

混沌时间序列的 Volterra 自适应预测*

张家树 肖先赐

(电子科技大学电子工程系, 成都 610054)

(1999 年 4 月 12 日收到; 1999 年 9 月 19 日收到修改稿)

基于混沌动力系统相空间的延迟坐标重构, 提出了一种预测混沌时间序列的 Volterra 自适应滤波预测法, 对 8 种低维混沌序列采用二阶 Volterra 自适应滤波器进行预测的实验结果表明: 当滤波器的长度 N_f 足够大时, Volterra 自适应滤波器能够有效地预测低维混沌时间序列, 且 N_f 的选择不仅与 D_2 有关, 还与混沌映射的光滑程度有关.

PACC: 0545

1 引 言

混沌现象是自然界广泛存在的一种不规则运动. 混沌是一种非线性的、确定的低维动力学系统的复杂行为^[1]. 来源于非线性系统的混沌信号固有的宽带、似噪声、对初始条件极敏感且难以预测等特点, 使其在信号处理、通信、控制、电子对抗等领域中有着越来越重要的作用, 越来越多的研究人员进行混沌的动态特征分析及其应用的研究, 期望利用简单的动态系统, 揭示混沌信息处理的主要关系^[2-4].

随着混沌理论和应用技术研究的不断深入, 混沌时间序列的建模和预测已成为混沌信息处理研究领域近几年来的一个重要研究热点^[3-8]. 这是因为混沌信号并不是真正的随机信号, 而是由低维非线性动力系统产生的确定的伪随机信号. 它与高维的随机信号的区别主要在于: 混沌信号可通过重构体现在嵌入空间的一个低维流形上, 其重构的轨迹可以预测, 而随机信号则不能^[7]. 本文基于相空间重构的基本思想和非线性系统的 Volterra 级数展开式, 提出了混沌时间序列的 Volterra 自适应预测法, 结合 Taken 嵌入定理, 确定了 Volterra 自适应预测滤波器的长度.

2 非线性动力系统与时间序列建模

考虑一个光滑动力系统,

$$\psi_y: S \rightarrow S \quad (1)$$

为在状态空间 S 上构成一奇异吸引子的光滑映射. 状态空间 S 的维数为 s , $y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_s\}$ 为系统的一个状态, 并被视为状态空间 S 中的一点. 设单变量时间序列 $\{x(t_i) (i = 1, 2, \dots)\}$ 为系统状态 $y(t_i)$ 中的一个测量序列, 通常将 $\{x(t_i) (i = 1, 2, \dots)\}$ 看成为系统动态行为在状态空间 S 中的一个投影分量, 即

$$x(t_i) = \alpha(y(t_i)), \quad (2)$$

其中 $\alpha(\cdot)$ 为一个测量函数. 假定 $\{x(t_i) (i = 1, 2, \dots)\}$ 为系统进入稳态后所作的测量, 则时间序列 $\{x(t_i) (i = 1, 2, \dots)\}$ 可看成为平稳的, 进而可定义一个“延迟坐标嵌入” $\Psi: S \rightarrow R^m$

$$\begin{aligned} x = \Phi(y) &= (\alpha(y(t)), \alpha(\varphi_y^{-1}(y(t))), \\ &\dots, \alpha(\varphi_y^{-m+1}(y(t)))) \\ &= (x(t), \alpha(t - \tau), \dots, \alpha(t - (m - 1)\tau)), \end{aligned} \quad (3)$$

其中 m 为嵌入维数. Taken 的嵌入定理表明: 若 Φ 为状态空间 R^s 和嵌入空间 R^m 的一个微分同胚, 当 $m \geq 2s + 1$, $x(t)$ 中的动态行为可从状态 $y(t)$ 与微分同胚 $x(t) = \Phi(y(t))$ 上获得, 即

$$\begin{aligned} x(t + T) &= \Phi(y(t + T)) = \Phi \circ \varphi_y^T(y(t)) \\ &= \Phi \circ \varphi_y^T \circ \Phi(x(t)) = F(x(t)) \end{aligned} \quad (4)$$

将状态 $x(t + T)$ 投影到单一坐标上, 则有

$$\alpha(t + T) = \pi_i(F(x(t))) = F(x(t)), \quad (5)$$

其中 $F(\cdot)$ 为由动力系统产生的时间序列可通过上述延迟坐标法重构出原动力系统演化的预测模型.

* 国防预研基金(批准号: 98JS05.4.1.DZ0205)资助的课题.

由于时间序列 $\{x(t_i) | i=1, 2, \dots\}$ 不可能全为原动力系统产生的干净序列值, 它还叠加测量误差等各种噪声, 则一个实际的预测模型应为

$$x(t+T) = F(x(t)) + \xi(t), \quad (6)$$

其中 $\xi(t)$ 为噪声.

3 Volterra 自适应预测滤波器

设非线性离散动力系统的输入 $x(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T$ 输出为 $y(n) = \hat{x}(n+1)$, 则该非线性系统函数的 Volterra 级数展开表示式为

$$\begin{aligned} x(n+1) &= F(x(n)) \\ &= h_0 + \sum_{m=0}^{+\infty} h_1(m)x(n-m) \\ &\quad + \sum_{m_1=0}^{+\infty} \sum_{m_2=0}^{+\infty} h_2(m_1, m_2)x(n-m_1) \\ &\quad \cdot x(n-m_2) + \dots + \sum_{m_1=0}^{+\infty} \sum_{m_2=0}^{+\infty} \\ &\quad \dots \sum_{m_p=0}^{\infty} h_p(m_1, m_2, \dots, m_p) \\ &\quad \cdot x(n-m_1)x(n-m_2) \\ &\quad \dots x(n-m_p) + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $h_p(m_1, m_2, \dots, m_p)$ 为 p 阶 Volterra 核. 这种无穷级数展开式在实际应用中难以实现, 必须采用有限截断和有限次求和的形式^[9]. 最常用的是下面的二阶截断求和的形式:

$$\begin{aligned} \hat{x}(n+1) &= h_0 + \sum_{m=0}^{N_1-1} h_1(m)x(n-m) \\ &\quad + \sum_{m_1=0}^{N_2-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} h_2(m_1, m_2)x(n \\ &\quad - m_1)x(n-m_2). \end{aligned} \quad (8)$$

(8) 式所示非线性 Volterra 自适应滤波器可描述成如图 1 所示的结构^[10], 非线性扩展后的信号为 $U(n) = [u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)]^T$, 且 $M \geq N_1, N_2$.

在实际应用中, 滤波器的长度 N_1, N_2 应为有限长. 对于混沌时间序列, 由 Taken 嵌入定理可知: 一个混沌时间序列要完全描述原动力系统的动态行为, 至少需要 $m \geq 2D_2 + 1$ 个变量, 才能全面描述其动力学特征. 因此, 应将 N_1, N_2 均取为 $N_1 = N_2 = m \geq 2D_2 + 1$, 则用于混沌序列预测的滤波器为

$$\begin{aligned} \hat{x}(n+1) &= h_0 + \sum_{i=0}^{m-1} h(i)x(n-i) + \\ &\quad \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=i}^{m-1} h_2(i, j)x(n-i)x(n-j), \end{aligned} \quad (9)$$

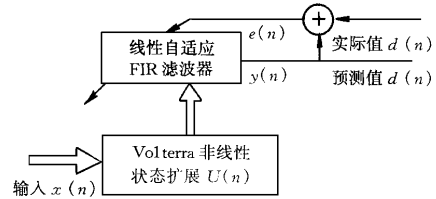


图 1 Volterra 自适应滤波器结构

其状态扩展后的系数总个数为 $M = 1 + m + m(m+1)/2$.

定义线性自适应有限脉冲响应(FIR)滤波器的输入矢量 $U(n)$ 为 $U(n) = [1, x(n), x(n-1), \dots, x(n-m+1), x^2(n), x(n)x(n-1), \dots, x^2(n-m+1)]^T$, 系数矢量为 $H(n) = [h_0, h(0), h(1), \dots, h(m-1), h_2(0,0), h_2(0,1), \dots, h_2(m-1, m-1)]^T$ (9) 式可表示为

$$\hat{x}(n+1) = H^T(n)U(n). \quad (10)$$

(9) 式表示的 Volterra 自适应滤波器的系数可直接利用线性 FIR 滤波器的自适应算法来确定. 对于 (10) 式这种二阶 Volterra 自适应滤波器, 可采用的自适应算法为时间正交(TDO)自适应算法^[11]. 对于输入矢量 $U(n)$, 系数矢量 $H(n)$, TDO 算法可描述如下:

$$\begin{aligned} d(n) &= x(n), \quad \hat{x}(n) = \hat{d}(n), \\ \hat{d}(n) &= H^T(n-1)U(n-1), \\ H(n) &= H(n-1) + c \times \frac{e(n-1)}{U^T(n)U(n)}U(n-1), \\ e(n) &= d(n) - \hat{d}(n), \end{aligned} \quad (11)$$

其中 c 为控制收敛性能的参数.

4 Volterra 自适应预测的性能实验及讨论

下面就低维混沌序列的 Volterra 自适应预测进行讨论. 实验中首先按下式对混沌序列进行归一化处理:

$$x(i) = \left[y(i) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) \right] / \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[y(j) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (12)$$

其中 $\{y(i)\}$ 为原始的混沌序列, $\{x(i)\}$ 为归一化的混沌序列, N 为混沌序列的总长度. 再取 $\{x(i)\}$ 的前 100 个样值用来训练 Volterra 自适应滤波器, 获得预测模型后, 再用 $\{x(i)\}$ 的 1000 点以后的 400 个样值来作预测验证. 以预测相对误差作为评测标准. 此处的预测相对误差 Perr 定义为

$$\text{Perr} = \sum_{k=1}^{N_p} [\hat{x}(k) - x(k)]^2 / \sum_{k=1}^{N_p} x^2(k). \quad (13)$$

下面给出采用二阶 Volterra 自适应滤波器对 8 种低维混沌序列进行预测的具体实验结果. 其中预测滤波器的长度为 N_l , $N_p = 400$, 预测相对误差 Perr 按 (13) 式进行计算. 为了方便观察, 每种混沌序列的预测结果仅给出了对应的 150 样值图形, 实际值为 $x(n)$ —— \circ , 预测值 $\hat{x}(n)$ ——*.

例 1 Volterra 自适应滤波器对 Logistic map 混沌序列的预测结果见图 2.

$$x(n+1) = 4 * x(n) * (1 - x(n)).$$

例 2 Volterra 自适应滤波器对 Kent map 混沌序列的预测结果见图 3.

$$x(n+1) = \beta - 1 - \beta * |x(n)| \quad \beta = 1.9.$$

例 3 Volterra 自适应滤波器对 Tent map 混沌序列的预测结果见图 4.

$$x(n+1) = \begin{cases} x(n) \vee a & x(n) \leq a, \\ (1 - x(n)) \wedge (1 - a) & x(n) > a, \end{cases}$$

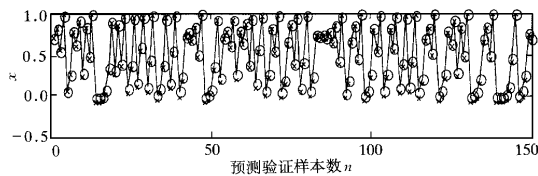


图 2 Logistic map 的预测结果 真实值相对误差 Perr = 1.2484 × 10⁻⁵, N_l = 2.

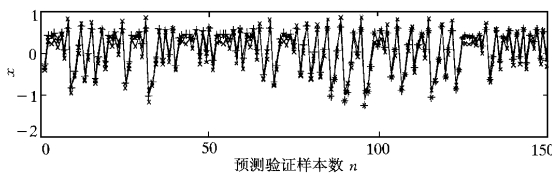


图 3 Kent map 的预测结果 相对误差 Perr = 0.00510, N_l = 6

$a = 0.4$.

例 4 Volterra 自适应滤波器对 Ushiki map 混沌序列的预测结果见图 5.

$$x(n+1) = (A - x(n) - B_1 y(n)) x(n),$$

$$y(n+1) = (A - B_2 x(n) - y(n)) y(n),$$

$$A = 3.7, B_1 = 0.1, B_2 = 0.15.$$

例 5 Volterra 自适应滤波器对 Lozi map 混沌序列的预测结果见图 6.

$$x(k+1) = 1 - 1.75 * |x(k)| + y(k),$$

$$y(k+1) = 0.3 * x(k).$$

例 6 Volterra 自适应滤波器对 Henon map 混沌序列的预测结果见图 7.

$$x(n+1) = 1 + y(n) - 1.4 * x^2(n),$$

$$y(n+1) = 0.3 * x(n).$$

例 7 Volterra 自适应滤波器对 Wien-type^[12] 混沌序列的预测结果见图 8.

$$\dot{x} = -x + 2.5 * (y - z),$$

$$\dot{y} = -x + 1.5 * y - 2.5 * z,$$

$$\dot{z} = 5 * u(y - 1) - z,$$

$$\text{其中 } u(y) = \begin{cases} 1 & y \geq 0, \\ 0 & y < 0. \end{cases}$$

例 8 Volterra 自适应滤波器对 Lorenz 混沌序列的预测结果见图 9.

$$\dot{x} = a(y - x),$$

$$\dot{y} = rx - xz - y,$$

$$\dot{z} = xy - bz,$$

$$a = 10, b = 8/3, r = 34.0.$$

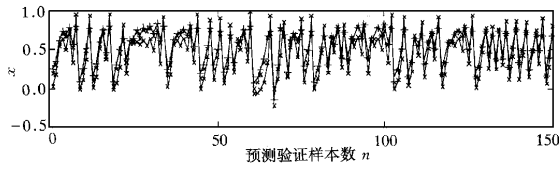


图 4 Tent map 的预测结果 相对误差 $P_{err}=0.0015$, $N_l=6$

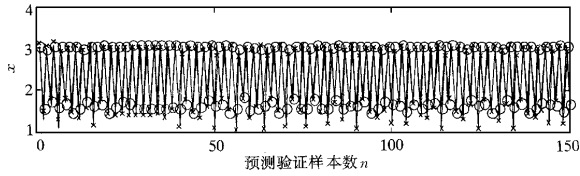


图 5 Ushiki map 的预测结果 相对误差 $P_{err}=0.00371$, $N_l=8$.

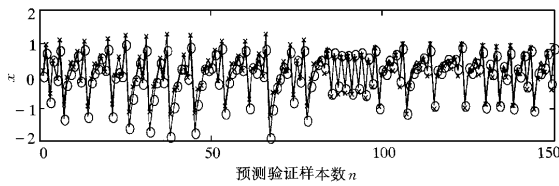


图 6 Lozi map 的预测结果 相对误差 $P_{err}=0.0041$, $N_l=10$.

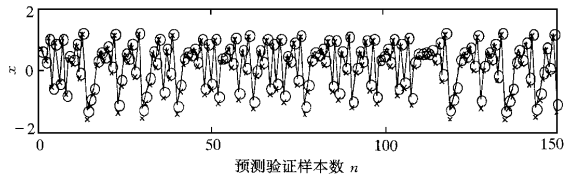


图 7 Henon map 混沌序列的预测结果 相对误差 $P_{err}=6.5216 \times 10^{-5}$, $N_l=8$.

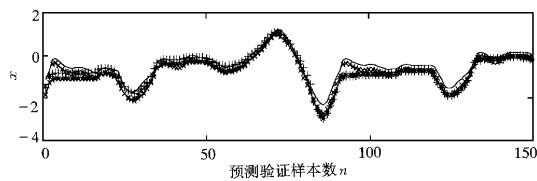


图 8 Wien-type chaotic 序列预测结果 相对误差 $P_{err}=0.00938$, $N_l=14$.

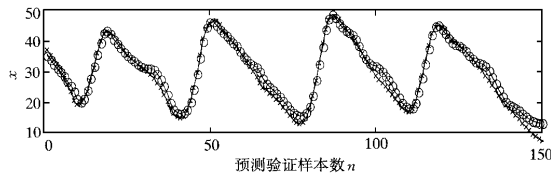


图9 Lorenz chaotic system 的预测结果 相对误差 $Perr = 0.0014$, $N_l = 12$.

在上述实验中,例 1—3 为三个一维混沌序列,例 4—6 为三个二维混沌序列,例 7、8 为两个三维混沌序列.从上述实验结果可以得出以下结论:

1. 每种维混沌序列的预测相对误差均有 $Perr \leq 0.01$.表明:当 N_l 足够大时,二阶 Volterra 自适应滤波器能够有效地预测这些低维混沌时间序列.

2. 光滑混沌序列的预测相对误差均比非光滑混沌序列的预测相对误差小,且相应的预测滤波器 N_l 亦小.这表明采用二阶 Volterra 自适应滤波器对光滑混沌序列进行预测时, N_l 的选择不仅与 D_2 有关,还与混沌映射的光滑程度有关.

上述结果说明:由于二阶 Volterra 自适应滤波器综合利用线性和非线性的因素,充分利用了混沌序列的高阶矩信息,更符合混沌序列的非线性本质.另一方面,随着 N_l 的增大,即嵌入维数 m 的增多,负的 Lyapunov 指数个数亦增多,致使混沌序列的相空间重构拟合能够有效地抵消混沌系统对初始误差的极端敏感性,从而使二阶 Volterra 自适应滤波器有效地提高其预测精度.

5 结束语

本文基于混沌动力系统相空间的延迟坐标重构,提出了一种预测混沌时间序列的 Volterra 自适应滤波预测法,对 8 种低维混沌序列采用二阶 Volterra 自适应滤波器进行预测,实验结果表明:当预测滤波器的长度 N_l 足够大时,其预测精度指标,即预测相对误差均小于 0.01,且 N_l 的选择不仅与

D_2 有关,还与混沌映射的光滑程度有关.这一结果为混沌序列的可预测性及预测模型的选择提供了一种新的认识.

二阶 Volterra 自适应滤波器能够有效地预测低维混沌时间序列的本质在于:Volterra 自适应滤波器综合利用线性和非线性的因素,充分利用了混沌序列的高阶矩信息,更符合混沌序列的非线性本质.采用 Volterra 自适应滤波器对混沌时间序列进行预测的另一个优点是它更便于硬件实现,对这种非线性预测滤波器进行深入研究,将有助于它在混沌系统的实时预测方面的应用.

- [1] S. Haykin, L. Xiaobo, *Proc. of IEEE*, **83**(1995), 94.
- [2] M. Casdal, *Physica*, **D35**(1989), 335.
- [3] G. Heidari-Bateni, C. D. McGillen, *IEEE Trans. on Commun.*, **42**(1994), 1524.
- [4] H. Leung, *IEEE, J. Oceanic Eng.*, **18**(1993), 287.
- [5] H. G. E. Hentschel, Z. Jiang, *Physica*, **D67**(1993), 151.
- [6] L. Cao, Y. Hong, H. Fang et al., *Physica*, **D85**(1995), 225.
- [7] 袁 坚,肖先赐, *信号处理*, **14**(1998), 308 [Yuan Jian, Xiao Xian-ci, *Acta Signal Processing*, **14**(1998), 308 (in Chinese)].
- [8] 袁 坚,博士学位论文,电子科技大学(成都,1997),第 10 页 [Yuan Jian, Ph. D. Thesis, University of Electronic Science and Technology of China (Chengdu, 1997) p. 10 (in Chinese)].
- [9] I. W. Standberg, *IEEE Trans. CAS*, **30**(1983), 61.
- [10] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991.
- [11] 茅于海,苗家林, *电子学报*, **11**(1983), 75 [Mao Yu-hai, Miao Jia-lin, *Acta Electronica Sinica*, **11**(1983), 75 (in Chinese)].
- [12] A. Tamasevicius, G. Mykolitis, *Electron. Lett.*, **34**(1998), 606.

PREDICTING LOW-DIMENSIONAL CHAOTIC TIME SERIES USING VOLTERRA ADAPTIVE FILTERS^{*}

ZHANG JIA-SHU XIAO XIAN-CI

(*Department of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054*)

(Received 12 April 1999)

ABSTRACT

Volterra adaptive filter is used to predict low-dimensional chaotic time series based on the state space reconstruction of delay-coordinate embedding of dynamic system. It is shown, through experiments of predicting eight kinds of low-dimensional chaotic series using second-order Volterra adaptive filters, that Volterra adaptive filters can accurately predict these chaotic series when the length N_l of the Volterra filter is long enough, and the choice of N_l is related to D_2 and smoothness of chaotic map.

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Defense Foundation of China (Grant No. 98JS05.4.1.DZ0205).