法得到的数据的对比,由此可见我们计算方法结果的准确性与可靠性.

上述都是我们在单台微机上运行获得的结果,计算结果与用求本征值方法得到的结果一致.虽然

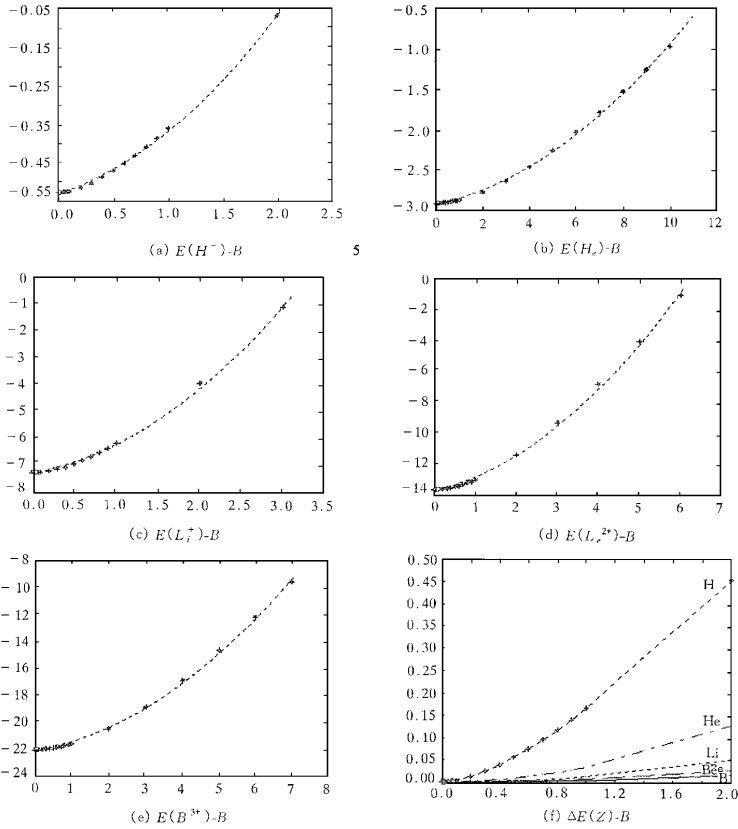


图 1 不同核电荷的二电子体系基态能量与磁场的关系曲线( $E(Z)-B$ ) (图中横坐标表示磁场  $B$  (单位:  $\text{g.s}$ ), 纵坐标表示能量  $E$  (单位:  $\text{a.u}$ ))

表 3 (a) 不同方法获得磁场中  $\text{H}^-$  基态能

$B/10^7 \text{ G}$	Adiabatic results		Experimental Value	H-F	CI	演化算法(MCI)
	Upper	Lower				
0.0	-0.52592	-0.53679	-0.5278	-0.4880	-0.5275	-0.5277
0.1	-0.52592	-0.53679				-0.5277
1.0	-0.52588	-0.53676				-0.5277
10.0	-0.52167	-0.53306				-0.5244

(b) 不同方法获得磁场中  $\text{He}$  基态能量

$B/10^8 \text{ G}$	Adiabatic results		Experimental Value	H-F	CI	演化算法(MCI)
	Upper	Lower				
0.0	-2.89517	-2.92967	-2.9037	-2.8617	-2.9030	-2.9037
0.1	-2.89516	-2.92966				-2.9037
1.0	-2.89480	-2.92930				-2.9034
4.0	-2.88935	-2.92285				-2.8980

本问题中演化算法内在的本质并行性并没有发挥,但在求高阶矩阵本征值问题中由于内存占用大,若要计算  $10^4$  以上的矩阵,一般的工作站也难胜任.演化算法不仅占用的内存小,而且它还有相当大的改进余地并能采用并行处理技术,若能根据实际物理问题的特点去选择更好的遗传操作算子,相信处理如此多的参数优化问题是非常方便的,其计算效率和精度也会大大提高.综上,演化算法在计算磁场中二电子体系基态能量的问题中是相当成功的.可以

预料它将在理论物理的其他领域也会获得应用,其自身也将不断完善,成为物理工作者的又一有利工具.

- [ 1 ] S. P. Goldman, *Phys. Rev.*, **A52** (1995), 3718.
- [ 2 ] Jianguo Rao, *Phys. Rev.*, **A55** (1997), 1050.
- [ 3 ] Liulian Jun, *Mod. Phys. Lett.*, **B12** 24 (1998), 1021.
- [ 4 ] 潘正君等, 演化计算, 北京, 清华大学出版社, 1998.
- [ 5 ] 石玉珠等, 物理学报, **47** (1998), 1241 [ Y. Z. Shi *et al.*, *Acta Physica Sinica* **47** (1998), 1241 (in Chinese)].

## USING EVOLUTIONARY ALGORITHM FOR CALCULATING THE GROUND-STATE ENERGY OF DOUBLE-ELECTRON SYSTEM IN A UNIFORM MAGNETIC FIELD BELOW $10^9$ G

LIU LIAN-JUN<sup>1)</sup> XU JING-WEN<sup>2)</sup> ZHAO LI<sup>1)</sup> MAO YOU-DONG<sup>1)</sup> LI YUAN-XIANG<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> (Department of Physics, Wuhan University, Wuhan 430072)

<sup>2)</sup> (State Key Laboratory of Software Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072)

(Received 12 July 1999)

### ABSTRACT

It is very difficult to calculate accurate ground-state energies of double-electron systems in a uniform magnetic field. By using the modified configuration-interaction method and the evolutionary algorithm we obtained highly accurate results. The discussion of the role of magnetic field in the ground state energy of a double-electron system and the possibility of variational ground-state-energy calculation by directly using evolutionary algorithm is presented. The results show that compared with other algorithms such as simplex method, evolutionary algorithm is more efficient in calculating atomic energies, and can be used in other fields of Physics.

**PACC** : 3110 ; 3115 ; 3120 ; 3190