

非磁化等离子体 Hopf 分岔处随机共振实验*

杨洪波 刘万东[†] 郑 坚 庄 革 梁小平 谢锦林 俞昌旋

(中国科学技术大学近代物理系,合肥 230027)

(1998 年 10 月 12 日收到;1999 年 10 月 29 日收到修改稿)

在非磁化的直流放电等离子体中,利用系统内禀的周期驱动力与外加的高斯白噪声的协同作用,成功地在系统动力学轨道 Hopf 分岔的不动点一侧,观察到了周期信号的信噪比被噪声改善的随机共振现象.一维过阻尼系统的随机共振模型可以解释所观察的实验结果.比较实验结果与理论模型可知,系统动力学轨道发生 Hopf 分岔的原因是系统双稳态之间势垒的变化,在 Hopf 分岔的极限环一侧观察不到随机共振现象,其原因是此时系统已经处于超阈值周期驱动的状态.

PACC: 5290; 0520; 0540

1 引 言

在非线性动力学系统中,人们发现适当地施加噪声反而可以提高信噪比,这就是近年来引起广泛关注的“随机共振”(stochastic resonance)现象^[1,2].1981 年,Benzi 等人首次提出了随机共振的概念用于解释地球气候的变化^[3].随后,Fauve 等人首次在实验上实现了随机共振^[4].目前,这一理论已经在模拟电路、生物体等许多非线性系统中得到验证^[5-10].在等离子体系统中,目前只有 Lin 等人在磁化等离子体中观察到系统输出信号的信噪比随噪声的增强而先增大后减小的过程,但他们未用合适的理论模型自洽地解释实验结果,只将该现象称为“类随机共振现象”^[11].

一般可以用一维过阻尼朗之万方程描述经典的随机共振模型^[12]:

$$dx = [x(a - x^2) + A \cos \omega t] dt + \Gamma(t), \quad (1)$$

其中 $x(a - x^2)$ 是具有双稳态 ($x = \pm \sqrt{a}$) 的非线性势对系统的作用力,两稳态之间的势垒高度为 $U_0 = a^2/4$; $A \cos \omega t$ 是周期外驱动力; $\Gamma(t)$ 是白噪声项.此系统存在阈值.

$$A_c \approx \frac{8\sqrt{6}}{9} U_0^{5/4}. \quad (2)$$

如果周期驱动力的幅度小(亚阈值 $A < A_c$),系统不

能够越过势垒而只能在某稳态附近随外驱动力作小幅振荡,输出信号的信噪比可以较小.这时若对系统施加一个适当的随机力(亦即噪声),噪声和周期驱动力相互协同,系统则可以越过势垒,不断地在两个稳态之间跳跃.此时系统的周期振荡幅度可以较大,系统的输出信号的信噪比因而得以增强.

在绝热近似条件下解方程(1),可以给出系统输出信号中周期成分的信噪比 SNR 随噪声强度 D (噪声的均方值)变化的关系^[12]:

$$\text{SNR} = \sqrt{2} U_0 \left(\frac{A}{D} \right)^2 \exp(-U_0/D). \quad (3)$$

由(3)式可知,随噪声强度 D 的增长,系统输出信号的周期成分的信噪比 SNR 先随 D 增长,然后迅速按指数率减小.当 $D = U_0/2 = D_M$ 时,SNR 达到最大值

$$\text{SNR}_M = 4\sqrt{2} A^2 e^{-2}/U_0. \quad (4)$$

2 实验装置与实验条件

实验是在一个表面磁约束的稳态氩等离子体装置中进行.等离子体通过热阴极发射的初始电子轰击中性气体而产生.放电参数为:灯丝电流 $I_f < 26$ A;灯丝电压 $V_f < 10$ V;直流放电电流 $I_d < 1.2$ A;直流放电电压 $V_{dc} < 18$ V;中性气体压强 $P_{Ar} = 0.13$ Pa.

* 国家自然科学基金(批准号:19835020)和国家攀登计划(非线性科学)基金资助的课题.

[†] 通信联系人, E-mail: wdliu@ustc.edu.cn

这一非线性直流放电的等离子体系统中,存在许多特性不同的双稳态和分岔点,并有多重自持振荡存在.图 1 是系统动力学轨道的一个 Hopf 分岔示意图. F 点是 Hopf 分岔点, F 点右边是不动点,左边是极限环.参数空间的横坐标是等离子体放电电压,纵坐标是放电电流.在 Hopf 分岔点的左侧,系统处于低直流放电状态,放电电流基本稳定不变;在 Hopf 分岔点的右侧,放电电流出现自持振荡,其频率在 3 kHz 左右.

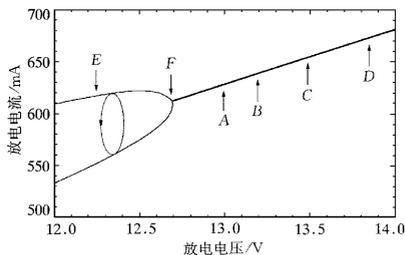


图 1 非磁化等离子体中 Hopf 分岔示意图 F 为分岔点, E 为极限环, A, B, C, D 为不动点

系统的阻尼状态与灯丝加热电流密切相关.加热电流较大时($I_f \sim 26$ A),系统状态很不稳定,系统的动力学轨道存在大量的分岔和突变过程.这时系统具有较高的维数,其内部的阻尼(耗散)较小,处于弱阻尼状态.加热电流较小时($I_f \sim 19$ A),系统状态则比较稳定,系统的动力学轨道除图 1 所示的 Hopf 分岔以及在高、低直流态过渡时出现极限环以外,均处于稳定的不动点状态.此时系统内部的阻尼很强,系统退化到一维.实验系统的强阻尼状态有利于观察随机共振现象,同时低维实验系统使实验现象较为纯化,便于与适当的理论模型相比较.本实验中选择了强阻尼的系统放电状态进行研究.

实验中将噪声源经交流损耗接入放电回路,噪声施加于放电电压上.噪声源的输出信号幅度的平均值为零,其分布是一个良好的高斯型.噪声源信号的相关时间 $\tau < 10 \mu\text{s}$,频宽为 0.1—50 kHz.所以,本噪声源在实验中所感兴趣的频段(1—10 kHz)可视为高斯白噪声.

3 实验现象与讨论

实验中在图 1 所示的系统 Hopf 分岔点附近,观察系统的动力学特性在外噪声驱动下的变化.首先

在 Hopf 分岔的不动点一侧,即 A, B, C 各点处进行实验.然后在极限环一侧的 E 点处进行实验.

图 2 是系统状态在 A 点(距 F 点 0.3 V)时,施加不同强度的外加噪声情况下,等离子体放电电流的扰动信号的变化.左列为信号的时序图,右列为相应的功率谱密度.由上至下,外加噪声信号的均方根值 V_{rms} 分别为 0, 67, 98, 697 mV.当外加噪声强度为零时,系统内禀的电流扰动幅度很小,内禀的噪声成分频谱分布较宽.但同时在功率谱中也可分辨出一个峰位在 3 kHz 左右的周期成分,但与背景噪声的信噪比小于 10 dB,这表明了系统内部存在一个亚阈值的周期驱动力.本文正是利用了这一周期驱动力来研究随机共振现象.当噪声强度为 67 mV 时,放电电流扰动明显增大.从功率谱中看,宽谱的背景噪声有所提高,但 3 kHz 的周期成分则有显著的增强,其信噪比达到 16 dB.当噪声强度达到 98 mV 时,3 kHz 周期成分的信噪比达到最大值 24 dB,同时在 6 kHz 附近处明显地出现了倍频成分.继续增加噪声强度,发现信噪比开始减小.当噪声强度达到 697 mV 时,虽然放电电流的扰动幅度很大,但 3 kHz 的周期成分相对背景噪声的信噪比已经减小到 10 dB 左右.

图 3 是系统处于 A 点时放电电流扰动信号中 3 kHz 的周期成分相对于背景噪声的信噪比 SNR 随外加噪声强度变化的曲线.可以看出:SNR 先随噪声强度增大而增大,达到最大值以后,SNR 随噪声强度的增大而减小.这与方程(3)所给出的随机共振的理论结果定性一致.

在离 F 处 0.5 V 的 B 点和离 F 点 0.8 V 的 C 点,用同样的方法观察到了类似的随机共振现象.图 4 是系统在不同的实验状态下(A, B, C 点)放电电流中周期信号的信噪比 SNR(线性坐标)随外加噪声强度(均方值)变化的曲线.可以看出,SNR 曲线都是单峰型,均存在一个最大值 SNR_M .系统状态离 F 点越远(由 A 至 C), SNR_M 越小,相对应的噪声强度 D_M 越大.根据方程(3)和(4)所给出的理论模型可知,周期驱动力强度 A 的增大或双稳态之间势垒 U_0 的降低都可以使信噪比 SNR_M 增大,但周期驱动力的变化并不改变出现最大信噪比的位置 D_M .所以可以得到结论:双稳态之间势垒 U_0 的降低,是造成从 C 点到 A 点随机共振峰越来越尖锐的主要原因.亦即在 Hopf 分岔点 F 附近系统状态的变化是由于描述系统运动动力学方程中的势垒变化而造成

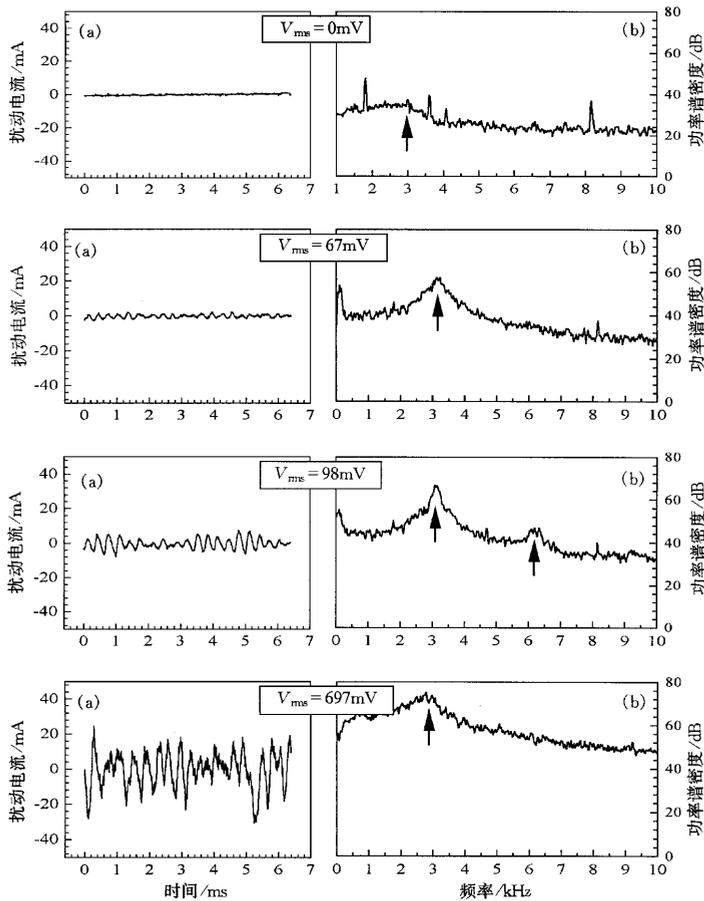


图2 系统状态在 A 点(距 F 点 0.3V)施加不同强度的外加噪声,放电电流的扰动信号时序图(左)和功率谱密度图(右)

的,而内禀的周期驱动力则不产生明显的变化.由 A 至 C 点,势垒越来越低,到 F 点时, U_0 以及阈值 A_c 变得很低,原来亚阈值($A < A_c$)的周期驱动转化为超阈值($A > A_c$)的确定性驱动,由此而发生了 Hopf 分岔.

在 Hopf 分岔极限环一侧的 E 点的实验表明:周期信号的信噪比随噪声强度的增加而单调下降,没有观察到随机共振的现象. Chattah 等人对超阈值的情况进行过理论分析^[13],其结论与本文实验中在 E 点观察到的情形一致,这说明系统在 E 点时周期驱动力处于超阈值的状态.

系统的 Hopf 分岔是描述系统运动动力学方程

中势垒高度的变化所引起的,这一点与 Lin 等人对磁化等离子体实验中所观察到的实验现象的解释不同.他们认为在他们的系统中,阻尼的变化导致了系统的运动轨道发生了 Hopf 分岔^[11].

4 结 论

综上所述,本文在一个非磁化的稳态等离子体系统中,应用系统内禀的周期驱动力和外加的高斯白噪声,成功地观察到了在 Hopf 分岔点附近的随机共振现象.输出信号的周期成分相对于背景噪声的信噪比与外加噪声的强度相关,在一个适当的外加

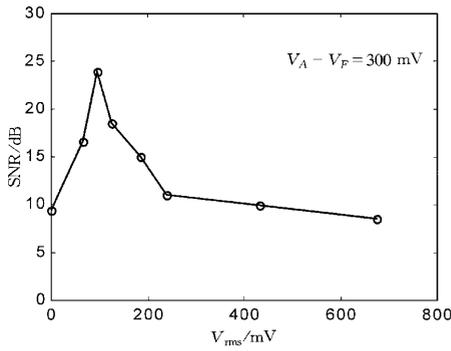


图3 系统状态在 A 点时,周期信号与背景噪声的信噪比与外驱动噪声强度的关系

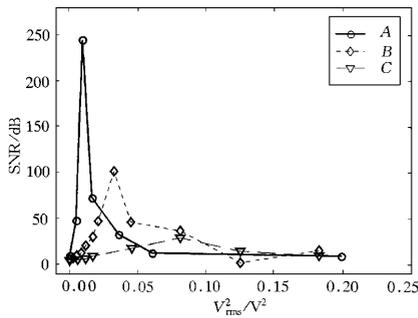


图4 系统在不同状态下(A, B, C 点),周期信号的信噪比 SNR(线性坐标)随外噪声强度(均方值)变化的曲线

噪声强度下,可获得周期信号的最佳信噪比.实验结果与一维过阻尼系统随机共振的理论预言基本一致.系统从不动点一侧向 Hopf 分岔点变化时,随机共振的现象越来越明显,共振峰的宽度越来越窄.通过与理论模型比较可知,这种变化的原因是系统双稳态之间势垒 U_0 的降低.同时这种势垒 U_0 的降低导致了阈值 A_c 的降低,从而使系统的动力学轨道发生 Hopf 分岔.在 Hopf 分岔点的极限环一侧观察不到随机共振现象,其原因是此时系统已经处于超阈值周期驱动($A > A_c$)的状态.

- [1] L. Gammaitoni, *Rev. Modern Phys.* , **70**(1998) 223.
- [2] K. Wiesenfeld, *Chaos* **8**(1998) 539.
- [3] R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, *J. Phys.* , **A14**(1981) L453.
- [4] S. Fauve, F. Heslot, *Phys. Lett.* , **97A**(1983) 5.
- [5] L. Gammaitoni, F. Marchesoni, E. Menichella-Saetta, et al., *Phys. Rev. Lett.* , **62**(1989) 349.
- [6] W. Wang, Z. D. Wang, *Phys. Rev.* , **55B**(1997) 7379.
- [7] W. J. Rappel, A. Karma, *Phys. Rev. Lett.* , **77**(1996) 3256.
- [8] E. Simonotto, M. Riani, C. Seife et al., *Phys. Rev. Lett.* , **78**(1997) 1186.
- [9] P. Jung, K. Wiesenfeld, *Nature* , **385**(1997) 6614.
- [10] H. Salman, Y. Soen, E. Braun, *Phys. Rev. Lett.* , **77**(1996) 4458.
- [11] I. Lin, J. Liu, *Phys. Rev. Lett.* , **74**(1995) 3161.
- [12] 胡 岗, *随机力与非线性系统*(上海科技教育出版社,上海, 1994)[Hu Gang, *Stochastic Forces and Nonlinear System* (Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, Shanghai, 1994)(in Chinese)].
- [13] A. K. Chattah, C. B. Briozzo, O. Osenda, *Modern Phys. Lett.* , **10**(1996) 1085.

EXPERIMENTS ON STOCHASTIC RESONANCE NEAR HOPF BIFURCATION IN A NON-MAGNETIZED PLASMA*

YANG HONG-BO LIU WAN-DONG ZHENG JIAN ZHUANG GE LIANG XIAO-PING XIE JIN-LIN YU CHANG-XUAN

(*Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230027*)

(Received 12 October 1998 ; revised manuscript received 29 October 1999)

ABSTRACT

Stochastic resonance phenomena have been studied in a non-magnetized plasma. A white Gaussian noise is externally applied to coherently interact with the intrinsic periodic driven force of the system. Signal-to-noise ratio is improved by external noise in the fixed-point region near a Hopf bifurcation of the system. The experimental results are consistent with the predictions given by one-dimensional stochastic resonance model for an over-damping bistable system. Hopf bifurcation is found to be caused by the variation of the potential barrier of the system.

PACC : 5290 ; 0520 ; 0540

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19835020) and the National " Climbing " Program for Nonlinear Science of China.