

高 Mach 数格子 Boltzmann 模型的改进

俞慧丹¹⁾²⁾³⁾ 赵凯华²⁾

¹⁾中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室,北京 100080)

²⁾北京大学物理系,北京大学非线性中心,北京 100871)

³⁾浙江师范大学物理系,金华 321004)

(1999 年 10 月 22 日收到)

对文献 [7] 所提出的高 Mach 数格子 Boltzmann 模型作了改进,克服了原模型模拟结果与理论结果偏差较大、存在色散效应的缺陷,并进一步把 Mach 数提高到 5 以上,据我们所知,这是目前同类研究的最好结果.

PACC : 4720N ; 4720 ; 0270 ; 5110

构造高 Mach 数的可压缩格子 Boltzmann 模型是一项有意义但难度比较大的工作. 已有的结果^[1-4]或 Mach 数不够高,或过程太复杂,效果不甚理想,最近孙成海^[5]、阎广武^[6]各自提出了模拟高流速的格子 Boltzmann 模型,并成功地模拟激波现象,但只给出简单的一维模拟.

我们通过在演化方程中引入一个吸引力,建立了一个高 Mach 数格子 Boltzmann 模型^[7]. 此模型操作简单,物理图象清晰,能有效地软化声速,模拟高 Mach 数流动. 我们用来模拟 Mach 锥, Mach 数可达 3 以上,是一个有实际应用价值的模型.

我们在进一步的研究中发现,文献 [7] 的工作有不足之处. 本文对该模型作一点改进. 在文献 [7] 中,每一时间步吸引力引起的动量改变为 $gc_s^2\nabla\rho$, 模拟时将密度梯度离散成

$$\nabla\rho\approx\frac{1}{3}\sum_ae_a[\rho(x+e_a)-\rho(x)].\quad(1)$$

模拟结果是模拟值 c'_s 与理论值 c_s^* 有较大的偏差,原因在于对(1)式作泰勒展开时

$$\begin{aligned}\nabla\rho\approx\frac{1}{3}\sum_ae_a\Big[e_a\cdot\nabla\rho+\frac{1}{2}(e_a\cdot\nabla)^2\rho\\+\frac{1}{3}(e_a\cdot\nabla)^3\rho+\dots\Big],\end{aligned}\quad(2)$$

三阶项的影响不可忽略(二阶项在对 a 求和后为零). 此影响不仅造成 c_s^* 数值上的偏差,而且使声波产生非物理的色散. 为了避免这一缺点,我们把

(1) 式改进为

$$\begin{aligned}\nabla\rho\approx\frac{2}{9}\sum_ae_a\Big\{\rho(x+e_a)-\rho(x-e_a)\\-\frac{1}{8}[\rho(x+2e_a)-\rho(x-2e_a)]\Big\}.\end{aligned}\quad(3)$$

将(2)式中的三阶项消去.

作文献 [7] 相同的模拟,结果如下:

- 1) 图 1, 图 2 为模拟声速 c'_s 与理论有效声速 c_s^* (曲线) 对比, 其中圆点代表原模型模拟声速 c'_s , * 代表改进模型模拟声速 c'_s .
- 2) 图 3 为各种 Mach 数下 Mach 锥的模拟图.
- 3) Mach 数的理论值 M' 与模拟 Mach 数 M^* 的对比由表 1 给出.

在参数 $c_s=0.52$, $g=0.99$, $T=1350$, $A=0.1$ (为声源的振幅) 下, 改变来流速度, 得到各种 Mach 数下的 Mach 锥.

4) 色散的改进

表 2 给出模拟声速随周期 T 的变化情况. c'_s 为改进模型的模拟声速, c''_s 为原模型的模拟声速.

可见改进后模拟值 c'_s 与理论值 c_s^* 的偏差大大地减小了, 也更有效地提高了 Mach 数, 能够模拟 Mach 数超过 5 的流动, 这是目前同类研究的最好结果. 从表 1 看模拟值与理论值非常符合. 原则上讲, 只要使 g 进一步接近, Mach 数还可以进一步提高. 由表 2 可见, 改进后色散效应基本消除了.

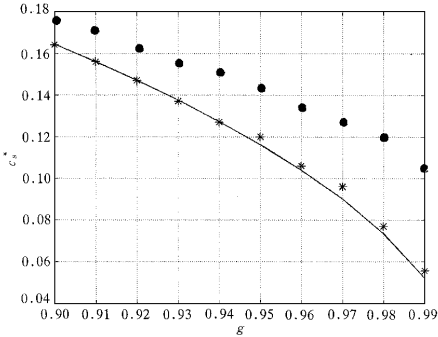


图 1

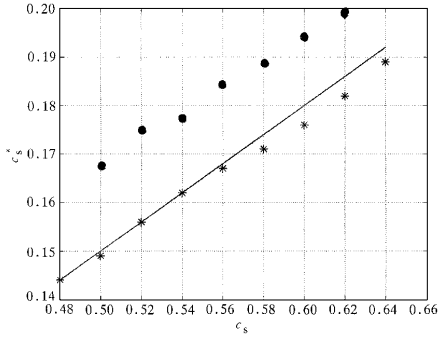


图 2



图 3 Mach 锥模拟

表 1 不同 u_0 下 M' 与 M^* 对比 ($c_s=0.52$, $g=0.99$, $T=1350$, $A=0.1$)

u_0	0.08	0.12	0.16	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28
M'	1.44	2.16	2.88	3.60	3.96	4.32	4.68	5.03
M^*	1.42	2.20	2.89	3.63	4.10	4.35	4.65	5.00

表 2 不同 T 下声速对比 ($g=0.99$, $A=0.1$, $c_s=0.52$, $c_s^*=0.0556$)

T	1750	1650	1550	1450	1350	1250	1150	1050	950
c'_s	0.0554	0.0540	0.0555	0.0545	0.0556	0.0568	0.0565	0.0576	0.0558
c''_s	0.0583	0.0582	0.0584	0.0567	0.0574	0.0580	0.0583	0.0591	0.0611

[1] F.J. Alexander ,H. Chen ,S. Chen , G. D. Doolen. , *Phys. Rev.* , **A46**(1992) ,1967.

[2] S. Chen ,H. Chen , G. D. Doolen *et al.* , *Physica* ,**D47**(1991) , 979.

[3] Y. H. Qian , S. A. Orzag. , *Euro. Phys. Lett.* , **21**(1993) 255.

[4] Y. X. Li ,L. S. Kang , Z. J. Wu , *Neural Parallel and Scientific Computational* ,**1**(1993) 43.

[5] C. H. Sun , *Phys. Rev.* , **E58**(1998) ,7283.

[6] G. W. Yan ,Y. S. Chen , S. X. Hu , *Phys. Rev.* , **E59**(1999) , 454.

[7] H. D. Yu K. H. Zhao , *Acta Physica Sinica* , **48**(1999) ,1470(in Chinese) 俞慧丹、赵凯华 , *物理学报* , **48**(1999) ,1470]

MODIFIED LATTICE BOLTZMANN MODEL FOR HIGH MACH-NUMBER FLOW SIMULATION

YU HUI-DAN^{a,b,c)} ZHAO KAI-HUA^{b)}

^{a)} *State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics ,Institute of Mechanics ,Chinese Academy of Sciences ,Beijing 100080 ,China)*

^{b)} *Department of Physics and Center for Nonlinear Sciences ,Peking University ,Beijing 100871 ,China)*

^{c)} *Department of Physics ,Zhejiang Normal University ,Jinhua 321004 ,China)*

(Received 22 October 1999)

ABSTRACT

We have improved the lattice Boltzmann model for high Mach-number flow simulation presented by the present authors previously and decrease the errors between measurement sound speed and theoretical one greatly and remove the non-physical disperse effect , which existed in the original model. The modified model can simulate flows with Mach number higher than 5 , which is the best result of its kind ever obtained , so far as we know.

PACC : 4720N ; 4720 ; 0270 ; 5110