

# 一种基于系统变量的线性和非线性变换 实现混沌控制的方法\*

罗晓曙<sup>1)</sup> 刘慕仁<sup>1)</sup> 方锦清<sup>2)</sup> 孔令江<sup>1)</sup> 唐国宁<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> 广西师范大学物理与电子科学系 桂林 541004)

<sup>2)</sup> 中国原子能科学研究院 北京 102413)

(1999 年 9 月 7 日收到)

提出了一种通过系统变量的线性和非线性变换实现混沌控制的方法,以 Henon 映象和 Lorenz 系统作为两个典型的例子,验证了这种控制方法的有效性.结果表明,通过改变系统变量之间的线性变换矩阵,可以实现混沌系统中各种不稳定周期轨道的稳定控制.将这种方法推广到非线性(神经网络)变换,可以获得稳定的新的动力学行为.同时,从信息熵的角度,讨论了这种混沌控制方法的物理机制.

PACC: 0545; 4265

## 1 引 言

九十年代兴起的混沌控制与同步,由于具有巨大的应用前景而受到国内外科学工作者的广泛关注,迄今已提出了许多种混沌控制方法<sup>[1-9]</sup>.其中有一大类属于系统变量闭环反馈控制法<sup>[3-5]</sup>,这一类方法比较适用于难以找到一个合适的可调参数的系统如生物系统、化学反应系统、社会经济系统中的混沌控制,因而这种混沌控制方法具有很大的应用潜力.

本文提出的通过系统变量的线性和非线性变换也属于系统变量闭环反馈控制策略,通过调整系统变量之间的线性变换矩阵(关联权值),到达各种控制目标.显然控制参数是一种外部参数,而不是受控系统的参数,因此这种控制方法的一个显著优点是不需要知道系统的模型,因而该法有很好的应用前景.

## 2 控制方法

在信息论中,对于两个平稳的随机序列(矢量) $X, Y$ ,若 $X, Y$ 统计独立,则两序列一定不相关,且其联合熵最大,反之,若 $X, Y$ 相关,则 $X, Y$ 一定统

计不独立,且其联合熵减小.因此,采取措施把原本不相关的两个随机序列变为相关,则其联合熵减小,有序度增加.下面讨论使两个不相关的随机信号矢量变换为相关矢量的方法.

设 $X$ 和 $Y$ 分别是 $N$ 维零均值的随机信号矢量,且它们不相关,即有

$$R_{xy} = E[XY^T] = R_{yx} = E[YX^T] = 0, \quad (1)$$

现对 $X$ 和 $Y$ 分别进行线性变换,得

$$\hat{Y} = H_1 X, \hat{X} = H_2 Y, \quad (2)$$

式中 $H_1, H_2$ 为 $N \times N$ 变换矩阵.构造两个新序列 $X'$ 和 $Y'$ ,且令

$$X' = X + \hat{X}, Y' = Y + \hat{Y}, \quad (3)$$

则两个新随机信号矢量的相关性为

$$R_{x'y'} = E[X'Y'^T] = E[(X + \hat{X})(Y^T + \hat{Y}^T)]. \quad (4)$$

(2)式代入(4)式得

$$R_{x'y'} = E[(X + H_2 Y)(Y^T + (H_1 X)^T)],$$

整理得

$$R_{x'y'} = R_{xx}H_1^T + H_2R_{yy} + R_{xy} + H_2R_{yx}H_1^T. \quad (5)$$

(1)式代入(5)式得

$$R_{x'y'} = R_{xx}H_1^T + H_2R_{yy}. \quad (6)$$

(6)式表明,只要随机信号矢量 $X$ 和 $Y$ 为非白色噪声,则有 $R_{x'y'} > 0$ (至少在一个有限长的时间内),即

\*国家自然科学基金(批准号 9762001)和广西教育厅科学基金(批准号 9816940)资助的课题.

不相关的随机信号矢量通过线性变换后相加( 互联耦合), 可以使两个信号矢量具有相关性. 将这种方法推广到混沌系统中, 由于混沌的内随机性使得系统变量具有片断相关, 通过变量之间的互联耦合( 线性变换), 就可以增强变量之间的关联性, 减少系统变量的联合熵, 从而增强系统的有序性, 再通过不断地反馈, 最后使混沌系统的内随机性消失, 从而得到各种稳定的周期轨道.

为了简化问题的讨论, 考虑二维的混沌动力学系统(  $N$  维系统可以类推). 根据前面的分析, 本文提出的混沌控制方法如图 1 所示.

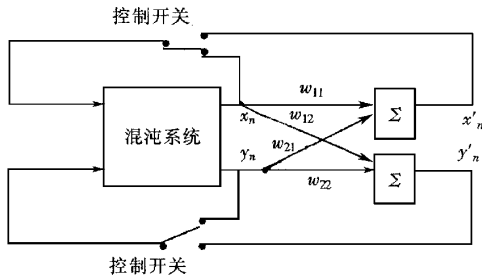


图 1 控制方法原理图

由图可以看出, 新的信号序列和原混沌系统的输出序列存在如下的线性变换,

$$[ X'_n \ Y'_n ]^T = W [ X_n \ Y_n ]^T, \quad (7)$$

式中,  $W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$  为变换矩阵.  $w_{ij}$  为变量之间的互联权值( 关联强度). 不控制时, 变量  $x_n, y_n$  的值反馈回混沌系统, 系统自由演化; 控制时, 变量  $x'_n, y'_n$  反馈回混沌系统, 系统在受控状态下演化.

### 3 数值模拟

下面以两个典型的混沌系统, 即 Henon 映象和 Lorenz 系统为例子, 检验上述混沌控制方法的正确性和有效性.

#### 3.1 Henon 映象

Henon 映象的迭代方程由下式给出,

$$x_{n+1} = p_0 - x_n^2 + 0.3y_n, \quad y_{n+1} = x_n. \quad (8)$$

根据图 1 得到受控后 Henon 映象的迭代方程为

$$\begin{aligned} x'_n &= w_{11}x_n + w_{12}y_n, \\ y'_n &= w_{21}x_n + w_{22}y_n, \\ x_{n+1} &= p_0 - x_n'^2 + 0.3y'_n, \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = x'_n. \quad (9)$$

当  $p_0 = 1.152$  时( 8) 式处于混沌状态<sup>[10]</sup>, 自由迭代 1000 步后开始加入控制, 当互联权值  $w_{ij}$  取不同值时, 得到了系统的  $2^n p$  和  $3 \times 2^n p$  稳定周期轨道及反混沌带序列  $4I$  和  $2I$ , 其中不动点的理论计算值和实际控制值的误差小于  $10^{-14}$ . 计算结果分别如图 2—7 所示.

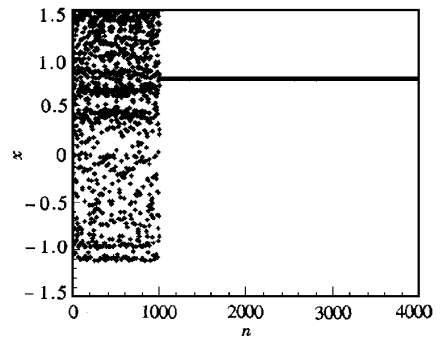


图 2 控制到不动点

$$w_{11} = w_{22} = 0.5, \quad w_{12} = w_{21} = 0.5$$

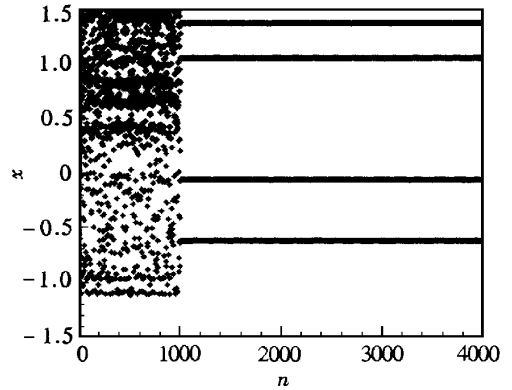


图 3 控制到 4P

$$w_{11} = w_{22} = 0.8, \quad w_{12} = w_{21} = 0.2$$

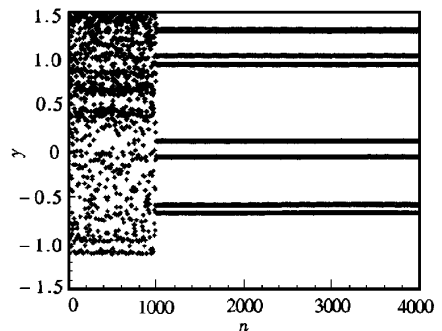


图 4 控制到 8P

$$w_{11} = w_{22} = 0.965, \quad w_{12} = w_{21} = 0.035$$

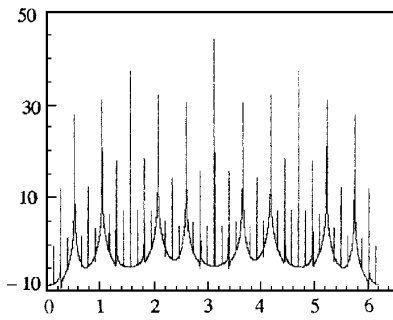


图 5 控制到 48F( 频谱图)

$\omega_{11} = \omega_{22} = 0.97563, \omega_{12} = \omega_{21} = 0.02437$

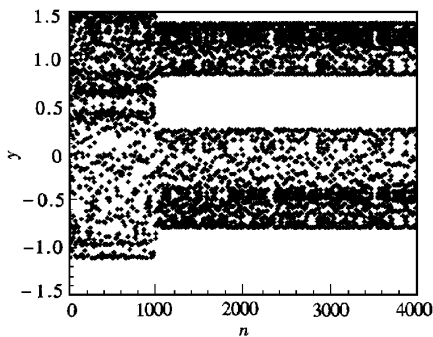


图 6 控制到混沌带倒分岔( 2f )

$\omega_{11} = \omega_{22} = 0.98, \omega_{12} = \omega_{21} = 0.02$

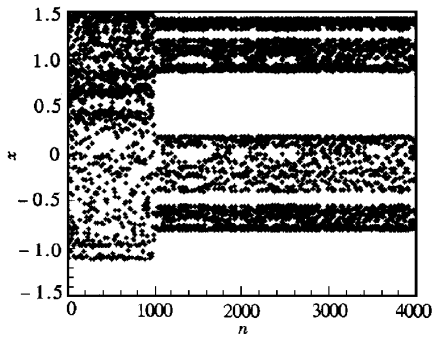


图 7 控制到混沌带倒分岔( 4f )

$\omega_{11} = \omega_{22} = 0.977, \omega_{12} = \omega_{21} = 0.023$

数值模拟结果显示,当  $\omega_{11} + \omega_{12} = 1.0$  和  $\omega_{22} + \omega_{21} = 1.0$  时,控制得到的是混沌系统内的周期轨道,而当  $\omega_{11} + \omega_{12}$  及  $\omega_{22} + \omega_{21}$  略小于 1.0 时,也能实现稳定控制,但控制得到的周期轨道不是原系统内的轨道,而是产生了新的动力学行为.当  $\omega_{11} + \omega_{12} > 1.0$  和  $\omega_{22} + \omega_{21} > 1.0$  时,系统的解出现发散产生溢出.且当  $\omega_{11}$  和  $\omega_{22}$  取值较小时,得到低周

期轨道,当  $\omega_{11}$  和  $\omega_{22}$  取值较大时,得到高周期轨道.

### 3.2 Lorenz 系统

著名的 Lorenz 系统的方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - rz. \end{aligned} \quad (10)$$

用四阶龙格-库塔法求解方程组(10);取  $\sigma = 16.0, \rho = 45.92, r = 4.0$ , 则(10)式有混沌解<sup>[10]</sup>.积分 2000 步后加上图 1 所示的控制,选择控制关系为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (11)$$

得到了系统平衡点的控制结果,如图 8 和图 9 所示.

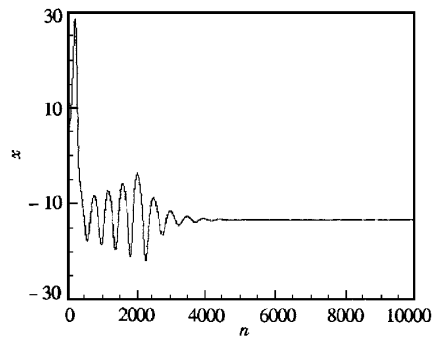


图 8 控制到系统的平衡点  
(变量 x 的时域波形图)

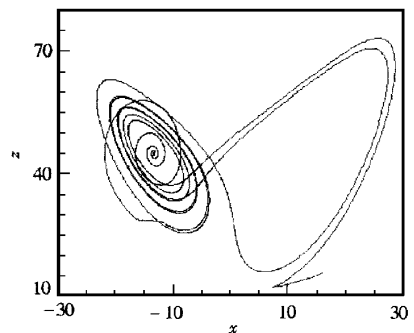


图 9 控制到系统的平衡点  
(变量 x-z 的相图)

现在我们把上述控制方法推广到非线性变换的情形.令

$$\begin{aligned} x'_n &= \Phi(\omega_{11}x_n + \omega_{12}y_n), \\ y'_n &= \Phi(\omega_{21}x_n + \omega_{22}y_n). \end{aligned} \quad (12)$$

若  $\Phi(x)$  取非线性变换函数, 则(12)式代表具有两个神经元的前馈神经网络<sup>[11]</sup>. 取变换函数  $\Phi(x)$  为 S 型的连续函数, 即

$$\Phi(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda x}}. \quad (13)$$

数值模拟结果表明, 互联权系数  $\omega_{ij}$  取不同的值, 非线性变换也可以实现 Henon 映象的混沌控制, 但得到的稳定周期轨道不是混沌系统内的不稳定周期轨道, 而是一种新的动力学行为. 控制结果如图 10 和图 11 所示.

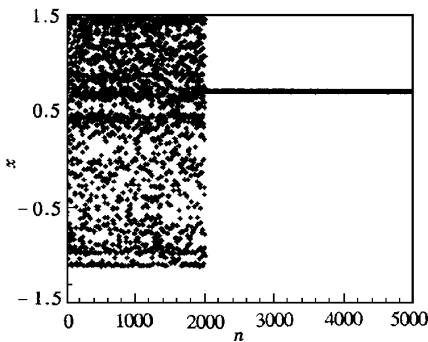


图 10 控制到不动点(1P)  
 $\omega_{11} = \omega_{22} = 0.6, \omega_{21} = \omega_{12} = 0.4$

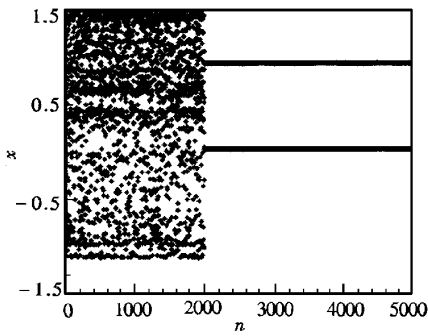


图 11 控制到 2P  
 $\omega_{11} = 2.0, \omega_{22} = -2.0, \omega_{21} = 5.0, \omega_{12} = -5.0$

### 4 控制机理的进一步讨论

在物理学中, 熵描述的是一个系统的无序程度. 在混沌系统中, 为了量度系统的混沌程度, 引入了测度熵的概念. 粗略地讲, 熵反映了混沌系统的伸缩及

折叠过程的平均速率, 或信息产生的平均速率. 对于一组确定的轨道, 混沌时间序列的测度熵与信息论中的信息熵的计算方法是类似的, 由于信息熵比较容易用数值方法得到, 因此我们用信息熵的观点来讨论本文提出的混沌控制方法的物理机制.

对于连续随机信号, 量化后其信息熵(绝对熵)按下式给出<sup>[12]</sup>,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(x) = - \int_a^b f(x) \log f(x) dx + \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \log \frac{1}{\Delta}, \quad (14)$$

式中  $\Delta$  为量化阶, 当  $\Delta \rightarrow 0$  时,  $\log \frac{1}{\Delta}$  为无穷大, 因此连续信源的绝对熵计算失去了意义, 但多数情况下我们是考虑信源经过处理后的信息熵差, 这样只要计算时取相同的量化阶  $\Delta$ , 则  $\log \frac{1}{\Delta}$  这一项将互相抵消. 我们用(14)式计算了 Henon 映象受控制前后序列  $x_n, y_n$  与  $x'_n, y'_n$  的信息熵差, 当取  $\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{21} = \omega_{12} = 0.5$  时, 其信息熵差  $\Delta H(x) = \Delta H(y) = 1.352415$  bit. 应强调指出, 在计算序列  $x_n, y_n$  与  $x'_n, y'_n$  的信息熵差时, 控制开关要断开, 否则系统最终要达到稳定的周期态, 此时  $x_n = kx'_n, y_n = ky'_n$ , 无法反映控制前后混沌信号序列的熵差.

从上述计算结果可以看出, 经线性变换后, 混沌时间序列的信息熵有显著减小. 这说明信号  $x'_n, y'_n$  的有序度比信号  $x_n, y_n$  的有序度高. 若接通控制开关, 通过迭代反馈, 使混沌信号的信息熵不断减少, 最终其信息熵值为零, 系统达到稳定的周期态.

### 5 结 论

本文采用对混沌系统的输出变量进行线性和非线性变换, 成功地实现了对离散混沌系统和连续自治混沌系统的有效控制. 这种控制方法的一个显著优点是可以不必知道系统的动力学方程, 因此该方法适应于难以精确获知动力学模型的系统, 如生物系统、化学反应系统等的混沌控制.

目前多数混沌控制方法的物理机制是改变系统的正 Lyapunov 指数为负值, 从而实现混沌控制. 本文从熵的角度阐明了该控制方法的物理机制, 这对于混沌控制的理论研究具有较重要的意义.

- [ 1 ] E. Ott , C. Grebogi , J. A. York , *Phys. Rev. Lett.* , **64**( 1990 ) , 1196 .
- [ 2 ] K. Pyragas , *Phys. Lett.* , **A170**( 1992 ) A21 .
- [ 3 ] J. Guemez , M. A. Matias , *Phys. Lett.* , **A181**( 1993 ) 29 .
- [ 4 ] Xiao-shu Luo , Lin-jiang Kong , Wan-li Qu , *Acta Physica Sinica* , **47**( 1998 ) , 1078 ( in Chinese ) [ 罗晓曙、孔令江、屈万里 , *物理学报* **47**( 1998 ) , 1078 ] .
- [ 5 ] Xiao-shu Luo , Jin-qing Fang , Wan-lin Qu , *Acta Physica Sinica* , **48**( 1999 ) 402 ( in Chinese ) [ 罗晓曙、方锦清、屈万里 , *物理学报* **48**( 1999 ) 402 ] .
- [ 6 ] B. Lima , M. Pettini , *Phys. Rev. Lett.* , **66**( 1991 ) 2545 .
- [ 7 ] W. L. Ditto , S. N. Rauseo , M. L. Spano , *Phys. Rev. Lett.* , **65**( 1990 ) 3211 .
- [ 8 ] Gang Hu , Kai-fen He , *Phys. Rev. Lett.* , **71**( 1993 ) 3794 .
- [ 9 ] Pei-qian Tong , *Acta Physica Sinica* , **44**( 1995 ) , 169 ( in Chinese ) [ 童培庆 , *物理学报* **44**( 1995 ) , 169 ] .
- [ 10 ] Hu-zhang Wang *et al.* , *The Handbook of modern engineering mathematics* Press of Hua Zhong University of Science and Technology , 1998 , Vol. 3 948—961 .
- [ 11 ] Shou-ren Hu *et al.* , *The application technical of neural network* , p. 82 , Press of National University of Defense Technology , 1993 ( in Chinese ) [ 胡守仁等 , *神经网络应用技术* . 国防科技大学出版社 , 1993 年 2 月 , p. 82 ] .
- [ 12 ] Zhu-yun Fu , *The fundamental of information theory* , p. 156 , Press of electronic industry , 1996 ( in Chinese ) [ 傅祖芸 , *信息论基础* , 电子工业出版社 , 1986 年 4 月 , p. 156 ] .

## A METHOD OF CHAOS CONTROL BASED ON THE LINEAR AND NONLINEAR TRANSFORMATION OF SYSTEM VARIABLES\*

LUO XIAO-SHU<sup>1)</sup> LIU MU-REN<sup>1)</sup> FANG JING-QING<sup>2)</sup> KONG LIN-JIANG<sup>1)</sup> TANG GUO-NING<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> ( Department of Physics and Electronic Science , Guangxi Normal University , Guilin 541004 , China )

<sup>2)</sup> ( China Institute of Atomic Energy , Beijing 102413 , China )

( Received 7 September 1999 )

### ABSTRACT

In this paper a method of chaos control based on the linear and nonlinear transformation of system variables is proposed. The Henon map and Lorenz system are taken as two typical examples to demonstrate the effectiveness of this method. The results show that the UPOs embedded in the chaotic system can be stably controlled by changing the linear transformation matrix of system variables. We can obtain lots of new stable dynamical behavior when this method is extended to nonlinear transformation. At the same time , we discuss the physical mechanism of this chaos control method from point of view of the information entropy.

PACC : 0545 ; 4265

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 9762001 ) and the Science Foundation of Education Bureau of Guangxi Zhuang Autonomous Region ( Grant No. 9816940 ) , China.