第 49 卷 第 3 期 2000 年 3 月
1000-3290/2000/49(03)/0389-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 3, March, 2000

一个非线性方程的显式行波解*

郑　　张鸿庆
(大连理工大学应用数学系,大连　116024)
(1999 年 4 月 11 日收到;1999 年 5 月 29 日收到修改稿)

利用双曲函数法和吴文元代数消元法,获得了 R-L-W 方程的多组行波解,其中包括新的行波解、有理函数形式的行波解.

PACC:0340K;0290

1　引　　言

在许多科学领域中,很多科学问题的研究最终可用非线性发展方程来描述,然而如何求解它们,一直是数学家和物理学家研究的重要课题.近年来已发展了许多求解这些非线性发展方程的方法,例如反散射方法、齐次平衡法等.文献[1]用三角函数法得到了非线性发展方程的一批解,基于这一思想,下面提出双曲函数法解题思想:

1. 对非线性发展方程作行波约化变换:设 $u(x,t)=\phi(\xi)$,$\xi=x-ct$,将这一变换代入原方程得到一常微分方程

$$G(\phi,\phi',\cdots)=0. \tag{1}$$

2. 设(1)式有如下形式的解:

$$\phi(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\sinh^{i-1}\phi(b_i\sinh\phi+a_i\cosh\phi)+a_0,$$

且 $d\phi/d\xi=\sinh\phi$,或 $d\phi/d\xi=\cosh\phi$,其中 a_0,a_i,b_i 为待定常数,n 可以通过最高阶导数项和非线性项来确定.

3. 将以上诸式代入(1)式,整理后可得关于 $\sinh^j\phi\cosh^i\phi$ $(j=0,1,\cdots,n-1;i=0,1)$,$\sinh^n\phi$ 这些项的式子.可以利用函数组$(1,e^{\phi},e^{2\phi},\cdots,e^{2n\phi})$的线性无关性,很快证明 $\sinh^j\phi\cosh^i\phi$ $(j=0,1,\cdots,n-1;i=0,1)$,$\sinh^n\phi$ 这些项是线性无关的,因此令这些项的系数为零,得到一组关于 a_0,a_i,b_i 的代数方程组,解这代数方程组就可得原方程的解.

当然,如果变化第(2)步可求得方程的另外一些解,本文将给出这方面的探索.下面给出详细步骤.

2　R-L-W 方程的行波解

R-L-W 方程

$$u_t-au_{xxt}=\left(bu+\frac{d}{2}u^2\right)_x, \tag{2}$$

设 $u(x,t)=\phi(\xi)$,$\xi=x-ct$,原方程变为

$$ac\,\phi''-(b+c)\phi-\frac{d}{2}\phi^2=0. \tag{3}$$

1. 设 $\phi(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\sinh^{i-1}\phi(b_i\sinh\phi+a_i\cosh\phi)+a_0$,$d\phi/d\xi=\sinh\phi$.类似于齐次平衡法,通过平衡最高阶导数项 ϕ'' 与非线性项 ϕ^2 中 $\sinh\phi$ 的最高次幂,可解得 n 为 2.

$$\begin{aligned}\phi&=b_1\sinh\phi+a_1\cosh\phi+b_2\sinh^2\phi\\&\quad+a_2\sinh\phi\cosh\phi+a_0,\\ \phi^2&=(b_2^2+a_2^2)\sinh^4\phi+2a_2b_2\sinh^3\phi\cosh\phi\\&\quad+2(a_1a_2+b_1b_2)\sinh^3\phi+2(b_1a_2+b_2a_1)\sinh^2\phi\\&\quad\cdot\cosh\phi+(b_1^2+a_1^2+a_2^2+2a_0b_2)\sinh^2\phi\\&\quad+2(b_1a_2+a_0a_2)\sinh\phi\cosh\phi+2(a_0b_1\\&\quad+a_1a_2)\sinh\phi+2a_{01}\cosh\phi+a_0^2+a_1^2,\\ \phi''&=6b_2\sinh^4\phi+6a_2\sinh^3\phi\cosh\phi+2b_1\sinh^3\phi\\&\quad 2a_1\sinh^2\phi\cosh\phi+4b_2\sinh^2\phi\\&\quad+a_2\mathrm{snh}\phi\cosh\phi+b_1\sinh\phi.\end{aligned}$$

把以上诸式代入(3)式,并分别令 $\sinh^j\phi\cosh^i\phi$ $(i=0,1;j=0,\cdots,3)$,$\sinh^4\phi$ 的系数为零,得

$$-\frac{d}{2}(a_0^2+a_1^2)-(b+c)a_0=0;$$

* 国家自然科学基金(批准号:19572022)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:98014119)资助的课题.

$$-da_0a_1-(b+c)a_1=0;$$
$$acb_1-d(a_0b_1+a_1a_2)-(b+c)b_1=0;$$
$$aca_2-d(a_1b_1+a_0a_2)-(b+c)a_1=0;$$
$$4acb_2-\frac{d}{2}(b_1^2+a_1^2+a_2^2+2a_0b_2)-(b+c)b_2=0;$$
$$2aca_1-d(a_2b_1+a_1b_2)=0;$$
$$2acb_1-d(a_2a_1+b_1b_2)=0;$$
$$6aca_2-da_2b_2=0;$$
$$6acb_2-\frac{d}{2}(a_2^2+b_2^2)=0.$$

利用吴文元代数消元法,可得如下解:

1) $a_1=0, a_2=0, b_1=0, a_0=0, b_2=\frac{12ab}{d(4a-1)}$, $c=\frac{b}{4a-1}$, $4a-1\neq 0$;

2) $a_1=0, a_2=0, b_1=0, a_0=-\frac{8ab}{d(4a+1)}$, $b_2=-\frac{12ab}{d(4a+1)}$, $c=-\frac{b}{4a+1}$, $4a+1\neq 0$;

3) $a_1=0, a_2=\pm\frac{6ab}{d(a+1)}, b_1=0, a_0=-\frac{2ab}{d(a+1)}$, $b_2=-\frac{6ab}{d(a+1)}$, $c=-\frac{b}{a+1}$, $a+1\neq 0$;

4) $a_1=0, a_2=\pm\frac{6ab}{d(a-1)}, b_1=0, a_0=0, b_2=\frac{6ab}{d(a-1)}$, $c=\frac{b}{a-1}$, $a-1\neq 0$.

对方程 $d\phi/d\xi=\sinh\phi$,通过积分可得 $\sinh\phi=-\operatorname{csch}\xi$, $\cosh\phi=-\coth\xi$(积分常数取为零).于是 R-L-W 方程有如下解:

1) $u(x,t)=\frac{12ab}{d(4a-1)}\operatorname{csch}^2\xi$, $\xi=x-\frac{b}{4a-1}t$;

2) $u(x,t)=-\frac{12ab}{d(4a+1)}\operatorname{csch}^2\xi-\frac{8ab}{d(4a+1)}$, $\xi=x+\frac{b}{4a+1}t$;

3) $u(x,t)=-\frac{6ab}{d(a+1)}\operatorname{csch}^2\xi+\frac{6ab}{d(a+1)}\operatorname{csch}\xi\coth\xi-\frac{2ab}{d(a+1)}$, $\xi=x+\frac{b}{a+1}t$;

4) $u(x,t)=\frac{6ab}{d(a-1)}\operatorname{csch}^2\xi\pm\frac{6ab}{d(a-1)}\operatorname{csch}\xi\coth\xi$, $\xi=x-\frac{b}{a-1}t$.

2. 设 $d\phi/d\xi=\cosh\phi$,可得

$$\phi''=6b_2\sinh^4\phi+6a_2\sinh^3\phi\cosh\phi+2b_1\sinh^3\phi+a_1\cosh\phi\cdot 2a_1\sinh^2\phi\cosh\phi+8b_2\sinh^2\phi+5a_2\sinh\phi\cosh\phi+2b_1\sinh\phi+2b_2.$$

同理,把上式和 ϕ, ϕ^2 代入(3)式,并分别令 $\sinh^j\phi\cosh^i\phi$ $(i=0,1;j=0,\cdots,3)$, $\sinh^4\phi$ 的系数为零,得

$$-\frac{d}{2}(a_0^2+a_1^2)-(b+c)a_0+2acb_2=0;$$
$$-da_0a_1-(b+c)a_1+aca_1=0;$$
$$2acb_1-d(a_0b_1+a_1a_2)-(b+c)b_1=0;$$
$$5aca_2-d(a_1b_1+a_0a_2)-(b+c)a_2=0;$$
$$8acb_2-\frac{d}{2}(b_1^2+a_1^2+a_2^2+2a_0b_2)-(b+c)b_2=0;$$
$$2aca_1-d(a_2b_1+a_1b_2)=0;$$
$$2acb_1-d(a_2a_1+b_1b_2)=0;$$
$$6aca_2-da_2b_2=0; 6acb_2-\frac{d}{2}(a_2^2+b_2^2)=0.$$

利用吴文元代数消元法,可得如下解:

1) $a_1=0, a_2=0, b_1=0, a_0=-\frac{24ab}{1+4a}, b_2=-\frac{12ab}{d(1+4a)}$, $c=-\frac{b}{1+4a}$, $1+4a\neq 0$;

2) $a_1=0, a_2=0, b_1=0, a_0=-\frac{8ab}{1-4a}, b_2=-\frac{12ab}{d(1-4a)}$, $c=-\frac{b}{1-4a}$, $1-4a\neq 0$.

对方程 $d\phi/d\xi=\cosh\phi$,通过积分可得 $\sinh\phi=-\cot\xi$, $\cosh\phi=\cos\xi$(积分常数取为零).于是 R-L-W 方程有如下解:

1) $u(x,t)=-\frac{12ab}{d(1+4a)}\cot^2\xi-\frac{24ab}{1+4a}$, $\xi=x+\frac{b}{1+4a}t$;

2) $u(x,t)=-\frac{12ab}{d(1-4a)}\cot^2\xi-\frac{8ab}{1-4a}$, $\xi=x+\frac{b}{1-4a}t$.

3. 设 $\phi(\xi)=\sum_{i=0}^{m}a_i\nu^i$, $\nu'=b_1\nu^{(m+2)/2}$,将这些代入(3)式,可得一关于 ν 的各次幂的多项式,令 ν 的各次幂的系数为零,可得一组关于 a_i, b_1 的代数方程组,其解为

$$a_{m-1}=\cdots a_0=0, b=-c,$$
$$b_1=\pm\frac{1}{m}\sqrt{\frac{-da_m}{3ab}}; daba_m>0,$$

所以原方程的解为

$$u(x,t)=-\frac{12ab}{d\xi^2},\quad \xi=x+ct.$$

[1] 闫振亚、张鸿庆、范恩贵,物理学报,**48**(1999),1 [Yan Zhen-Ya,Zhang Hong-Qing,Fan En-Gui,*Acta Physica Sinica*,**48**(1999),1(in Chinese)].

[2] S.M.Zhu *et al*.,*Modern Math. Mech*.(Publishing House of Shanghai University,Shanghai,1997).

[3] A. W. Guan,Lecture on Wu Wenjun-Elimination (Publishing House of Beijing University of Technology,Beijing,1994).

[4] E.G.Fan,H.Q.Zhang,*Phys. Lett*.,**A246**(1998),403.

EXPLICIT TRAVELLING WAVE SOLUTIONS TO A NONLINEAR EQUATION*

ZHENG YUN ZHANG HONG-QING

(*Department of Applied Mathematics,Dalian University of Technology,Dalian* 116024)

(Received 11 April 1999;revised manuscript received 29 May 1999)

ABSTRACT

In this text,many travelling wave solutions to R-L-W equation were obtained by using hyperbola function method and Wu-elimination method,which inculde new travelling wave solutions,rational travelling wave solutions. The method used in this work also can be applied to other nonlinear equations.

PACC:0340K;0290

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19572022) and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China (Grant No. 98014119).