第 49 卷 第 3 期 2000 年 3 月
1000-3290/2000/49(03)/0415-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 3, March, 2000

η-ξ 时空的截面转动与虚时、实时热场理论间的直接变换*

高亚军[1)2)] 桂元星[1)]

[1)](大连理工大学物理系,大连 116023)

[2)](锦州师范学院物理系,锦州 121003)†

(1999 年 5 月 7 日收到)

将 η-ξ 时空理论与适当的复时间变换有机结合,构造了所谓 η-ξ 复时变换,它给出 η-ξ 时空中的截面转动,从而诱导出虚时、实时热场理论间的直接变换,这从背景时空的角度揭示了虚时、实时热场理论间的内在联系.

PACC:0590;0290

1 引 言

有限温度场论(FTFT)[1—6](亦称热场理论)将零温量子场论的方法和技术推广到有限温度情况,为研究宏观乃至微观热现象提供了强有力的理论工具.现今流行的 FTFT 可分为虚时和实时两类,并且它们的形式和性质有很大差别.例如虚时理论有明显的虚时周期性,而实时理论的最显著特点是倍自由度[4].显然作为研究同一类物理现象的不同形式的理论,它们之间关系的探讨对理论研究和实际计算均有重要意义,故始终受到很大关注[7],然而至今未得满意解决.Dolan 和 Jackiw[8] 曾试图由虚时热 Green 函数通过对虚时间的解析延拓给出实时热 Green 函数,但得到的结果还存在着明显的困难和不足.实际上这种延拓只给出了实时热 Green 函数的一个分量.本文作者之一(Gui)近年来提出的 η-ξ 时空[9—12] 为各种形式的 FTFT 提供了统一的几何背景.这也为研究不同形式 FTFT 之间的关系提供了新的途径.

本文将 η-ξ 时空理论和复变函数中的保角变换有机结合,构造一种(我们称之为)η-ξ 复时变换,它给出 η-ξ 时空中的截面转动.特别是给出欧氏截面和 Lorentz 截面之间的转动,从而诱导出虚时和实时 FTFT 之间的直接变换.在这个变换中通常 FTFT 的虚时周期性和实时形式中的倍自由度特性自然得到保持,这是通常的变换和延拓[8] 难以做到的.所以本文的讨论揭示出,在 η-ξ 时空背景上虚时形式的 FTFT 包含着比原来认为的更多的信息.

2 复时间变换与 η-ξ 时空的截面转动

2.1 η-ξ 时空

η-ξ 时空[9—12] 是具有复度规

$$\mathrm{d}s^2 = \alpha^{-2}(\xi^2 - \eta^2)^{-1}(-\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\xi^2) + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{1}$$

的复四维流形,其中 $\alpha = 2\pi/\beta$,β 为倒温度,而 η,ξ,y,z 一般为复变量.当限定 ξ,y,z 为实而 $\eta = \mathrm{i}\sigma$ 为纯虚时,得到 η-ξ 时空的欧氏截面(E-截面),其度规为

$$\mathrm{d}s^2 = \alpha^{-2}(\xi^2 + \sigma^2)^{-1}(\mathrm{d}\sigma^2 + \mathrm{d}\xi^2) + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{2}$$

作变换

$$\sigma = \alpha^{-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\alpha\tau, \quad \xi = \alpha^{-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\alpha\tau, \tag{3}$$

则(2)式化为欧氏度规

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{4}$$

由(3)式,在(4)式中应将 $\tau = 0$ 等同于 $\tau = \beta$,即 τ,x,y,z 是在一个超柱面 $S^1 \times R^3$ 上取值,而 σ,ξ,y,z 描述的空间同胚于这个超柱面[9,10,12].

---

* 国家自然科学基金(批准号:19572022)及辽宁省教育委员会重点科研基金(批准号:9609211056)资助的课题.

† 通讯地址.

当限定(1)式中 η,ξ,y,z 均取实数,则得到 η-ξ 时空的 Lorentz 截面(L-截面). 这时 $\eta^2-\xi^2=0$ 处的奇异把 L-截面分为 4 个部分 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ[9—12],每一部分等同于一个完整的 Minkowski 时空. 例如,对区域Ⅰ($\xi>|\eta|$)和区域Ⅱ($-\xi>|\eta|$)分别引入坐标变换

$$\left.\begin{aligned}\eta&=\pm\alpha^{-1}e^{\alpha x}\sinh\alpha t\\ \xi&=\pm\alpha^{-1}e^{\alpha x}\cosh\alpha t\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&\text{上号对应于区域 Ⅰ},\\&\text{下号对应于区域 Ⅱ},\end{aligned}\tag{5}$$

则(1)式化为 Minkowski 度规

$$ds^2=-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2.\tag{6}$$

业已证明[9—13],η-ξ 时空中 E-截面和 L-截面上的零温场论分别给出通常表述下的虚时和实时 FTFT. 另外,如所周知为描述有限温度理论,时间变量被延拓为可在一定范围内取值的复变量,每个满足一定要求的复时间路径对应着一种特定形式的热场理论[7]. 下面的讨论就是将 η-ξ 时空理论与时间变量的复性有机结合,从而给出虚时和实时 FTFT 这样形式和性质差别很大的两种理论间的直接联系.

2.2 η-ξ 复时变换

考虑如下的复函数变换:

$$F:u\longmapsto F(u)=f_1^{-1}\circ f\circ f_1(u),\tag{7}$$

其中 f 和 f_1 定义为对任意复变量 u,

$$f(u)=-i\frac{1-u}{1+u},\quad f_1(u)=e^{-i\alpha u},\tag{8}$$

并且在进行 f_1^{-1} 变换时,规定切口在上半复平面,即取 $\ln(-1)=-i\pi$[14]. 这样,若记 $w=-i\dfrac{1-\exp(-i\alpha u)}{1+\exp(-i\alpha u)}$,则有

$$F(u)=i\alpha^{-1}\ln w=i\alpha^{-1}\ln|w|-\alpha^{-1}\arg[w].\tag{9}$$

(9)式为复变函数论中的保角变换,其中幅角 arg 由上述规定的切口所确定.

由(8)式,f_1 将 $(-iu)$-复平面上满足 $\mathrm{Im}(-iu)\in[-\beta,0]$ 的无限长条形区域映为整个复平面($f_1(u)$-复平面),将$(-iu)$-复平面上始点为 t 而终点为 $t-i\beta$(t 为实数)的任一条虚部不增的曲线映为 $f_1(u)$-全复平面上的一条环绕原点的简单闭合曲线. 而 f 将这样的简单闭合曲线映射为另一条简单闭合曲线. 特别是,若 $-iu$ 在 Matsubara 虚时路径上取值,即 $u=\tau(0\leqslant\tau\leqslant\beta)$,并记实变量

$$\frac{1}{\alpha}\ln\left|\frac{1-\exp(-i\alpha\tau)}{1+\exp(-i\alpha\tau)}\right|=\begin{cases}t & \text{当 } 0<\tau<\beta/2,\\ t' & \text{当 } \beta/2<\tau<\beta,\end{cases}\tag{10}$$

则有

$$F:\tau\longmapsto F(\tau)=\begin{cases}t & \text{当 } 0<\tau<\beta/2,\\ t'+\beta/2 & \text{当 } \beta/2<\tau<\beta.\end{cases}\tag{11}$$

另外,由(10)式显然有:$t|_{\tau\to+0}=-\infty$;$t|_{\tau\to\frac{\beta}{2}-0}=+\infty$;$t'|_{\tau\to\frac{\beta}{2}+0}=+\infty$;$t'|_{\tau\to\beta-0}=-\infty$. 并且,$\tau\in(0,\beta/2)$时,$t$ 是 τ 的单调增函数(时序同向);$\tau\in(\beta/2,\beta)$时,t'是 τ 的单调减函数(时序反向). 这些性质在以后的讨论中是很重要的.

为了看出变换(7)—(11)式与 η-ξ 时空的联系,引入如下的复坐标变换:

$$\sigma=\alpha^{-1}e^{\alpha x}\sin\alpha u,\quad \xi=\alpha^{-1}e^{\alpha x}\cos\alpha u,\tag{12}$$

则度规(2)式被解析延拓. 用 u,x,y,z 表示时它化为

$$ds^2=du^2+dx^2+dy^2+dz^2.\tag{13}$$

当 x,y,z 为任意实数,而 $u=\tau(0\leqslant\tau\leqslant\beta)$(Matsubara 路径)时,(12)和(13)式即给出(3)和(4)式. 若对 $u=\tau$ 施行变换(7)—(11)式,则(2),(12)和(13)式分别被变换为(1),(5)和(6)式,所以可得到结论:(11)式将 η-ξ 时空的 E-截面变换到 L-截面,(7)—(11)式给出 η-ξ 时空的截面转动. 以后称之为 η-ξ 复时变换,用 $\mathscr{F}$ 表示. 通过下面的讨论将看到它诱导出虚时和实时 FTFT 间的直接变换.

3 场方程单态模解的变换

利用上节给出的 $\mathscr{F}$ 变换将 η-ξ 时空 E-截面上场方程的单模解变换到 L-截面,自然给出 L-截面上的单模解,并由此直接得到热场理论中著名的 Bogoliubov 变换和热真空态等.

3.1 玻色场模的变换

考虑 η-ξ 时空 E-截面上质量为 m 的自由无自旋标量场 φ,它满足方程

$$[\alpha^2(\sigma^2+\xi^2)(\partial^2/\partial\sigma^2+\partial^2/\partial\xi^2)+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2-m^2]\varphi=0,\tag{14}$$

用坐标 τ,x,y,z 表示[参见(2)—(4)式],方程(14)成为

$$(\partial^2/\partial\tau^2+\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2-m^2)\varphi=0.\tag{15}$$

考虑到空间坐标 x,y,z 的平权性和无限延展性,得方程(15)如下的'能量-动量'本征模解

$$\exp\{-\omega_k\tau+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\},\tag{16a}$$

$$\exp\{\omega_k\tau + \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\}, \tag{16b}$$

其中 $\omega_k=\sqrt{k^2+m^2}>0$. 对单模解(16a)式施行上节的 η-ξ 复时变换,则得

$$\mathscr{F}:\exp\{-\omega_k\tau+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\}\longmapsto\phi_k' = \delta_{\mathrm{I}}\exp\{-\mathrm{i}\omega_k t + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\} + \delta_{\mathrm{II}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\omega_k\beta\right\}\exp\{-\mathrm{i}\omega_k t' + \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\}, \tag{17}$$

其中 δ_{I} 和 δ_{II} 定义为当时空变量在 L-截面的 Ⅰ 区取值时,$\delta_{\mathrm{I}}=1$,$\delta_{\mathrm{II}}=0$;在 Ⅱ 区取值时,$\delta_{\mathrm{I}}=0$,$\delta_{\mathrm{II}}=1$. 由变换式(7)—(12)可见:固定 x,y,z 为实数,只要复变量 u 的取值绕过点 $\beta/2$,则 ϕ_k' 在其自变量通过的任何 η-ξ 时空区域内解析,由 Unruh[15] 类似的分析可知,它是 L-截面上的正频模解. 考虑到变量 t' 的反时序特性,用 Minkowski 时空变量表达时,不失一般性,这里可令 $t'=-t$. 另外,为叙述方便,本文采用箱归一化. 将 ϕ_k' 按 Klein-Gordon 内积归一化后记为 ϕ_k,则有

$$\phi_k = \cosh\theta_\omega\,{}^{\mathrm{I}}f_k + \sinh\theta_\omega\,{}^{\mathrm{II}}f_{-k}^*, \tag{18}$$

其中 $\mathrm{th}\theta_\omega=\exp\left(-\frac{1}{2}\omega_k\beta\right)$,而

$$ {}^{\mathrm{I}}f_k = \frac{\delta_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\omega_k V}}\exp\{-\mathrm{i}\omega_k t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\},$$

$$ {}^{\mathrm{II}}f_k = \frac{\delta_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\omega_k V}}\exp\{-\mathrm{i}\omega_k t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\}. \tag{19}$$

类似地,对(16b)式进行 $\mathscr{F}$ 变换,则得 L-截面上的另一个归一模解

$$\widetilde{\phi}_k = \sinh\theta_\omega\,{}^{\mathrm{I}}f_{-k}^* + \cosh\theta_\omega\,{}^{\mathrm{II}}f_k. \tag{20}$$

函数 ϕ_k 和 $\widetilde{\phi}_k$ 曾在文献[9—12]中用不同的方法给出,但这里强调了实时场解与虚时场解的直接联系. L-截面上自由场方程的一般解 $\Phi(t,x)$ 必可分别用模解集合(18),(20)或(19)式展开,即

$$\begin{aligned}\Phi &= \sum_k(b_k\phi_k + b_k^+\phi_k^* + \widetilde{b}_k\widetilde{\phi}_k + \widetilde{b}_k^+\widetilde{\phi}_k^*)\\ &= \sum_k(a_k\,{}^{\mathrm{I}}f_k + a_k^+\,{}^{\mathrm{I}}f_k^* + \widetilde{a}_k\,{}^{\mathrm{II}}f_k + \widetilde{a}_k^+\,{}^{\mathrm{II}}f_k^*).\end{aligned} \tag{21}$$

利用 Klein-Gordon 内积就得到玻色算子的 Bogoliubov 变换关系:

$$\begin{aligned}b_k &= a_k\cosh\theta_\omega - \widetilde{a}_{-k}^+\sinh\theta_\omega,\\ \widetilde{b}_k &= \widetilde{a}_k\cosh\theta_\omega - a_{-k}^+\sinh\theta_\omega.\end{aligned} \tag{22}$$

从(21)式中所用到的各单模解可知 $a_k|0\rangle_{\mathrm{MI}}=0$,$\widetilde{a}_k|0\rangle_{\mathrm{MII}}=0$ 分别定义了我们的 Minkowski 时空(区域 Ⅰ)及其镜像时空(区域 Ⅱ)[9,12] 的量子真空态 $|0\rangle_{\mathrm{MI}}$ 和 $|0\rangle_{\mathrm{MII}}$,而

$$b_k|0\rangle_{\mathrm{LS}} = \widetilde{b}_k|0\rangle_{\mathrm{LS}} = 0 \tag{23}$$

定义了 η-ξ 时空中 L-截面的真空态 $|0\rangle_{\mathrm{LS}}$. 又从(22)式知,$|0\rangle_{\mathrm{LS}}$ 就是 Minkowski 时空惯性观察者的热基态[2]. 这些都是 FTFT 的核心所在.

3.2　费密场模的变换

在 E-截面上,自由费密场 ψ(质量为 m)满足方程[13]

$$\left[\alpha(\sigma^2+\xi^2)^{1/2}\left(\gamma^0\frac{\partial}{\partial\sigma}+\mathrm{i}\gamma^1\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\mathrm{i}\gamma^2\frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{i}\gamma^3\frac{\partial}{\partial z} - m + \frac{\mathrm{i}\alpha}{2}\,\frac{\mathrm{i}\gamma^0\sigma-\gamma^1\xi}{(\sigma^2+\xi^2)^{1/2}}\right]\psi = 0. \tag{24}$$

用坐标 τ,x,y,z 表示,方程(24)成为

$$\begin{aligned}(&-\gamma^0\partial/\partial\tau + \mathrm{i}\gamma^1\partial/\partial x + \mathrm{i}\gamma^2\partial/\partial y\\ &+\mathrm{i}\gamma^3\partial/\partial z - m)\psi = 0.\end{aligned} \tag{25}$$

其'能量-动量'本征模解为

$$u(\boldsymbol{k},\rho)\exp\{-\omega_k\tau+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\}, \tag{26a}$$

$$v(\boldsymbol{k},\rho)\exp\{\omega_k\tau-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\}\quad(\rho=1,2), \tag{26b}$$

其中旋量 $u(\boldsymbol{k},\rho)$,$v(\boldsymbol{k},\rho)$ 的定义见文献[16]. 对模解(26a)式施行 $\mathscr{F}$ 变换,得到

$$\begin{aligned}\mathscr{F}:u(\boldsymbol{k},\rho)\mathrm{e}^{-\omega_k\tau+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\longmapsto\psi_{k,\rho}' &= u(\boldsymbol{k},\rho)\\ &\cdot\left(\delta_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \delta_{\mathrm{II}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\omega_k\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t'+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right),\end{aligned} \tag{27}$$

与玻色情况类似的分析可见 $\psi_{k,\rho}'$ 是 L-截面上的正频模解. 用内积[16]

$$(\psi,\phi) = \int_v \mathrm{d}^3x\bar{\psi}\gamma^0\phi, \tag{28}$$

将 $\psi_{k,\rho}'$ 归一化后记为 $\psi_{k,\rho}$,有

$$\begin{aligned}\psi_{k,\rho} &= u(\boldsymbol{k},\rho)[\cos\theta_\omega\,{}^{\mathrm{I}}g_k\\ &+\sin\theta_\omega\,{}^{\mathrm{II}}g_{-k}^*]\equiv u(\boldsymbol{k},\rho)\chi_k,\end{aligned} \tag{29}$$

其中 $\tan\theta_\omega=\exp\left(-\frac{1}{2}\omega_k\beta\right)$,而

$$ {}^{\mathrm{I}}g_k = \delta_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{m}{\omega_k V}}\exp\{-\mathrm{i}\omega_k t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\},$$

$$ {}^{\mathrm{II}}g_k = \delta_{\mathrm{II}}\sqrt{\frac{m}{\omega_k V}}\exp\{-\mathrm{i}\omega_k t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\}. \tag{30}$$

类似地,从(26b)式出发,并注意到费密场的旋量变换性质[13],得到 L-截面上的另一个归一化模解

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_{k,\rho} &= v(\boldsymbol{k},\rho)[-\sin\theta_\omega\,{}^{\mathrm{I}}g_k^*\\ &+\cos\theta_\omega\,{}^{\mathrm{II}}g_{-k}]\equiv v(\boldsymbol{k},\rho)\widetilde{\chi}_k.\end{aligned} \tag{31}$$

将 L-截面上自由费密场方程的一般解 $\Psi(t,x)$ 用场模(29),(31)或 $\{u(\boldsymbol{k},\rho)\,^{\mathrm{I}}g_{\boldsymbol{k}},u(-\boldsymbol{k},\rho)\,^{\mathrm{II}}g_{\boldsymbol{k}}^{*},v(\boldsymbol{k},\rho)\,^{\mathrm{I}}g_{\boldsymbol{k}}^{*},v(-\boldsymbol{k},\rho)\,^{\mathrm{II}}g_{\boldsymbol{k}},\rho=1,2\}$ 展开,有

$$\begin{aligned}\Psi(t,x) &= \sum_{\boldsymbol{k},\rho}\left[C_{\boldsymbol{k},\rho}u(\boldsymbol{k},\rho)\chi_{\boldsymbol{k}}+D^{+}_{\boldsymbol{k},\rho}v(\boldsymbol{k},\rho)\chi^{*}_{\boldsymbol{k}}\right.\\&\quad\left.+\widetilde{C}^{+}_{-\boldsymbol{k},\rho}u(\boldsymbol{k},\rho)\widetilde{\chi}^{*}_{\boldsymbol{k}}+\widetilde{D}_{-\boldsymbol{k},\rho}v(\boldsymbol{k},\rho)\widetilde{\chi}_{\boldsymbol{k}}\right]\\&=\sum_{\boldsymbol{k},\rho}\left[c_{\boldsymbol{k},\rho}u(\boldsymbol{k},\rho)\,^{\mathrm{I}}g_{\boldsymbol{k}}+d^{+}_{\boldsymbol{k},\rho}v(\boldsymbol{k},\rho)\,^{\mathrm{I}}g^{*}_{\boldsymbol{k}}\right.\\&\quad+\widetilde{c}^{+}_{\boldsymbol{k},\rho}u(-\boldsymbol{k},\rho)\,^{\mathrm{II}}g^{*}_{\boldsymbol{k}}\\&\quad\left.+\widetilde{d}_{\boldsymbol{k},\rho}v(-\boldsymbol{k},\rho)\,^{\mathrm{II}}g_{\boldsymbol{k}}\right].\end{aligned}\tag{32}$$

由内积(28)式,即可得到费密算子的 Bogoliubov 变换

$$\begin{aligned}C_{\boldsymbol{k},\rho}&=c_{\boldsymbol{k},\rho}\cos\theta_{\omega}+\widetilde{c}^{+}_{-\boldsymbol{k},\rho}\sin\theta_{\omega},\\\widetilde{C}^{+}_{\boldsymbol{k},\rho}&=\widetilde{c}^{+}_{\boldsymbol{k},\rho}\cos\theta_{\omega}-c_{-\boldsymbol{k},\rho}\sin\theta_{\omega},\end{aligned}\tag{33a}$$

$$\begin{aligned}D^{+}_{\boldsymbol{k},\rho}&=d^{+}_{\boldsymbol{k},\rho}\cos\theta_{\omega}+\widetilde{d}_{-\boldsymbol{k},\rho}\sin\theta_{\omega},\\\widetilde{D}_{\boldsymbol{k},\rho}&=\widetilde{d}_{\boldsymbol{k},\rho}\cos\theta_{\omega}-d^{+}_{-\boldsymbol{k},\rho}\sin\theta_{\omega}.\end{aligned}\tag{33b}$$

例如,若考虑 $c_{\boldsymbol{k},\rho}$-粒子系统,则 $c_{\boldsymbol{k},\rho}|0\rangle_{\mathrm{MI}}=0$,$\widetilde{c}_{\boldsymbol{k},\rho}|0\rangle_{\mathrm{MII}}=0$分别定义了“我们的宇宙”(区域Ⅰ)及其镜像时空(区域Ⅱ)的量子真空态 $|0\rangle_{\mathrm{MI}}$ 和 $|0\rangle_{\mathrm{MII}}$,而

$$C_{\boldsymbol{k},\rho}|0\rangle_{\mathrm{LS}}=\widetilde{C}_{\boldsymbol{k}}|0\rangle_{\mathrm{LS}}=0\tag{34}$$

定义了 L-截面上的真空态$|0\rangle_{\mathrm{LS}}$. 从方程(33)可见,$|0\rangle_{\mathrm{LS}}$刚好是 FTFT 中 Minkowski 时空惯性观察者的‘热基态’[2].

4 Green 函数的变换

4.1 玻色情况

用变量 τ,x,y,z 来表示,η-ξ 时空中 E-截面上自由零自旋玻色场的 Green 函数满足方程

$$\begin{aligned}&(\partial^2/\partial\tau^2+\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2-m^2)\\&\cdot G(\tau,x;\tau',x')=-\delta(\tau-\tau')\delta(x-x'),\end{aligned}\tag{35}$$

并有 $G(\tau,x;\tau',x')=G(\tau-\tau',x-x')$. 令 $s=\tau-\tau'$,则 s 的取值范围是 $-\beta\leqslant s\leqslant\beta$. 由于 E-截面的几何结构[10],方程(35)的单值解要满足周期性条件

$$G\mid_{\tau=0}=G\mid_{\tau=\beta}.\tag{36}$$

在 $0<s<\beta$ 范围内,可用算子 $\partial^2/\partial\tau^2+\nabla^2-m^2$ 的满足周期条件(36)式的本征函数系将 G 展开成

$$\begin{aligned}G(s,x,x')&=\beta^{-1}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_{\boldsymbol{k}}(x)f^{*}_{\boldsymbol{k}}(x')\\&\cdot\exp\left\{\frac{-2\pi\mathrm{i}ns}{\beta}\right\}\left[\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2+\omega_{\boldsymbol{k}}^2\right]^{-1},\end{aligned}\tag{37}$$

其中 $f_{\boldsymbol{k}}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\exp\{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot x\}$. 上述级数中对 n 的求和部分可得有限形式的函数,有

$$\begin{aligned}&\beta^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{-2\pi\mathrm{i}ns}{\beta}\right\}\left[\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2+\omega_{\boldsymbol{k}}^2\right]^{-1}\\&=(2\omega_{\boldsymbol{k}}^2)^{-1}(1-\mathrm{e}^{-\beta\omega_{\boldsymbol{k}}})^{-1}[\mathrm{e}^{-\omega_{\boldsymbol{k}}s}+\mathrm{e}^{\omega_{\boldsymbol{k}}(s-\beta)}].\end{aligned}\tag{38}$$

(38)式可通过直接计算右方函数的傅里叶级数展开式而得到证明. 利用(36)式,当 $-\beta<s<0$ 时,有

$$\begin{aligned}G(s,x,x')&=\sum_{\boldsymbol{k}}f_{\boldsymbol{k}}(x)f^{*}_{\boldsymbol{k}}(x')(2\omega_{\boldsymbol{k}})^{-1}(1\\&-\mathrm{e}^{-\beta\omega_{\boldsymbol{k}}})^{-1}[\mathrm{e}^{\omega_{\boldsymbol{k}}s}+\mathrm{e}^{-\omega_{\boldsymbol{k}}(s+\beta)}].\end{aligned}\tag{39}$$

对(37)—(39)式进行 $\mathscr{F}$ 变换,并注意到由 τ 诱导出的时序(见 2.2 节),则可直接写出通常 FTFT 中的实时热 Green 函数. 由于经 η-ξ 复时变换后,Green 函数的自变量将在 L-截面上取值,当自变量在区域Ⅰ或Ⅱ上取值时,把相应的 Green 函数分别用脚标 1 或 2 来标记. 这样反映倍自由度特性的 2×2 矩阵形式自然出现. 另外为书写简便,将变换后的 Green 函数 $G=\{G_{ab}\}(a,b=1,2)$ 中出现的实时间差仍记为 t. 这样,当 $t>0$,对(37)和(38)式进行 $\mathscr{F}$ 变换后,有

$$\begin{aligned}G^{+}_{11}(t,x,x')&=\sum_{\boldsymbol{k}}f_{\boldsymbol{k}}(x)f^{*}_{\boldsymbol{k}}(x')(2\omega_{\boldsymbol{k}})^{-1}(1\\&-\mathrm{e}^{-\beta\omega_{\boldsymbol{k}}})^{-1}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}t}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}t}\mathrm{e}^{-\omega_{\boldsymbol{k}}\beta}],\end{aligned}\tag{40}$$

当 $t<0$,由(39)和(11)式,得

$$\begin{aligned}G^{-}_{11}(t,x,x')&=\sum_{\boldsymbol{k}}f_{\boldsymbol{k}}(x)f^{*}_{\boldsymbol{k}}(x')(2\omega_{\boldsymbol{k}})^{-1}(1\\&-\mathrm{e}^{-\beta\omega_{\boldsymbol{k}}})^{-1}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}t}\mathrm{e}^{-\omega_{\boldsymbol{k}}\beta}],\end{aligned}\tag{41}$$

而 $G_{11}=\theta(t)G^{+}_{11}+\theta(-t)G^{-}_{11}$正是热场动力学中实时 Green 函数的 1-1 分量[4].

为计算 $G_{12}(t,x,x')$,注意 η-ξ 复时变换中 τ 变量诱导的时序,因为此时有 $\tau\in(\beta/2,\beta)$,$\tau'\in(0,\beta/2)$,故 η-ξ 复时变换给出 $\mathscr{F}:s=\tau-\tau'\mapsto\mathrm{i}t+\beta/2$,对(37)和(38)式进行 η-ξ 复时变换后,得

$$\begin{aligned}G_{12}(t,x,x')&=\sum_{\boldsymbol{k}}f_{\boldsymbol{k}}(x)f^{*}_{\boldsymbol{k}}(x')(2\omega_{\boldsymbol{k}})^{-1}(1\\&-\mathrm{e}^{-\beta\omega_{\boldsymbol{k}}})^{-1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}t}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}t})\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\omega_{\boldsymbol{k}}\beta}.\end{aligned}\tag{42}$$

此式正是热场动力学中热 Green 函数的 1-2 分量[4].

类似的方法可得实时热 Green 函数的另两个分量：$G_{21}(t,x,x')=G_{12}(t,x,x')$ 和 $G_{22}(t,x,x')=\theta(t)G_{22}^{+}(t,x,x')+\theta(-t)G_{22}^{-}(t,x,x')$，其中

$$G_{22}^{\pm}(t,x,x')=\sum_k f_k(x)f_k^*(x')(2\omega_k)^{-1}(1-e^{-\beta\omega_k})^{-1}[e^{\pm i\omega_k t}+e^{\mp i\omega_k t}e^{-\omega_k\beta}]. \tag{43}$$

这里已考虑到在 L-截面的 Ⅱ 区由 τ 诱导的时序与 Minkowski 时序反向.

4.2　费密情况

在坐标 τ,x,y,z 下，E-截面上自由费密场的 Green 函数 $S=S(\tau-\tau',x-x')$ 满足方程

$$(-\gamma^0\partial/\partial\tau+i\gamma^1\partial/\partial x+i\gamma^2\partial/\partial y+i\gamma^3\partial/\partial z-m)S=-\delta(\tau-\tau')\delta(x-x') \tag{44}$$

和反周期性条件[4,8,13]

$$S|_{\tau=0}=-S|_{\tau=\beta}. \tag{45}$$

当 $0<s<\beta$，用算子 $-\gamma^0\partial/\partial\tau+i\gamma^1\partial/\partial x+i\gamma^2\partial/\partial y+i\gamma^3\partial/\partial z-m$ 满足(45)式的本征函数系将 S 展开成[8]

$$S(s,x-x')=\beta^{-1}\sum_k\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_k(x)\cdot f_k^*(x')\frac{\exp\{-i\omega_n s\}}{i\gamma^0\omega_n-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k}-m}, \tag{46}$$

其中 $f_k(x)$ 同(37)式，$\omega_n=(2n+1)\pi/\beta$. 等号右边级数中对 n 的求和部分可表为有限形式的函数

$$\beta^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\exp\{-i\omega_n s\}}{i\gamma^0\omega_n-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k}-m}=\frac{1}{2\omega_k}(e^{-\beta\omega_k}+1)^{-1}[(\not{p}+m)e^{-\omega_k s}+(\tilde{\not{p}}-m)e^{\omega_k(s-\beta)}], \tag{47}$$

其中 $\not{p}=\gamma^0\omega_k-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k}$，$\tilde{\not{p}}=\gamma^0\omega_k+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k}$. 这样(46)式给出

$$S(s,x-x')=\sum_k\frac{1}{2\omega_k(e^{-\beta\omega_k}+1)}[(\not{p}+m)e^{-\omega_k s}\cdot f_k(x)f_k^*(x')+(\not{p}-m)e^{\omega_k(s-\beta)}f_k^*(x)f_k(x')]. \tag{48}$$

考虑到(45)式，当 $-\beta<s<0$ 时，有

$$S(s,x-x')=\sum_k\frac{1}{2\omega_k(e^{-\beta\omega_k}+1)}[(\not{p}+m)e^{-\omega_k(s+\beta)}\cdot f_k(x)f_k^*(x')+(\not{p}-m)e^{\omega_k s}f_k^*(x)f_k(x')]. \tag{49}$$

对(48)和(49)式进行 $\mathscr{T}$ 变换，与玻色情况类似，可得 L-截面上 2×2 矩阵形式的 Green 函数 $S=\{S_{ab}\}$ $(a,b=1,2)$. 具体地，

$$S_{11}^{+}(t,x-x')=\sum_k\frac{(2\omega_k)^{-1}}{(e^{-\beta\omega_k}+1)}[(\not{p}+m)e^{-i\omega_k t}\cdot f_k(x)f_k^*(x')+(\not{p}-m)e^{i\omega_k t}e^{-\omega_k\beta}f_k^*(x)f_k(x')], \tag{50}$$

$$S_{11}^{-}(t,x-x')=-\sum_k\frac{(2\omega_k)^{-1}}{(e^{-\beta\omega_k}+1)}[(\not{p}+m)e^{-i\omega_k t}\cdot e^{-\omega_k\beta}f_k(x)f_k^*(x')+(\not{p}-m)e^{i\omega_k t}f_k^*(x)f_k(x')]. \tag{51}$$

而 $S_{11}=\theta(t)S_{11}^{+}+\theta(-t)S_{11}^{-}$ 正是热场动力学中费密系统实时热 Green 函数的 1-1 分量[4]. 对于其他分量，相应的计算给出

$$S_{12}(t,x-x')=\sum_k\frac{\exp\{-\omega_k\beta/2\}}{2\omega_k(e^{-\beta\omega_k}+1)}[(\not{p}+m)e^{-i\omega_k t}\cdot f_k(x)f_k^*(x')+(\not{p}-m)e^{i\omega_k t}f_k^*(x)f_k(x')] \tag{52}$$

和 $S_{21}(t,x-x')=-S_{12}(t,x-x')$，$S_{22}=\theta(t)S_{22}^{+}+\theta(-t)S_{22}^{-}$，这里

$$S_{22}^{\pm}(t,x-x')=\mp\sum_k\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\omega_k\beta\right\}}{(2\omega_k)(e^{-\beta\omega_k}+1)}\times[(\not{p}+m)e^{-i\omega_k t}e^{\mp\frac{1}{2}\omega_k\beta}f_k(x)f_k^*(x')+(\not{p}-m)e^{i\omega_k t}e^{\pm\frac{1}{2}\omega_k\beta}f_k^*(x)f_k(x')]. \tag{53}$$

5　总结与讨论

将适当的复时间变量变换与 η-ξ 时空理论有机结合，构造了 η-ξ 复时变换，它给出 η-ξ 时空中的截面转动，从而诱导出虚时和实时 FTFT 间的直接变换. 对玻色系统和费密系统自由场方程的模解及 Green 函数做了具体讨论，由此直接得到了与各种系统相应的著名的 Bogoliubov 变换和热场动力学中的热真空态[2,4]，以及 FTFT 中虚时和实时热 Green 函数间的直接变换，其中实时热 Green 函数反映倍自由度性质的 2×2 矩阵结构可自然获得，从而克服了通常变换和延拓的困难，并且计算过程十分简捷. 同时，本文的结果也说明，η-ξ 时空不仅为各种 FTFT 提供了统一的几何背景，也为揭示它们之间更本质和更直接的联系提供了理论基础.

[1] T. Matsubara, *Prog. Theor. Phys.*, **14**(1955), 351.
[2] Y. Takahash, H. Umezawa, *Collec. Phenom.*, **2**(1975), 55; H. Umezawa *et al.*, Thermo Field Dynamics and Condensed States (North-Holland, Amsterdam, 1982).

[3] A. J. Niemi, G. W. Semenoff, *Nucl. Phys.*, **B230** [FS10] (1984), 181.

[4] N. D. Landsman *et al.*, *Phys. Rep.*, **145** (1987), 142.

[5] H. Matsumoto, Y. Nakano, H. Umezawa, *J. Math. Phys.*, **25** (1984), 3076; H. Matsumoto, in "Progress in Quantum Field Theory", eds. H. Ezawa, S. Kamefuchi (North-Holland, Amsterdam, 1986).

[6] Gui Yuan-xing *et al.*, Thermal Field Theories and Their Applications (World Scientific Publishing, Singapore, 1996).

[7] R. Mills, Propagators for Many-Particle Systems (Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1955); M. Marinaro, *Phys. Rep.*, **137** (1986), 81.

[8] L. Dolan, R. Jackiw, *Phys. Rev.*, **D9** (1974), 3320.

[9] Gui Yuan-xing, *Phys. Rev.*, **D42** (1990), 1988.

[10] Gui Yuan-xing, *Phys. Rev.*, **D46** (1992), 1869.

[11] Gui Yuan-xing, *Sci. Sin.*, **A31** (1988), 1104.

[12] Gui Yuan-xing, *Sci. Sin.*, **A36** (1993), 561.

[13] Gui Yuan-xing, *Phys. Rev.*, **D45** (1992), 697.

[14] N. D. Birrell, P. C. W. Davies, Quantum Fields in Curved Space (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).

[15] W. G. Unruh, *Phys. Rev.*, **D14** (1976), 870.

[16] C. Itzykson, J. C. Zuber, Quantum Field Theory (McGraw-Hill, New York, 1980); D. Lurie, Particles and Fields (Wiley, New York, 1968).

SECTION ROTATIONS IN η-ξ SPACETIME AND DIRECT TRANSFORMATION BETWEEN IMAGINARY- AND REAL-TIME THERMO FIELD THEORIES*

GAO YA-JUN[1)2)] GUI YUAN-XING[1)]

[1)] (*Department of Physics, Dalian University of Technology, Dalian* 116023)

[2)] (*Department of Physics, Jinzhou Teachers College, Jinzhou* 121003)

(Received 7 May 1999)

ABSTRACT

Some suitable complex-time transformation is combined organically with the theory of η-ξ spacetime and a so-called η-ξ complex-time transformation is constructed. This gives some section rotations in η-ξ spacetime and induces a direct transformation between the imaginary- and real-time thermo field theories. These reveal some internal relations between the imaginary- and real-time thermo field theories based on the view-point of background spacetime.

PACC: 0590; 0290

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19572022) and the Science Foundation from Education Commission of Liaoning Province of China (Grant No. 9609211056).