第 49 卷 第 3 期 2000 年 3 月
1000-3290/2000/49(03)/0455-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 3, March, 2000

光生伏打-光折变介质中光学涡旋孤子*

凌振芳 郭 儒 刘思敏 张光寅
(南开大学物理系,天津 300071)
(1999 年 8 月 15 日收到;1999 年 9 月 8 日收到修改稿)

简化了描述光生伏打-光折变效应的模型方程.给出了光生伏打空间电荷场的形式解.讨论了单光束在光生伏打、自散焦光折变介质($LiNbO_3$:Fe 晶体)中的三维传播行为.指出在适当近似条件下,光生伏打-光折变非线性可以维持圆对称的涡旋孤子.

PACC:4265;4280L

1 引 言

在光与物质的作用过程中,光强引起折射率变化是发生在非线性光学介质中最普遍的一种现象.当光通过光致折射率变化的介质时,光波自身的相位将被调制,发生所谓自相位调制.自相位调制使光实现自控成为可能.按照光致折射率变化 $\Delta n(I)>0$ 还是 $\Delta n(I)<0$,可分为自聚焦型介质和自散焦型介质.光克尔效应是人们认识较早的一类非线性光学效应.光克尔介质通过三阶非线性极化,局域地感应出正比光强的折射率变化,即 $\Delta n(I)=n_2 I$.光克尔系数 n_2 的正负分别对应自聚焦和自散焦效应.在慢变化振幅近似下,波在非线性光学介质中传播服从如下标量波方程:

$$2ik\frac{\partial A}{\partial z}+\nabla_{\perp}^{2}A+2n_0k_0^2\Delta nA=0.$$

对于光克尔介质,$\Delta n=n_2 I$,式中 $A(r_{\perp},z)$是沿 z 慢变化的振幅,$k_0=2\pi/\lambda$,n_0 是介质的均匀折射率,$k=k_0n_0$,$I=|A|^2$,$\nabla_{\perp}^{2}$是横向拉普拉斯算符,它的作用是产生横向波矢 $k_{\perp}$,导致衍射效应.等号左端第三项是非线性项,当 $n_2>0$,它引起自聚焦效应.如果自聚焦效应正好补偿衍射效应,消除横向波矢 $k_{\perp}$,那么光束在传播过程中将在两个横向维度上保持不变,形成空间亮孤子.换一个观点看,当光通过自聚焦介质时,光自感应出梯度折射率波导,光束作为自感应波导中的基本模式,在自波导中传播,形成空间局域的自陷光束.当 $n_2<0$,对应自散焦效应.当中心包含暗迹的准平面波通过自散焦介质时,暗迹外面的亮光场将因自散焦效应使光流向暗区,如果暗迹轮廓的衍射效应正好抵消了自散焦效应引起的扩张,均匀背景光中央的暗迹将在传播过程中保持其轮廓不变,形成空间暗孤子.暗迹中心的光强为零时称暗空间孤子;暗迹中心的光强不为零(但小于背景光强)时称灰孤子.暗空间孤子是嵌在准平面波中的低光强区域,当它通过自散焦介质时,暗迹外面的亮光场区的折射率低于暗迹区,因而写入波导.当另一均匀的探测光导入该波导中时,它将无衍射地在其中传播.

光折变材料是又一种重要的非线性光学材料,其光学非线性是由光激发载流子迁移、陷获,电荷空间分离,形成空间电荷场,经线性电光效应(Pockel's effect)引起折射率变化.与光克尔介质相比,光折变材料一般具有各向异性,对光场的响应是非局域的.光折变材料显示的许多非线性光学现象几乎都与绝对光强无关,低至 μW/cm² 水平的激光也能激发出可观察的非线性光学效应.光强只决定着响应速度的快慢.光折变材料是电光材料,还可以方便地通过外加交直流电场改变其性能.所以光折变非线性材料倍受人们重视.自从 1992 年 Segev 等人[1]首次提出利用光折变非线性补偿光在传播过程中的衍射效应,从而产生光折变空间孤子以来,大量的理论和实验工作相继问世.至今已报道有三种不同起因光折变孤子.它们是准稳态屏蔽孤子[2]、稳态屏蔽孤子[3]和光生伏打孤子[4].准稳态屏蔽光折变孤子在时间上是瞬态的,它起因于光折变的非局域响应效

* 国家自然科学基金(批准号:69678018 和 69878009)资助的课题.

应.后两种类型的光折变孤子都是光折变材料对光强局域响应的结果,即局域折射率的变化是局域光强的函数.孤子的形状和尺寸取决于光强的分布.与克尔型孤子不同,光折变孤子还可自陷在两个横向维度上,并保持形态稳定[5].近来,光学旋涡孤子成了一个活跃的研究课题[6],这是由于它携带有拓扑荷(涡旋角动量),并当几个涡旋孤子共存时,发生强烈的相互作用等新奇特征,极大地丰富了非线性动力学内容的缘故.所谓光学涡旋是光束横截面上的相位以 2π 螺旋式围绕中心变化的光场,在光传播过程中涡旋中心稳定,不发生衍射,故称光学涡旋孤子.有趣的是在光折变材料中是否存在圆对称的涡旋孤子,最近展开一场争论.Saffman 和 Zozulya[7]指出,圆形孤子在光折变材料中是不可能存在的.理论依据是光折变非线性是固有各向异性的.然而有许多实验报道在光折变材料中看到了径向对称的空间孤子[6,8,9],特别是 Crosignani 等人从理论上讨论单光束在偏置(外场)光折变晶体中传播时,指出在适当近似条件下,局域对称的空间电荷场可以支持圆对称的孤子[10].对于光生伏打效应为主要机制的光折变晶体,光生伏打空间电荷场是否也能维持圆对称孤子,显然也是值得研究的一个问题.文献[6]从实验上指出,通过仔细调整实验参数,在适当的条件下,光生伏打效应可以形成圆对称光学涡旋,文献[11]也有同样的观察.本文的目的是想从理论上对这一有争议的问题给出定量分析.理论推导结果表明,在适当条件下由光生伏打效应所建立的空间电荷场,不仅对光强响应是局域的,而且还是径向对称的,其对应的折射率变化形式与饱和非线性折射率变化十分相似.对于后者数值分析表明,在自散焦饱和非线性介质中,存在稳定、径向对称的光学涡旋孤子[12].

2 理论分析

首先从描述光折变效应的一组方程开始,它们是[13]

$$\frac{\partial}{\partial t}N_D^+ = (sI_{em} + \beta)(N_D - N_D^+) - \gamma N_e N_D^+, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E}_{sc}) = \rho, \tag{3}$$

$$\rho = q(N_D^+ - N_A - N_e), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{J} = q\mu N_e\boldsymbol{E}_{sc} + \mu k_B T\nabla N_e + \beta_{ph}(N_D - N_D^+)I_{em}\hat{\boldsymbol{c}}, \tag{5}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_{sc} = 0. \tag{6}$$

这里考虑的是光生伏打效应为主要机制的光折变效应,(5)式等号右边第三项是描述光生伏打电流的,β_{ph}是光生伏打系数,E_{sc}是对应的空间电荷场.对于像 $LiNbO_3$ 这样的光生伏打光折变晶体,光激发载流子是电子,所以以上方程中只涉及光电子的产生、输运和复合过程.方程中 N_D,N_D^+,N_A 和 N_e 分别是施主、电离施主、受主和导带中电子的数密度,ρ 是电荷密度,$\boldsymbol{J}$ 是电流密度,s 和 β 是光激发、热激发系数,γ 是复合系数,I_{em}是单光束在光折变晶体内的光强,ε 是光折变晶体的介电常数,q 是电子的基本电荷,μ 是电子迁移率,k_BT 是热能,$\hat{c}$是单位矢量,指向晶体 c 轴方向.将方程(3)对时间求导,并将(4),(5)和(2)式代入,有

$$\nabla\cdot[\varepsilon\dot{\boldsymbol{E}}_{sc} + q\mu N_e\boldsymbol{E}_{sc} + \mu k_B T\nabla N_e + \beta_{ph}(N_D - N_D^+)I_{em}\hat{\boldsymbol{c}}] = 0. \tag{7}$$

它指出在光折变晶体内,全电流是稳恒的.对于稳态 $\partial/\partial t = 0$,(7)式退化为

$$\nabla\cdot[q\mu N_e\boldsymbol{E}_{sc} + \mu k_B T\nabla N_e + \beta_{ph}(N_D - N_D^+)I_{em}\hat{\boldsymbol{c}}] = 0. \tag{8}$$

本文的目的是给出光生伏打光折变晶体内的空间电荷场,方程(8)是出发点,首要的任务是将(8)式中 N_D^+,N_e,∇N_e 分别表示成空间电荷场的函数形成,为此在 N_A,$N_D^+\gg N_e$ 近似条件下,由方程(3)和(4)给出

$$N_D^+ = \frac{\varepsilon}{q}\nabla\cdot\boldsymbol{E}_{sc} + N_A = N_A[\nabla\cdot\boldsymbol{E}_{sc}/(K_D\cdot E_D) + 1]$$

或

$$\widetilde{N} = \widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}} + 1, \tag{9}$$

其中 $\widetilde{N} = N_D^+/N_A$,$\widetilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}_{sc}/E_D$,$E_D = k_BTK_D/q$,$K_D = (q^2N_A/\varepsilon k_BT)^{1/2}$是德拜波矢.$\widetilde{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta},\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)$,$\xi = K_Dx$,$\eta = K_Dy$,$\zeta = K_Dz$.为了进一步给出 N_e,∇N_e 的表达式,在稳态下改写(1)式:

$$s(I_{em} + I_d)(N_D - N_A\widetilde{N}) - \gamma N_0\widetilde{N}_e N_A\widetilde{N} = 0$$

或

$$\tilde{I}(1 - \chi\,\widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}) = \widetilde{N}_e\widetilde{N}, \tag{10}$$

其中 $\tilde{I} = I_{em}/I_0 + I_d/I_0 = \tilde{I}_{em} + \tilde{I}_d$,$I_d = \beta/s$,$N_0 = sI_0(N_D - N_A)/\gamma N_A$,$\widetilde{N}_e = N_e/N_0$,$I_0$ 是某特征光

强，$\chi = N_A/(N_D - N_A) \ll 1$. 为了简化下面的计算，取近似 $N_D^+ \approx N_A$[14]，因此 $\tilde{N} \approx 1$，这样由方程(10)分别给出

$$\tilde{N}_e \approx \tilde{I}, \tag{11}$$

$$\tilde{\nabla} \tilde{N}_e \approx \tilde{\nabla} \tilde{I} - \chi \tilde{I}\, \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{E}}). \tag{12}$$

在以上两式中取了近似：$(1 - \chi\, \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{E}}) \approx 1$. 将(9)，(11)和(12)式代入方程(8)，经化简后给出

$$\tilde{\nabla} \cdot \{ \sigma E_D \tilde{I} \tilde{\boldsymbol{E}} + \sigma E_D [\tilde{\nabla} \tilde{I} - \chi \tilde{I}\, \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{E}})] + \sigma E_{ph} \tilde{I}_{em} \hat{\boldsymbol{c}} \} = 0$$

或

$$\tilde{\nabla} \cdot [(1 + I)\tilde{\boldsymbol{E}} + \tilde{\nabla}(1 + I) - \chi(1 + I)\, \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{E}}) + \tilde{\boldsymbol{E}}_{ph} I \hat{\boldsymbol{c}}] = 0, \tag{13}$$

其中 $\sigma = q\mu N_0$，$E_D = k_B T K_D / q$，$\tilde{E}_{ph} = E_{ph}/E_D$，$E_{ph} = \beta_{ph} \gamma N_A / q\mu s$，$\tilde{I} = \tilde{I}_d(1 + I)$，$I = \tilde{I}_{em}/\tilde{I}_d = I_{em}/I_d$. 方程(13)描述了空间电荷场对光强的依赖关系. 下边的任务是求解空间电荷场，由于 $\chi \ll 1$，故可以忽略(13)式中方括号内的第三项，并令

$$(1 + I)\boldsymbol{E} = (1 + I)\tilde{\boldsymbol{E}} + \tilde{\nabla}(1 + I) + \tilde{E}_{ph} I \hat{\boldsymbol{c}}. \tag{14}$$

同时注意到本文研究的对象是光束在光折变晶体中的自陷效应，即空间孤子，因此光强和空间电荷场仅是横向坐标 ξ, η 的函数，故方程(13)中 $\nabla \to \nabla_\perp$，在上述条件下，方程(13)有如下简单的形式：

$$\tilde{\nabla}_\perp \cdot (\Sigma \boldsymbol{E}) = 0, \tag{15}$$

其中 $\Sigma = (1 + I)$，$\boldsymbol{E} = \tilde{\boldsymbol{E}} + \tilde{\nabla}_\perp \ln(1 + I) + \tilde{E}_{ph} \frac{I}{1 + I} \hat{\boldsymbol{c}}$. (15)式指出 $\Sigma \boldsymbol{E}$ 的二维散度等于零，因此它的一般解可取为

$$\boldsymbol{E} = \frac{\tilde{E}_{ph}}{1 + I} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \hat{\boldsymbol{e}}_x - \frac{\partial f}{\partial \xi} \hat{\boldsymbol{e}}_y \right), \tag{16}$$

其中 $f(\xi, \eta)$ 是待定函数. 这样空间电荷场可以表示为

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}_{sc}/E_D = \frac{\tilde{E}_{ph}}{1 + I} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \hat{\boldsymbol{e}}_x - \frac{\partial f}{\partial \xi} \hat{\boldsymbol{e}}_y \right) - \tilde{E}_{ph} \frac{I}{1 + I} \hat{\boldsymbol{e}}_x - \tilde{\nabla}_\perp \ln(1 + I), \tag{17}$$

其中取 $\hat{c}$ 为 $\hat{e}_x$，即晶体的 $\hat{c}$ 轴平行于坐标轴 x 方向. 为了给出待定函数 $f(\xi, \eta)$，需利用场方程(6)，即

$$\tilde{\nabla}_\perp \times \tilde{\boldsymbol{E}} = 0. \tag{18}$$

将方程(17)代入(18)式后，经整理给出

$$\tilde{\nabla}_\perp^2 f - \tilde{\nabla}_\perp f \cdot \tilde{\nabla}_\perp \ln(1 + I) = \frac{\partial}{\partial \eta} \ln(1 + I). \tag{19}$$

方程(19)一般没有解析解，然而在 $I \ll 1$ 的情况下，方程(19)等号左边第二项的贡献很小，并可以忽略[10]，于是可化为

$$\tilde{\nabla}_\perp^2 f = \frac{\partial}{\partial \eta} \ln(1 + I). \tag{20}$$

由于在无限远 $f(\xi, \eta) \to 0$，方程(20)的解可借助二维格林函数表示为

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint \mathrm{d}\xi' \mathrm{d}\eta' \ln \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta'} \ln[1 + I(\xi', \eta')], \tag{21}$$

从而有

$$\frac{\partial}{\partial \eta} f(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint \mathrm{d}\xi' \mathrm{d}\eta' \frac{\eta - \eta'}{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta'} \ln(1 + I),$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint \mathrm{d}\xi' \mathrm{d}\eta' \frac{\xi - \xi'}{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta'} \ln(1 + I). \tag{22}$$

为了将方程(22)的积分分解成局域和非局域两种贡献，采用文献[10]的方法，取极坐标

$$\xi' - \xi = \rho\cos\theta, \quad \eta' - \eta = \rho\sin\theta, \tag{23}$$

通过分部积分并利用边界条件，可以给出

$$\frac{\partial}{\partial \eta} f(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + I}{1 + I_\infty} + \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\cos 2\theta}{\rho} \cdot \ln(1 + I)\, \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \iint \frac{\sin 2\theta}{\rho} \ln(1 + I)\, \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta. \tag{24}$$

将(24)式代入方程(17)后，最后给出空间电荷场表达式：

$$\boldsymbol{E}_{sc} = \left[-E_{ph} \frac{I}{1 + I} + \frac{E_{ph}}{2(1 + I)} \ln \frac{1 + I}{1 + I_\infty} + \frac{E_{ph}}{2\pi(1 + I)} \iint \frac{\cos 2\theta}{\rho} \ln(1 + I)\, \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \right] \hat{\boldsymbol{e}}_x + \frac{E_{ph}}{2\pi(1 + I)} \iint \frac{\sin 2\theta}{\rho} \ln(1 + I)\, \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta\, \hat{\boldsymbol{e}}_y. \tag{25}$$

在(25)式中忽略了方程(17)中的 $\tilde{\nabla}_\perp \ln(1 + I)$ 项. 如果光强 $I(\xi, \eta)$ 相对 ξ, η 的变化是光滑的，该项的贡献是很小的，而且这一项的主要作用是引起孤子光束轨迹偏转[15]，线偏振的非常光(e 光)所看到

的折射率的变化是

$$\begin{aligned}\Delta n &= -\frac{1}{2}n_0^3 r_{33}E_x^{sc}\\ &= \Delta n_0\left[\frac{I}{1+I}+\frac{1}{2(1+I)}\ln\frac{1+I_\infty}{1+I}\right.\\ &\quad\left.-\frac{1}{2\pi(1+I)}\iint\frac{\cos 2\theta}{\rho}\ln(1+I)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\right].\end{aligned}\tag{26}$$

方程(26)指出在光生伏打-光折变晶体内的光致折射率变化由局域项(等号右边第一项和第二项)和非局域项(等号右边第三项)两部分组成. 非局域项是不对称的. 因此一般而言光生伏打非线性不可能维持圆对称的孤子,然而在 $I\ll1$ 的近拟条件下,非局域项的贡献相对于局域项的贡献是很小的[10]. 这样在局域近似条件下,可以忽略第三项,同时注意到在 $I\ll1$ 情况下,有 $\ln(1+I)\approx I$,这样折射率变化(26)式化简成为

$$\begin{aligned}\Delta n &= \Delta n_0\left(\frac{I}{1+I}+\frac{I_\infty-I}{2(1+I)}\right)\\ &= \frac{\Delta n_0}{2}\left(1-\frac{1-I_\infty}{1+I}\right).\end{aligned}\tag{27}$$

e 光所看到的这个折射率变化(27 式)是局域径向对称的,该形式也正是描述饱和非线性介质的折射率变化的标准模型表示[12]. 按照文献[12]的数值研究,在这种自散焦饱和非线性介质中,存在稳定对称的涡旋空间孤子,由此可推断,在适当的条件下,光生伏打效应建立的空间电荷场也可以支持圆对称涡旋孤子. 这就是本文的结论.

3 结 论

对于光折变晶体,通常有两种不同的入射光形式,具有十分重要的应用. 一种是 由两束相干光同时入射,通过晶体内的干涉光强写入体相位光栅,导致二波、四波、多波耦合,这在光信息处理中有重要的应用 ;另一种是仅有一束光在光折变晶体中传播,通过光学非线性作用引起自聚焦或自散焦效应,导致光束自陷,形成各种空间孤子,这在光通信和光子学器件方面有潜在的应用. 本文讨论了一束光在以光生伏打效应为主要机制下的光折变晶体内三维传播的行为. 通过求解一组非线性耦合方程,给出了空间电荷场的形成表达式,特别是考虑了 $I\ll1$ 的极限情况. 它对应涡旋光束与暗辐照强度比十分小的实验情况,该解对应的光生伏打空间电荷场局域地依赖于径向对称的光强,该场产生的折射率变化与饱和非线性介质的折射率变化十分相似. 文献[12]指出在自散焦饱和非线性介质中,存在圆对称涡旋孤子. $LiNbO_3:Fe$ 光折变晶体是光生伏打效应十分显著的自散焦介质[11],由于它与饱和非线性介质有相似的折射率变化形式,故可以说光生伏打空间电荷场也可以支持圆对称涡旋孤子,这也正是一些实验所观察到的结果.

[1] M. Segev, B. Crosignani, A. Yariv *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **68** (1992), 923.

[2] G. Duree, J. L. Shultz, G. Salamo *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **71** (1993), 533.

[3] M. Segev, G. C. Valley, B. Crosignani *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **73** (1994), 3211.

[4] G. C. Valley, M. Segev, B. Crosignani *et al.*, *Phys. Rev.*, **A50** (1994), R4457.

[5] M. Segev, B. Crosignani, P. Diporto *et al.*, *Opt. Lett.*, **19** (1994), 1296.

[6] Z. Chen, M. Segev, D. W. Wilson *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997), 2948.

[7] M. Saffman, A. A. Zozulya, *Opt. Lett.*, **23** (1998), 1579.

[8] M. F. Shih, P. Leach, M. Segev *et al.*, *Opt. Lett.*, **21** (1996), 324 ;931.

[9] Z. Chen, M. Segev, D. W. Wilson *et al.*, *Opt. Lett.*, **22** (1997), 1751.

[10] B. Crosignani, P. Diporto, A. Degasperis *et al.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **B14** (1997), 3078.

[11] 刘思敏、杨小明、田国云等,物理学报,**47**(1998),432 [Liu Si-min, Yang Xiao-ming, Tian Guo-yun *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **47** (1998), 432 (in Chinese)].

[12] V. Tikhonenko, Y. S. Kivshar, V. Steblina *et al.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **B15** (1998), 79.

[13] N. V. Kukhtarev, V. B. Markov, S. G. Odulov *et al.*, *Ferroelectrics*, **22** (1979), 949.

[14] A. A. Zozulya, D. Z. Anderson, *Phys. Rev.*, **A51** (1995), 1520.

[15] M. I. Carvalho, S. R. Shingh, D. N. Christidoulides, *Opt Commun.*, **120** (1995), 311.

OPTICAL VORTEX SOLITONS IN PHOTOVOLTAIC-PHOTOREFRACTIVE MEDIUM*

LING ZHEN-FANG GUO RU LIU SI-MIN ZHANG GUANG-YIN
(*Department of Physics, Nankai University, Tianjin* 300071)
(Received 15 August 1999; revised manuscript received 8 September 1999)

ABSTRACT

We simplify the model equations for photovoltaic-photorefractive effect, give a formation solution of photovoltaic spatial charge field, discuss the behavior of a three-dimensional single beam propagating in photovoltaic self-defocusing photorefractive medium ($LiNbO_3$: Fe). We show that in an approximate case the photovoltaic-photorefractive nonlinearity can support the vortex solutions with circular symmetry.

PACC: 4265; 4280L

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 69678018 and 69878009).