

纠缠态原子偶极间相互作用对量子态保真度的影响*

刘堂昆¹⁾²⁾³⁾ 王继锁¹⁾²⁾⁴⁾ 柳晓军¹⁾²⁾ 詹明生¹⁾

¹⁾中国科学院武汉物理与数学研究所波谱与原子分子物理国家重点实验室, 武汉 430071)

²⁾中国科学院安徽光学精密机械研究所激光光谱学开放实验室, 合肥 230031)

³⁾湖北师范学院物理系, 黄石 435002)

⁴⁾聊城师范学院物理系, 聊城 252059)

(1999 年 8 月 4 日收到)

研究了一对具有偶极-偶极相互作用的纠缠态原子与相干态光场的相互作用, 考察了原子间偶极-偶极相互作用对体系中量子态保真度的影响.

PACC : 4250

1 引 言

随着实验技术的提高, 光场与原子相互作用过程中的非经典效应逐步得到了实验证实^[1-3]. 特别是高 Q 腔中单原子实验的成功^[4]和近期利用原子与光场量子态的制约关系可构造量子逻辑门的设想已在实验上得到了实现^[5], 这些具有创造性的实验结果, 进一步激发了人们对与原子的辐射波长相近大小的腔体中的原子与腔场相互作用研究的兴趣. 通常的 J-C 模型^[6]描写的是单个有效两能级原子与单模场的相互作用. 如果两个有效两能级原子同时进入单模场的区域, 并且两原子彼此靠得很近, 此时两个原子间通过交换虚光子产生偶极-偶极相互作用, 这样就会导致许多新的非经典现象产生, 如原子反转的崩塌和恢复^[7]、两原子的辐射谱^[8]、光场和原子偶极的压缩^[9]以及场熵的演化^[10], 等等.

保真度是量子光学和信息科学领域中的一个重要的概念, 它是表示信息在传输过程中保持原来状态的程度. 近年来, 作为一个重要的物理参量广泛应用于量子通信和量子计算理论中^[11-13]. 在量子通信、量子计算机和量子密码术中, 量子态是信息的载体. 由于量子计算机要涉及量子态的传输问题, 而量子态的传输必然要考虑保真度问题. 对于一个量子系统, 在相互作用过程中它的量子信息并不完全由其熵反映出来, 密度算符间距在量子理论中比熵更加优越, 能

提供更多的有关量子态的信息^[14]. 另外, 密度算符间距与保真度两者在描述量子体系的信息关联和纠缠程度上是等价的^[15]. 因此, 本文研究一对具有偶极相互作用的全同二能级原子与单模量子腔场相互作用, 考察两原子彼此处于纠缠态时原子间的偶极-偶极相互作用对体系中量子态保真度的影响.

2 理论模型及其波函数

考虑两全同二能级原子与单模光场相互作用, 假设原子间距离小于腔场波长, 使得原子间的偶极-偶极相互作用不可忽略, 在这样情况下, 系统的哈密顿量可写为^[8] (取 $\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \omega \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \omega_0 \sum_{i=1}^2 \hat{\sigma}_z^i + g \sum_{i=1}^2 (\hat{a}^+ \hat{\sigma}_-^i + \hat{a} \hat{\sigma}_+^i) \\ & + g_a \sum_{i \neq j}^2 \hat{\sigma}_+^i \hat{\sigma}_-^j, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 \hat{a}^+ 和 \hat{a} 为量子化光场的产生和湮没算符, ω_0 为原子的 Rabi 振荡频率, ω 为辐射场的频率, $\hat{\sigma}_z^i = |e^i \ e^i\rangle - |g^i \ g^i\rangle$ ($i=1, 2$), $|e^i\rangle$ 和 $|g^i\rangle$ 分别表示第 i 个原子的激发态和基态, $\hat{\sigma}_+^i = |e^i \ g^i\rangle$, $\hat{\sigma}_-^i = |g^i \ e^i\rangle$, g 表示原子与光场的耦合常量, g_a 表示原子间的偶极相互作用常量.

假定光场的光子数 $n \geq 2$, 在以

$$|E \ G \ n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g^1 \otimes |e^2 \otimes |n\rangle + |e^1 \otimes |g^2 \otimes |n\rangle), \quad (2)$$

* 国家自然科学基金(批准号: 19774069)和湖北省高等学校科研基金(批准号: 99A048)资助的课题.

$$|g, g, n+1\rangle = |g^1\rangle \otimes |g^2\rangle \otimes |n+1\rangle, \quad (3)$$

$$|e, e, n-1\rangle = |e^1\rangle \otimes |e^2\rangle \otimes |n-1\rangle \quad (4)$$

为基张成的不变子空间中, 哈密顿量(1)式表示成

$$H = \begin{bmatrix} \omega n + g_a & \sqrt{\mathcal{X}(n+1)}g & \sqrt{2n}g \\ \sqrt{\mathcal{X}(n+1)}g & \omega(n+1) - \omega_0 & 0 \\ \sqrt{2n}g & 0 & \omega(n-1) + \omega_0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

共振情况下: $\omega = \omega_0$, 则有

$$H = n\omega + \begin{bmatrix} g_a & \sqrt{\mathcal{X}(n+1)}g & \sqrt{2n}g \\ \sqrt{\mathcal{X}(n+1)}g & 0 & 0 \\ \sqrt{2n}g & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

如果令

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= g_a^2 + 16ng^2 + 8g^2, \\ \sqrt{\mathcal{X}(n+1)}g &= \frac{\Omega}{2} \sin\theta \cos\phi, \\ \sqrt{2n}g &= \frac{\Omega}{2} \sin\theta \sin\phi, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\phi = \arctan \sqrt{\frac{n}{n+1}}$, $\theta = \arctan \frac{2g\sqrt{4n+2}}{g_a}$. 利用(7)式, 把(6)式写成关于 ϕ 和 θ 的函数形式

$$H = n\omega + \Omega \begin{bmatrix} \cos\theta & \frac{1}{2} \sin\theta \cos\phi & \frac{1}{2} \sin\theta \sin\phi \\ \frac{1}{2} \sin\theta \cos\phi & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \sin\theta \sin\phi & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

由此求得 H 的本征值为

$$E_0 = n\omega, \quad (9)$$

$$E_{\pm} = n\omega \pm \Omega \frac{1 \pm \cos\theta}{2}, \quad (10)$$

相应的本征函数为

$$|\varphi^{(0)}\rangle = \sin\phi |g, g, n+1\rangle - \cos\phi |e, e, n-1\rangle, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} |\varphi^{(+)}\rangle &= \cos\frac{\theta}{2} |E, G, n\rangle + \sin\frac{\theta}{2} \cos\phi \\ &\cdot |g, g, n+1\rangle + \sin\frac{\theta}{2} \sin\phi |e, e, n-1\rangle, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} |\varphi^{(-)}\rangle &= \sin\frac{\theta}{2} |E, G, n\rangle - \cos\frac{\theta}{2} \cos\phi \\ &\cdot |g, g, n+1\rangle - \cos\frac{\theta}{2} \sin\phi |e, e, n-1\rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

从(11)式可以看出, 态 $|\varphi^{(0)}\rangle$ 中不含有态

$|E, G, n\rangle$. 通常称其为双原子体系的暗态(dark state). 如果双原子体系处于态 $|\varphi^{(0)}\rangle$ 并绝热演化下去, 它向态 $|E, G, n\rangle$ 的跃迁概率为 0.

如果 $t=0$ 时, 体系的状态为

$$|\psi_s(0)\rangle = \sum_n F(n) |E, G, n\rangle, \quad (14)$$

即两原子处于纠缠态

$$|\psi_a(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g^1\rangle \otimes |e^2\rangle + |e^1\rangle \otimes |g^2\rangle), \quad (15)$$

光场处于相干态

$$\begin{aligned} |\psi_f(0)\rangle &= \sum_n F(n) |n\rangle \\ &= \sum_n e^{-\bar{n}/2} \frac{(\bar{n})^{n/2}}{\sqrt{n!}} e^{i\varphi_c} |n\rangle, \end{aligned} \quad (16)$$

式中 \bar{n} 和 φ_c 分别是相干光场的初始平均光子数和初始相位. 则不难求得在 t 时刻体系的波函数为

$$\begin{aligned} |\psi_s(t)\rangle &= \sum_n F(n) \left\{ \sin\theta \cos\phi \sin\left(\frac{1}{2}\Omega t\right) \exp\left\{-i\left[\frac{\pi}{2}\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left.+ \left(n\omega + \frac{1}{2}\Omega \cos\theta\right)t\right]\right\} |g, g, n+1\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(-iE_+ t) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp(-iE_- t) \right] |E, G, n\rangle \\ &\quad \left. + \sin\theta \sin\phi \sin\left(\frac{1}{2}\Omega t\right) \exp\left\{-i\left[\frac{\pi}{2} + \left(n\omega\right.\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left.+ \frac{1}{2}\Omega \cos\theta\right)t\right]\right\} |e, e, n-1\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

由任一时刻系统的态密度算符

$$\rho_s(t) = |\psi_s(t)\rangle \langle \psi_s(t)| \quad (18)$$

出发, 可以得到子系统光场和原子的约化密度算符

$$\rho_f(t) = \text{Tr}_a \rho_s(t), \quad (19)$$

$$\rho_a(t) = \text{Tr}_f \rho_s(t). \quad (20)$$

(14)–(20)式中的脚标 s, f 和 a 分别表示系统、光场和原子. 这样, 有了系统、光场和原子的初始条件以及(17)–(20)式, 我们即可对本文所讨论的相互作用体系的量子态保真度进行考察.

3 相互作用体系的量子态保真度

为了描述输入态(初态)和输出态(末态)的偏差程度, 人们引入了保真度的概念. 其定义为^[16]

$$F(\rho_1, \rho_2) = \left[\text{Tr} \left(\sqrt{\rho_1 \rho_2} \sqrt{\rho_1} \right)^{1/2} \right]^2, \quad (21)$$

式中 ρ_1 和 ρ_2 为两种态所对应的态密度算符.

$F(\rho_1, \rho_2)$ 取值范围在 0—1 之间. 当 $F(\rho_1, \rho_2) = 0$ 时, 表示信息(量子态)在传输过程中完全失真, 则表明初态和末态相互正交. 而当 $F(\rho_1, \rho_2) = 1$ 时, 表示为理想信息传输过程, 即表明初态和末态相同. 一般情况下 $0 < F(\rho_1, \rho_2) < 1$, 表示信息在传输过程中存在失真现象.

根据(17)–(21)式和体系的初始条件, 容易得到系统、光场和原子的量子态保真度的数学表达式

$$F_S(t) = \left| \sum_n e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \left[\cos^2(\theta/2) \exp\left[-\left(n\omega + \frac{1}{2}\Omega(1 + \cos\theta)\right)t\right] + \sin^2(\theta/2) \exp\left[-\left(n\omega - \frac{1}{2}\Omega(1 - \cos\theta)\right)t\right] \right] \right|^2, \quad (22)$$

$$F_L(t) = \left| \sum_n e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^{(n-1/2)}}{n!} \sqrt{n} e^{i\varphi_c} \sin\theta \sin\phi \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\Omega t\right) \exp\left[-\left(\pi/2 + \left(n\omega + \frac{1}{2}\Omega \cos\theta\right)\right)t\right] + \left[\sum_n e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^{(n+1/2)}}{n! \sqrt{n+1}} e^{-i\varphi_c} \sin\theta \cos\phi \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\Omega t\right) \exp\left[-\left(\pi/2 + \left(n\omega + \frac{1}{2}\Omega \cos\theta\right)\right)t\right] + \left[\sum_n e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \left[\cos^2\frac{\theta}{2} \exp\left[-\left(n\omega + \frac{1}{2}\Omega(1 + \cos\theta)\right)t\right] + \sin^2(\theta/2) \exp\left[-\left(n\omega - \frac{1}{2}\Omega(1 - \cos\theta)\right)t\right] \right] \right|^2, \quad (23)$$

$$F_A(t) = \left| \sum_n e^{-\bar{n}/2} \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}} \left[\cos^2(\theta/2) \exp\left[-\left(n\omega + \frac{1}{2}\Omega(1 + \cos\theta)\right)t\right] + \sin^2(\theta/2) \exp\left[-\left(n\omega - \frac{1}{2}\Omega(1 - \cos\theta)\right)t\right] \right] \right|^2. \quad (24)$$

由上述式子可以看出, 系统、光场和原子的量子态保真度与原子和光场的耦合常量 g 、原子间的偶极相互作用常量 g_a 以及共振频率 ω 有关, 同时, 由于原子与光场相互作用是一个动力学系统, 所以还与时间 t 有关. 将(7)式代入(22)–(24)式, 即可得到不同的参量条件下的系统、光场和原子的量子态保真度随时间的演化规律. 很明显, 当 $t = 0$ 时, 系统、光场和原子三者的量子态保真度都等于 1. 下面, 我们通过数值计算来讨论腔中原子间的偶极相互作用常量 g_a 对系统、光场和原子的量子态保真度的影响.

4 数值计算与分析

图 1—图 3 显示的是双二能级原子初始处于纠缠态时与相干光场相互作用的系统、光场和原子的

量子态保真度取不同的偶极-偶极相互作用常量随时间 t 的演化曲线. 图中的 (a)–(d) 对应不同的 g_a 值 (a) 为 $g_a = 0$ (b) 为 $g_a = 1$ (c) 为 $g_a = 10$ (d) 为 $g_a = 30$, 其他参量 $\bar{n} = 5$, $g = 1$, $\omega = 2$, $\varphi_c = 0$. 从图中可以看出, 原子的偶极-偶极相互作用影响着系统、光场和原子的量子态保真度的演化规律. 偶极-偶极相互作用较小时, 系统、光场和原子三者的量子态保真度演化曲线为无规则的. 偶极-偶极相互作用越强, 系统和光场的量子态保真度演化规律的周期性越明显, 并且振幅越大. 还可以看出, 当 g_a 大到一定的程度时, 系统和光场两者的量子态保真度随时间 t 的演化曲线基本一致 (图 1(d) 和图 2(d)). 通过数值计算发现, 产生这种现象的主要原因是因为当偶极-偶极相互作用常量较大时, F_i 表达式中的第一、二项对其演化曲线无影响. 对于原子而言, 偶极-偶极相互作用越强, 其量子态保真度的演化曲线振荡频率越快, 周期越长, 振幅越小. 继续增大偶极-偶极相互作用, 原子的量子态保真度可以接近 1 (图 3(d)).

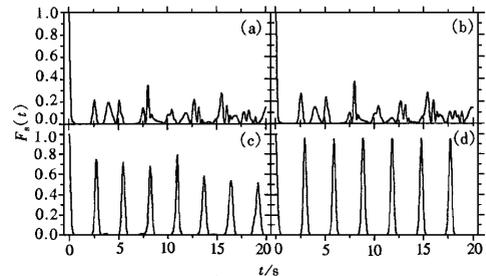


图 1 系统的量子态保真度 $F_S(t)$ 随时间 t 的演化 (取 $g = 1$, $\omega = 2$, $\bar{n} = 5$, $\varphi_c = 0$ (a) 为 $g_a = 0$ (b) 为 $g_a = 1$ (c) 为 $g_a = 10$; (d) 为 $g_a = 30$)

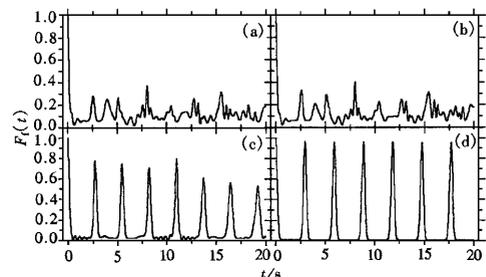


图 2 光场的量子态保真度 $F_L(t)$ 随时间 t 的演化 (取 $g = 1$, $\omega = 2$, $\bar{n} = 5$, $\varphi_c = 0$ (a) 为 $g_a = 0$ (b) 为 $g_a = 1$ (c) 为 $g_a = 10$; (d) 为 $g_a = 30$)

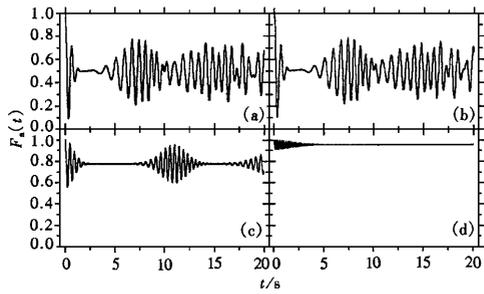


图3 原子的量子态保真度 $F_q(t)$ 随时间 t 的演化 取 $g=1$, $\omega=2$, $\bar{n}=5$, $\varphi_c=0$ (a)为 $g_a=0$ (b)为 $g_a=1$ (c)为 $g_a=10$; (d)为 $g_a=30$

比较图 1—3 中的演化曲线,可以看出,不同的偶极-偶极相互作用常量,体系中的系统、光场和原子的量子态保真度是不同的.在较小的偶极-偶极相互作用常量下,与系统的演化规律不同,光场的量子态保真度虽有失真,但量子态并不正交.只有当偶

极-偶极相互作用较强时,才有可能出现量子态保真度完全失真(量子态正交)的现象.对于原子来说,偶极-偶极相互作用越强,其量子态保真度越大,即使是偶极-偶极相互作用为零,其量子态保真度也不会完全失真.

5 结 论

通过对两个二能级原子初始处于纠缠态时与单模相干光场相互作用的体系量子态保真度的讨论,发现原子间的偶极-偶极相互作用对体系量子态保真度有明显的影 响.结果表明,当两原子间的偶极-偶极相互作用小于或者等于光场与原子间的相互作用时,系统、光场和原子三者的量子态保真度演化无规则,都存在失真;当偶极-偶极相互作用远大于光场与原子间的相互作用时,原子的量子态保真度接近 1,两原子趋于退纠缠状态.光场和系统的量子态保真度处于 0 和 1 之间并周期性交替.

- [1] P. Meystre, *Phys. Rep.* **219**(1992) 243.
- [2] S. Harohes, D. Kleppner, *Phys. Today* **42**(1989) 24.
- [3] M. Brune, J. M. Raimond, P. Goy *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **59**(1987), 1899.
- [4] R. J. Thompson, G. Rempe, H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **68**(1992), 1132.
- [5] Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange *et al.*, *Rhys. Rev. Lett.* **75**(1995) A710.
- [6] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, *Proc IEEE* **51**(1963) 89.
- [7] A. Joshi, R. P. Puri, S. V. Iawande, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 2135.
- [8] L. Xu, Z. F. Luo, Z. Z. Xu, Z. M. Zhang, *Acta Optica Sinica* **12**(1992), 1089 (in Chinese) [徐磊、罗振飞、徐至展、张智明, *光学学报*, **12**(1992), 1089].
- [9] T. Q. Song, J. Feng, B. Z. Xu, W. Z. Wang, *Acta Physica Sinica* **44**(1995), 1418 (in Chinese) [宋同强、冯健、徐炳振、王文正, *物理学报* **44**(1995), 1418].
- [10] X. X. Yi, C. P. Sun, *Chinese Science Bulletin* **41**(1996), 1165 (in Chinese) [衣学喜、孙昌璞, *科学通报* **41**(1996), 1165].
- [11] B. Schumacher, *Phys. Rev.* **A51**(1995) 2738.
- [12] L. M. Duan, G. C. guo, *Phys. Rev.* **A56**(1997) A466.
- [13] R. Horodecki, M. Horodecki, *Phys. Rev.* **A54**(1996), 1838.
- [14] T. K. Liu, J. S. Wang, X. J. Liu, M. S. Zhan, *Acta Physica Sinica* **48**(1999) 2051 (in Chinese) [刘堂昆、王继锁、柳晓军、詹明生, *物理学报* **48**(1999) 2051].
- [15] T. K. Liu, J. S. Wang, X. J. Liu, M. S. Zhan, *Acta Optica Sinica*, to be published (in Chinese) [刘堂昆、王继锁、柳晓军、詹明生, *光学学报* (待发表)].
- [16] R. Jozsa, *J. Mod. Opt.* **41**(1994) 2315.

INFLUENCE OF ENTANGLED STATES OF ATOMIC DIPOLE-DIPOLE INTERACTION ON THE FIDELITY OF QUANTUM STATES *

LIU TANG-KUN^{a,b,c,d)} WANG JI-SUO^{a,b,d)} LIU XIAO-JUN^{a,b)} ZHAN MING-SHENG^{a)}

^{a)} *State Key Laboratory of Magnetic Resonance ,Atomic and Molecular Physics ,
Wuhan Institute of Physics and Mathematics ,Chinese Academy of Sciences ,Wuhan 430071 ,China)*

^{b)} *Laboratory of Laser Spectroscopy , Anhui Institute of Optics and
Fine Mechanics ,Chinese Academy of Sciences ,Hefei 230031 ,China)*

^{c)} *Department of Physics ,Hubei Normal University ,Huangshi 435002 ,China)*

^{d)} *Department of Physics ,Liancheng Teachers University ,Liaocheng 252059 ,China)*

(Received 4 August 1999)

ABSTRACT

The interaction of a pair of two-level atoms initially in the entangled state with the coherent field is studied. Influence of entangled state of atomic dipole-dipole interaction on the fidelity of quantum states is surveyed. .

PACC : 4250

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 19774069)and the Science Research Foundation of Higher Education of Hubei Province ,China(Grant No. 99A048).