参量过程中的带间脉冲流

李 翔 郭光灿

(中国科学技术大学非线性科学中心,合肥 230026) (1999年6月10日收到;1999年9月3日收到修改稿)

用数值方法在非线性周期介质中研究参量和频过程,频率处于周期介质布拉格频率附近的入射信号光,将不 会像在线性周期介质中那样被完全反射.当信号光和抽运光强度相近时,它们与和频光通过非线性相互作用下,将 会形成周期性脉冲流,共振地以高透射率穿过非线性周期介质.在一定条件下,系统会丧失这种周期性而走向混 沌.

PACC: 4250

1 引 言

非线性和周期性这两种物理领域中最基本特性的结合给包括光学在内的诸多领域的研究带来了丰富和有趣的课题^{12]}.带间孤子(gap soliton)便是这种结合的最典型产物之一^[3].自1987年在光学领域被首次发现以来^[4],带间孤子引起了包括来自粒子物理^[5],原子物理^[6,7],凝聚态物理^[8—10],电子工程^{11]}等领域研究人员的注意.它的概念很快扩散到了物理学的很多分支.

在光学领域中,带间孤子的发现和早期研究都 是基于 Kerr 即三阶非线性效应^[3,12].由于三阶非线 性效应很微弱,这种 Kerr 带间孤子无论从理论的实 验验证^[13,14],还是对带间孤子的未来应用都是很不 理想的.人们很快就在理论上找到了参量带间孤 子,即基于二阶非线性的带间孤子^[15,16].由于二阶 非线性效应比 Kerr 效应显著得多,并且在实验控制 上有较大自由度,人们普遍认为参量带间孤子在带 间孤子的实验验证和最终实际应用方面是很有前途 的^[16].

尽管如此,目前对参量孤子的研究还仅限于理 论分析.绝大部分研究集中在对参量过程的简并情 况即二次谐波产生过程.这主要是由于一般参量过 程涉及的分波太多,在理论上很难得出解析结果,而 二次谐波产生过程有较少的参量和很好的内禀对称 性和可积性.但二次谐波产生过程的输入或控制量 是一元的(只有基波),这限制了输出的自由度,局限 了我们了解更一般的参量过程中可能存在的新现 象.

因而,我们有必要在一般参量过程中研究非线 性与周期性之间的合作可能导致的非平凡光学现 象.为此,我们从 Maxwell 方程组出发,推导了单禁 带参量过程的基本方程组,讨论了两种极限情况,对 基本方程组进行了数值模拟,并分析讨论了我们发 现的周期脉冲流输出,对结果进行了简单的讨论.

2 理论模型

2.1 基本方程

我们考虑一维(沿 *x* 轴方向)的周期性参量光 学介质.介质的线性折射率随 *x* 而呈周期性变化,

 $(x) = \epsilon_0 + \Delta \epsilon \cos(\beta_0 x). \quad (1)$

由 Maxwell 方程

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} , \qquad (2)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} , \qquad (3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 , \qquad (4)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 , \qquad (5)$$

其中

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon} (\boldsymbol{r}) \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}_{\rm NL} , \qquad (6)$$

我们得到

$$-\nabla^{2}\boldsymbol{E} + \frac{d(\boldsymbol{r})}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\boldsymbol{E}}{\partial t^{2}} = -\mu_{0}\frac{\partial^{2}\boldsymbol{P}_{\mathrm{NL}}}{\partial t^{2}}.$$
 (7)

在一维环境中(7)式化为

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \frac{(x)}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{\rm NL}}{\partial t^2}.$$
 (8)

进一步 我们设定

$$\varepsilon_1 = E_1^+(x, t) e^{-(k_1 x - \omega_1 t)} + E_1^-(x, t) e^{-(k_1 x + \omega_1 t)},$$

(9)
$$F(x, t)e^{-(k_{1}x-\omega_{2}t)}$$
 (10)

$$E_2 = E_2 (x_1, t_2) e^{-(k_1 - \omega_1 t_1)}, \quad (10)$$

$$\epsilon_3 = E_3(x, t) e^{-(k_3 x - \omega_3 t)}$$
, (11)

$$\mathbf{P}_1 = \chi_1 (\omega_1 = \omega_3 - \omega_2) \varepsilon_3 \varepsilon_2^{\star} , \quad (12)$$

$$\boldsymbol{P}_2 = \chi_2 (\omega_2 = \omega_3 - \omega_1) \boldsymbol{\varepsilon}_3 \boldsymbol{\varepsilon}_1^* , \quad (13)$$

$$P_3 = \chi_3 (\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) \varepsilon_1 \varepsilon_2 , \quad (14)$$

其中 ε_1 , ε_2 , ε_3 分别是以频率 ω_1 , ω_2 , ω_3 在介质中传播的电磁波分量; E_1^- 是信息波在周期结构中形成的反射波的慢变振幅; E_1^+ , E_2 , E_3 分别是入射的信息波、抽运波和由它们相互作用形成和频波的慢变振幅; P_1 , P_2 , P_3 是相应于信息波、抽运波、和频波的非线性极化强度.特别重要地,为了简化讨论,在这里假设信息波落入周期结构的光学禁带中央即 $k_1 = 2\beta_0$,并假定如下条件得到满足:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$
, $k_3 = k_1 + k_2$. (15)

分别把(9)-(14)式代入(8)式,利用慢变振幅近似 和相位匹配条件(15)式,我们得到

$$\left(\frac{\partial E_1^+}{\partial x} + \frac{1}{v_1}\frac{\partial E_1^+}{\partial t}\right) + \kappa E_1^- + \chi_1 E_3 E_2^* = 0 ,$$
(16)

$$i\left(-\frac{\partial E_1^-}{\partial x}+\frac{1}{v_1}\frac{\partial E_1^-}{\partial t}\right)+\kappa E_1^+=0,\quad(17)$$

$$\left(\frac{\partial E_2}{\partial x} + \frac{1}{v_2}\frac{\partial E_2}{\partial t}\right) + \chi_2 E_3 E_1^{+*} = 0 , \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial E_3}{\partial x} + \frac{1}{v_3}\frac{\partial E_3}{\partial t}\right) + \chi_3 E_1^+ E_2 = 0 , \quad (19)$$

其中 v1, v2, v3是相应电磁波在介质中传播的群速,

$$\kappa = \frac{\Delta \epsilon \, \omega_1}{4 c^2 \, \upsilon_1} \tag{20}$$

是周期耦合系数,

$$\chi_1 = \frac{\chi(\omega_1 = \omega_3 - \omega_2)\omega_1}{2c^2 v_1}$$
, (21)

$$\chi_2 = \frac{\chi(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1)\omega_2}{2c^2 v_2} , \qquad (22)$$

$$\chi_{3} = \frac{\chi(\omega_{3} = \omega_{1} + \omega_{2})\omega_{3}}{2c^{2} v_{3}} , \qquad (23)$$

是非线性系数.

这个方程组的物理意义是很明显的. E_1^+ 通过 周期结构引起的耦合系数 κ 与 E_1^- 相互作用 , E_1^+ , E_2 , E_3 通过二阶非线性系数 χ 进行三波相互作用. 因为 E_1^+ 与 E_2 , E_3 位相匹配 ,从而 E_1^- 与 E_2 , E_3 位 相失配 E_1^+ 和 E_1^- 传播方向相反), E_1^- 与 E_2 , E_3 之 间几乎没有直接耦合. 当 $\kappa \rightarrow 0$ 时 ,这个方程组蜕化 成描述一般三波参量过程的方程组 ,当 $\chi \rightarrow 0$ 时 ,它 又蜕化成描述线性布拉格反射镜的方程组.

2.2 线性极限

首先令
$$\chi \rightarrow 0$$
 ,(16)—(19)式化成
 $\left(\frac{\partial E_1^+}{\partial x} + \frac{1}{v_1} \frac{\partial E_1^+}{\partial t}\right) + \kappa E_1^- = 0$, (24)

$$\left(-\frac{\partial E_1^-}{\partial x}+\frac{1}{v_1}\frac{\partial E_1^-}{\partial t}\right)+\kappa E_1^+=0. \quad (25)$$

设 $E_1^{\pm} = \epsilon_1^{\pm} e^{(K_x - \Omega_t)}$,将其代入(24)(25)式.由系 数行列式为0可得

$$\Omega = \pm v_1 \sqrt{\kappa^2 + K^2} , \qquad (26)$$

即

$$K = \pm \sqrt{(\Omega / v_1)^2 - \kappa^2}. \qquad (27)$$

当 $\Omega/v_1 > \kappa$ 时 K 是实数 ,周期介质中容许行波的 传播. 当 $\Omega/v_1 < \kappa$ 时 ,K 是虚数 ,该解是衰逝波 ,电 磁场振幅随入射深度指数递减 ,渗透深度为

$$l = 1/|K| = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - (\Omega / v_1)^2}}.$$
 (28)

特别地 ,当 $\Omega/v_1 = 0$ 时 , $l_0 = 1/\kappa$.

因此,当入射光的频率 $\Omega/v_1 \in \{-\kappa,\kappa\}$ 时,入 射光将被全反射.故线性周期光介质又被称布拉格 反射镜,而 $\omega_1 - \kappa$ 到 $\omega_1 + \kappa$ 的频段便被称为(光)禁 带,而且禁带宽度 $\Delta = 2\kappa$,与禁带中心的渗透深度 $l_0 = 1/\kappa$ 成反比.

2.3 均匀介质极限

令
$$\kappa \rightarrow 0$$
, (16) -(19)武化为
 $\left(\frac{\partial E_1^+}{\partial x} + \frac{1}{v_1}\frac{\partial E_1^+}{\partial t}\right) + \chi_1 E_3 E_2^* = 0$, (29)
 $\left(\frac{\partial E_2}{\partial x} + \frac{1}{v_2}\frac{\partial E_2}{\partial t}\right) + \chi_2 E_3 E_1^{+*} = 0$, (30)
 $\left(\frac{\partial E_3}{\partial x} + \frac{1}{v_3}\frac{\partial E_3}{\partial t}\right) + \chi_3 E_1^+ E_2 = 0.$ (31)

这是描述一般的三波参量过程的方程组,它有 孤子解

$$n_{1} = \frac{v_{1} - \lambda}{\chi_{1} v_{1}} |E_{1}^{+}|^{2} = m_{1}$$
$$- m_{2} \operatorname{sn}^{2} \chi \sqrt{m_{1}} (\xi - \xi_{0}) , m], \quad (32)$$

$$n_{2} = \frac{v_{2} - \lambda}{\chi_{2} v_{2}} |E_{2}|^{2} = m_{2} \operatorname{cn} \{\chi \sqrt{m_{1}}(\xi - \xi_{0}), m\},$$
(33)

$$n_{3} = \frac{v_{3} - \lambda}{\chi_{3} v_{3}} |E_{3}|^{2} = m_{2} \operatorname{sn} \{\chi \sqrt{m_{1}} (\xi - \xi_{0}), m\},$$
(34)

其中 m_1 , m_2 为常数, $\xi = x - \lambda t$. 当 $\lambda < \max\{|v_1, v_2, v_3\}$ 时

$$m = m_2 / m_1$$
, (35)

$$\chi = \sqrt{\frac{\chi_1 \chi_2 \chi_3 v_1 v_2 v_3}{(v_1 - \lambda) (v_2 - \lambda) (v_3 - \lambda)}}.$$
 (36)
特別地,当 $m_1 = m_2 = m_0$ 时,

$$E_{1} = -i\sqrt{\frac{\chi_{1} v_{1}m_{0}}{v_{1} - \lambda}} \operatorname{sech}(\chi \sqrt{m_{0}}(\xi - \xi_{0})),$$
(37)

$$E_2 = -i\sqrt{\frac{\chi_2 v_2 m_0}{v_2 - \lambda}} \operatorname{sech}(\chi \sqrt{m_0}(\xi - \xi_0)),$$
(38)

$$E_{3} = -i\sqrt{\frac{\chi_{3} v_{3}m_{0}}{v_{3}-\lambda}} \tanh(\chi \sqrt{m_{0}}(\xi - \xi_{0})).$$
(39)

3 数值分析

704

3.1 基本方法

从整体来看,基本方程与无论是支持 Kerr 带 间孤子还是支持二次谐波过程中参量孤子的非线性 耦合模方程组相比都有着低得多的对称性,因此其 可积性很低,直接进行解析求解十分困难.而数值 方法能使我们绕过解析方法的局限来观察基本方程 隐含的奇异性.作为对这个方程组研究的开端,我们 在这里主要讨论在这个系统中观察到的周期脉冲流 及其定性的规律.

基本方程(16)—(19)是一个四元二维一阶非线 性方程组,用有限元方法对其进行了数值模拟.四个 一阶的边界条件分别为(0≪t)

E_1^+ (0,t) = A_1 = const,	(40)
$E_{2}(0, t) = A_{2} = \text{const},$	(41)
$E_{1}(L, t) = 0$.	(42)

$$E_{3}(0,t) = 0;$$
 (43)

$$E_{1}^{+}(x \ 0) = 0(0 \le x \le L), \qquad (44)$$

- $E_{1}(x \ 0) = 0(0 \le x < L), \quad (45)$ $E_{2}(x \ 0) = 0(0 < x \le L), \quad (46)$
- $E(x, 0) = 0(0 < x \le L).$ (47)

并且不失一般性地 ,我们令 L = 8 , $V_1 = V_2 = V_3 = 2$.

3.2 线性极限

我们首先来观察系统在线性极限下的行为. 令 $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$, $\kappa = 0.1$,这时介质中只存在入射波 和反射波. 由于 κ ,即两波的耦合系数很小,如图 1 所示(横轴 t 代表时间,纵轴 T_1 代表入射波的透射 率),得到 E_1^+ 的透射系数 T_1 接近 0.6.



图 1 $\kappa = 0.1$, $\chi = 0$ (线性极限), $T_1 = t$ 关系



图 2 $\kappa = 0.3$, $\chi = 0.5$, A = 1, T_1 与 t 关系

当 κ 增加至 0.3 时 , T_1 呈指数减小至 0.036.两 波的强耦合导致入射波被强烈反射.当 $\kappa = 0.5$ 时 , 入射波与反射波已发生极强耦合 , T_1 继续下降为 0.0015.入射波可看成是被完全反射.

这里注意 , T_1 与入射光的强弱无关 ,只与 κL 的大小有关.



图 3 $\kappa = 0.3$, $\chi = 0.6$, A = 1, T_1 与 t 关系

3.3 非线性介质中的周期脉冲

4 期

我们取定 $\kappa = 0.3$ 在介质中逐步加入非线性.

增加系统的非线性有两种方式. 当非线性系数 不为 0 时,通过固定非线性系数逐步增加光强或固 定光强逐步增加非线性系数都可以达到目的. 现固 定入射光强, $(A_1 = A_2 = 1, 1)$, 让非线性系数 $\chi_1 = \chi_2$ = χ_3 在 0.1—0.9 间变化. 我们发现,随着非线性系 数从 0 的增加到 0.6 左右, T_1 由零逐渐增大到 0.3, 并且解从稳态过渡到了振荡态(见图 2 和图 3).

若继续增加非线性系数,系统的输出呈现周期性. T_1 的平均值在非线性系数达到一定值时取极大值,再继续增大非线性将使平均值下降.当 $\chi = 1.4$ 为左右时,周期解通过 Hopf 分岔走向混沌(见图4).

这一过程也完全可以通过增加光强来实现. 我 们固定 $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0.2$,从 $A_1 = A_2 = 1$ 开始增加 入射光强. 如预料的一样 ,系统行为对光强依赖的敏 感性远大于对其非线性系数依赖的敏感性. 当 $A_1 = A_2 = A_c = 2.55$ 时 ,系统开始进入周期态(A_c 代表进 入周期态的光强下阈值). 进一步当令 $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3$ = 0.4 时 则 A_c 仅为 1.4. 很明显 ,随着非线性系数 的增加 , A_c 迅速减小. 这暗示通过对非线性系数的 小范围增强 ,可以大大降低使系统进入周期态所需 的光强. 值得注意的是 ,在通过增加非线性系数降低 周期态阈值的同时 ,从周期态进入混沌态的阈值也 大大降低. 因此 ,利用增加非线性系数降低周期态阈 值存在一个上限. 超过这个限度 ,周期态的存在极不 稳定 ,很容易跨越阈值 ,进入混沌区.

另一值得注意的现象是,数值计算的结果表明, 改变非线性可以改变系统进入周期态的阈值,但不 能改变系统周期。



图 4 $\kappa = 0.3$, $\chi = 1.4$, A = 1, T_1 与 t 关系

3.4 耦合系数对周期态的影响

我们进一步考察耦合系数 κ 与出现周期态的 光强阈值 A_c 及周期长短 P 间的关系. 固定 $\chi_1 = \chi_2$ = $\chi_3 = 0.3$ $A_1 = A_2 = 2.2$ 在 0.1—0.6 之间变化 κ 值,发现周期 P 的变化如表 1 所示.

	表1	
	κ_i	周期 P
1	0.1	~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
2	0.2	177
3	0.3	133
4	0.4	113
5	0.6	90
6	0.7	67

由表 1,不难发现周期 P 随耦合系数 κ 基本呈 指数递减.对此我们可作如下理解:入射波振幅随 κL 增加而指数递减,因而入射波与反射波的相互作 用强度也随之呈指数递增.而脉冲流的周期反比于 入射波与反射波间的相互作用.所以其周期随耦合 系数的增加而指数递减.但值得注意的是,这个过程 并不能无限持续下去. 当 κ 增加到使非线性与周期 性相比可以忽略时,系统接近线性,周期态消失.

为了研究耦合系数与周期态阈值之间的关系, 我们选定: $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0.3$, $A_1 = A_2 = 1.70.$ 当 κ = 0.3 时,系统刚好处于稳态过渡到周期态间的临 界点.这时变动 κ 值,观察系统是否过渡到稳态或 周期态.发现 A_c 对 κ 的依赖不是线性的,即当 κ 值 太大或太小时, A_c 都要增加.这一点可以如下来理 解:系统进入周期态是介质的周期结构与非线性共 同作用达到平衡的结果. κ 较小时,只有较大的入射 波振幅才能引起反射波足够大的响应,使其对入射 波提供周期振荡所需的反馈.特别地,当 $\kappa \to 0$ 时, 相应地 $A_c \to \infty$,即在纯非线性极限下,系统内周期 振荡完全消失.另一方面当 κ 较大时,非线性处于 劣势,系统类线性.因此激发周期态需要较大的入射 波强度以提高系统的非线性,来'打通'周期结构的 光禁带.特别地,当 κ→∞时,A。同样趋于无穷大, 即在纯线性极限下入射波被完全反射,系统同样不 可能进入周期态.

3.5 信息波和抽运波的不对称性对周期态的影响

在以上数值计算和讨论中,我们均假设 $A_1 = A_2$.实际上只要 $A_1 = A_2$ 具有相仿的量级,以上分析和结论都是一样适用的.但当它们在量级上有明显的差异时情况将有所不同.

若 $A_1 \gg A_2$,系统内占主导地位的是信息波及 其反射波,抽运波和和频的分量很小,因此系统类线 性.为进入周期态,我们需要较高的入射波强度,因 此 A_c 值增加.若 $A_2 \gg A_1$,系统内占主导地位的是 抽运波,信息波及其反射波与和频的分量很小, A_c 的值也比 A_1 和 A_2 为同一量级时高很多.

由于这种不对称性仅改变系统的非线性,因而如前面讨论的一样,它对周期态的周期大小没有影响.

因此,我们在这里说明了在以上对系统周期态 讨论中选择 $A_1 = A_2$ 的必要性,即基于这一设定,我 们可以在相对较小的 A_c 中进行讨论.

4 结 论

本文作为一种尝试,试图建立在单禁带非线性

周期结构中一般参量过程的理论模型.我们从 Maxwell方程组出发第一次推出了这一系统的基本 方程,并通过引入极限情况,清楚地分析了该方程蕴 含的物理意义.

在这个方程的可积性由于其较低对称性而受到 怀疑的情况下,我们用数值方法直接对之进行求解. 在求解的过程中,我们在一定的参量空间内发现了 系统由稳态过渡到周期态从而进一步进入混沌态的 转变过程.

我们定性地讨论了参变量对周期态的阈值和周 期的影响,发现了非线性系数,入射波强度,耦合系 数及入射波的非对称性对阈值影响的基本趋势和耦 合系数与周期大小之间的指数关系.

这些结果是对基本方程的第一次初步认识. 它 提示我们,单禁带非线性周期结构中一般参量过程 可以被用于制造某种脉冲发生器. 根据上一部分的 讨论,这种脉冲发生器的周期应有很强的可调性. 与 人们已在 Kerr 非线性周期结构中发现的孤子脉冲 流相比,这里发现的脉冲流效应将由于它基于二阶 非线性效应而在实验和应用上更加显著和易于控 制.

值得注意的是,我们一开始便假设了入射信息 波的频率落在光禁带中央,而没有考虑其落在靠近 禁带边缘的情况.因此在后一种情况下,系统的可积 性还是未知的(而 Kerr 带间孤子正是在这一参数空 间出现的).可以预料,这方面的进一步工作将会很 有意义.

- [1] A. Hasegawa, F. Tappert, Appl. Phys. Lett. 23 (1973), 142.
- [2] Photonic Bandgaps, Localization, edited by C. Soukoulis (Plemun, New York, 1993).
- [3] C. M. de Sterke, J. E. Sipe, in Progress in Optics XXXIII, ed.
 E. Wolf (North-Holland "Amsterdam", 1994), Chap. III.
- [4] W. Chen , D. L. Mills , Phys. Rev. Lett. 58 (1987), 160.
- [5] A. S. Belanov ,V. A. Vysloukh ,E. A. Kolomiytseva et al. , Izv. Akad. Nauk. Fiz. 60 (1996), 39.
- [6] O. Zobay ,S. Potting ,P. Meystre , Phys. Rev. , A59(1999), 643.
- [7] V. I. Rupasov, M. Singh, *Phys. Rev.*, A79(1996), 3614.
- [8] T.G. Brown , R. P. Fabrizzio , S. M. Weiss , Opt. Express. ,3 (1998), 433.

- [9] G. X. Huang, M. G. Velarde, S. H. Zhu, Phys. Rev., B55 (1997), 336.
- [10] G. X. Huang, B. B. Hu, Phys. Rev. B57 (1998) 5746.
- [11] B.Z.L. Ambassa , T.C. Kofane , *Physica* , **D106** (1997) , 207.
- [12] Z. Cheng, G. Kurizki, Phys. Rev. Lett. 75(1995), 3430.
- [13] B. J. Eggleton, R. E. Slusher, C. M. Sterke, *Phys. Rev. Lett.*, 76(1996), 1627.
- [14] C. Taverner N. G. R. Broderick ,D. J. Richardson *et al.*, Opt. Lett. 23 (1998), 328.
- [15] H. He, P. D. Drummond, Phys. Rev. , E58 (1998), 5025.
- [16] C. Conti , S. Trillo , G. Assanto , Phys. Rev. , E57 (1998), 1251.

PULSE FLUX GENERATION IN PARAMETRIC PROCESS

LI XIANG GUO GUANG-CAN

(Center of Nonlinear Science ,University of Science and Technology of China ,Hefei 230026 ,China)
 (Received 10 June 1999 ; revised manuscript received 3 September 1999)

ABSTRACT

We use numerical method to study the parametric sum-frequency generation process in nonlinear periodic dielectric. When the frequency of the incident light lies around the Bragg frequency of the periodic dielectric, it will not be completely reflected as in the linear case. The information light interacts with the pump light and sum-frequency light via nonlinear interaction to form periodic pulse flux, and transmits through the nonlinear periodic structure resonantly. Under certain conditions, the system will lose its periodicity and enter choatic states.

PACC: 4250