第 49 卷 第 5 期 2000 年 5 月
1000-3290/2000/49(05)/0893-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 5, May, 2000

自由电子激光器中的电子阻尼运动

李治宽

（承德民族师范高等专科学校物理系，承德 067000）

（1999 年 5 月 12 日收到；1999 年 11 月 2 日收到修改稿）

建立了有阻尼项的摆方程，在小信号情况下，对方程进行了迭代求解. 由解得的结果得到了增益函数的表达式. 特别对弱阻尼和过阻尼情况进行了计算，分别得到了相应的增益函数简化公式. 对阻尼项的来源和物理意义进行了详细的讨论.

PACC：4255T

1 引　　言

在自由电子激光器（FEL）的经典理论描述中，有单粒子方法[1,2]和动力学方法[3]. 一般说来，经典理论所得的结果能与实验结果较好地符合. 特别单粒子方法，计算起来较为简单，并能得到与实验较为符合的解析结果. 在早期的研究中，其中令人较为满意的工作有 Colson[1] 用单粒子方法推导出的单摆方程及增益表达式，它们分别为

$$\ddot{\zeta} = -\Omega^2 \sin(\zeta(t)) \tag{1}$$

$$G(t) = \frac{4e^4 B_0^2 \rho_e \lambda_0}{(\Delta\omega\gamma_s mc)^3}\left(1 - \cos(\Delta\omega t) - \frac{1}{2}\Delta\omega t \sin(\Delta\omega t)\right). \tag{2}$$

（2）式通常称为小信号增益公式. 它能较好地说明 FEL 的相干辐射，但与激光输出饱和现象相悖，并且不能用于大信号情况[4]. 有关这方面的研究，已有不少成果[5-8].

本文的工作是考虑到 FEL 中，电子与波进行能量交换的这样一个物理系统，电子的运动极为复杂，全面分析电子的运动状态非常重要. 与电子运动状态相关的应该有阻尼，故我们在通常的摆方程中增加了一个阻尼项. 建立了一个有阻尼的电子运动方程，该方程是一个非齐次的一阶线性微分方程，用常数变易法得到了方程的解. 并计算出了新的增益函数表达式. 所用的迭代方法是参照了布鲁克海汶实验室的 Yu 教授的‘高增益 FEL 理论讲义’. 为了便于比较，本文也采用了该讲义中的符号. 下面先简述无阻尼情况下的已有结果，然后再叙述我们建立的有阻尼情况下方程的计算结果. 并分别对弱阻尼和过阻尼情况进行了讨论，由弱阻尼情况下的简化公式，可清晰地看出阻尼对增益函数的影响. 其实，无阻尼的保守系统只是一种抽象模型，实际的物理系统总是存在阻尼. 具体到 FEL 这样一个物理系统，我们认为阻尼主要来自电子束的集体效应，并与 Wiggler 场的随机涨落有关. 为此，对阻尼的来源和物理意义进行了详细讨论.

2 电子运动方程及增益函数公式

根据 KMR 理论[2]，并经过适当简化处理，电子的能量 γ 和位相 θ 满足以下方程组：

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{-k_s a_s a_w}{\gamma_0}\sin(\theta + \phi_s), \tag{3}$$

$$\frac{d\theta}{dz} = 2k_w \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0}, \tag{4}$$

其中 $a_s = \frac{eA_{s0}}{mc}$，$a_w = K = \frac{eA_w}{mc}$，$A_{s0}$ 和 k_s 分别是光场的矢势的幅值和波数，a_w 和 k_w 是摇摆器磁场的幅值和波数. $\theta = (k_s + k_w)z - \omega_s t$，$\phi_s$ 和 ω_s 分别是光场的位相和频率. 以上方程组的简化过程中，用了条件：$\lambda_s = \frac{\lambda_w}{2\gamma_0^2}(1 + k^2)$；$|\gamma - \gamma_0| \ll \gamma_0$；$\gamma \approx \gamma_0$. 对于小增益情况，$a_s$ 和 ϕ_s 与 z 无关，并设 $\phi = \theta + \phi_s$，$\tau = k_w z$，$\eta = 2\frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0}$，$\Omega_s^2 = 2\frac{k_s}{k_w}\frac{a_s a_w}{\gamma_0^2}$，这时方程组（3），（4）变为

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \eta, \tag{5}$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -\Omega_s^2 \sin\phi. \tag{6}$$

方程组(5),(6)就是无阻尼,无驱动力情况下的摆方程. 考虑到小信号,引入初始能量失调因子 η_0,并进一步设 $x=\eta_0\tau$; $\varepsilon=\frac{\eta}{\eta_0}$; $\mu=\frac{\Omega_s^2}{\eta_0^2}$, (5),(6)式变为

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}=\varepsilon, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}x}=-\mu\sin\phi. \tag{8}$$

(7),(8)式可用迭代法求解. 利用初始条件,当 $x=0$ 时,$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}=\varepsilon\approx\varepsilon_0=\frac{\eta_0}{\eta_0}=1$,可得到下列解:

$$\phi_1=\int_0^x\varepsilon_0\mathrm{d}x'=x, \tag{9}$$

$$\varepsilon_1=\mu[\cos(x+\phi_0)-\cos\phi_0], \tag{10}$$

$$\phi_2=\mu[\sin(x+\phi_0)-x\cos\phi_0-\sin\phi_0], \tag{11}$$

$$\varepsilon_2=\mu^2\cos\phi_0[x\sin(x+\phi_0)+\cos(x+\phi_0)-\cos\phi_0]+\mu^2\sin\phi_0[\sin(x+\phi_0)-\sin\phi_0]. \tag{12}$$

$$\phi=\phi_0+\phi_1+\phi_2, \tag{13}$$

$$\varepsilon=\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2. \tag{14}$$

在 ϕ_0 范围内,对 ε 求平均得 $<\varepsilon>=<\varepsilon_0>+<\varepsilon_1>+<\varepsilon_2>$,显然,

$$<\varepsilon_1>=0, \tag{15}$$

$$<\varepsilon_2>=\mu^2\left(\cos x-1+\frac{1}{2}x\sin x\right), \tag{16}$$

$$<\varepsilon>=<\varepsilon_0>+\mu^2x^3f(x), \tag{17}$$

$$f(x)=\frac{1}{x^3}\left(\cos x-1+\frac{1}{2}x\sin x\right). \tag{18}$$

(18)式就是熟知的增益函数表达式.

3 电子的阻尼运动方程及其解

考虑到与电子运动状态相关的阻尼效应后,摆方程中增加了阻尼项,这时(7),(8)式变为

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}=\varepsilon, \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}x}=-\mu\sin\phi-\beta\varepsilon, \tag{20}$$

式中 β 为无量纲的阻尼系数. 与(7),(8)式相似,(19),(20)式仍可用迭代法求解,并用同样的初始条件解得

$$\phi_1=\int_0^x\varepsilon_0\mathrm{d}x'=x, \tag{21}$$

ε_1 满足下列方程:

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_1}{\mathrm{d}x}+\beta\varepsilon_1=-\mu\sin(x+\phi_0)-\beta. \tag{22}$$

(22)式是非齐次的一阶线性微分方程,可用常数变易法进行求解,解得的结果是

$$\varepsilon_1=\frac{-\mu}{1+\beta^2}\left[\beta\sin(x+\phi_0)-\cos(x+\phi_0)+\frac{1+\beta^2}{\mu}\right]+\left[1+\frac{\mu(\beta\sin\phi_0-\cos\phi_0)}{1+\beta^2}\right]\mathrm{e}^{-\beta x}, \tag{23}$$

$$\phi_2=\int_0^x\varepsilon_1(x')\mathrm{d}x'=-\frac{\mu}{1+\beta^2}\left[-\beta\cos(x+\phi_0)-\sin(x+\phi_0)+\beta\cos\phi_0+\sin\phi_0+\frac{1+\beta^2}{\mu}x\right]+\left[1+\frac{\mu(\beta\sin\phi_0-\cos\phi_0)}{1+\beta^2}\right]\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\beta x}}{\beta}\right). \tag{24}$$

ε_2 满足下列方程:

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_2}{\mathrm{d}x}+\beta\varepsilon_2=-\mu\cos(x+\phi_0)\phi_2, \tag{25}$$

(25)式用常数变易法解得的结果是

$$\begin{aligned}\varepsilon_2=&-\frac{\mu^2}{(1+\beta^2)(4+\beta^2)}[3\beta\cos(x+\phi_0)\sin(x+\phi_0)\\&+\beta^2\cos^2(x+\phi_0)+2\sin^2(x+\phi_0)+1]\\&+\frac{\mu^2}{(1+\beta^2)^2}(\beta\cos\phi_0+\sin\phi_0)\\&\cdot[\beta\cos(x+\phi_0)+\sin(x+\phi_0)]\\&+\frac{\mu}{1+\beta}\{(1+\beta x+\beta\phi_0)\cos(x+\phi_0)\\&+(x-\beta+\phi_0)\sin(x+\phi_0)\\&+\frac{1}{1+\beta^2}[(\beta^2-\beta-\beta\phi_0-\phi_0)\sin(x+\phi_0)\\&-\beta(\beta+1+\beta\phi_0+\phi_0)\cos(x+\phi_0)]\}\\&-\frac{\mu}{\beta}\left[1+\frac{\mu(\beta\sin\phi_0-\cos\phi_0)}{1+\beta^2}\right]\\&\cdot\left[\frac{\beta\cos(x+\phi_0)+\sin(x+\phi_0)}{1+\beta^2}\right.\\&\left.-\mathrm{e}^{-\beta x}\sin(x+\phi_0)\right]+\left\{\frac{\mu^2}{(1+\beta^2)(4+\beta^2)}\right.\\&\cdot[3\beta\cos\phi_0\sin\phi_0+\beta^2\cos^2\phi_0+2\sin^2\phi_0+1]\\&-\frac{\mu^2}{(1+\beta^2)^2}(\beta\cos\phi_0+\sin\phi_0)^2\\&-\frac{\mu}{1+\beta}\Big[(1+\beta\phi_0)\cos\phi_0+(\phi_0-\beta)\sin\phi_0\\&+\frac{1}{1+\beta^2}\Big((\beta^2-\beta-\beta\phi_0-\phi_0)\sin\phi_0\\&-\beta(\beta+1+\beta\phi_0+\phi_0)\cos\phi_0\Big)\Big]\\&+\frac{\mu}{\beta}\left[1+\frac{\mu(\beta\sin\phi_0-\cos\phi_0)}{1+\beta^2}\right]\end{aligned}$$

$$\cdot\left[\frac{\beta\cos\phi_0+\sin\phi_0}{1+\beta^2}-\sin\phi_0\right]\Bigg\}\mathrm{e}^{-\beta x}, \tag{26}$$

$$\langle\varepsilon_1\rangle=\mathrm{e}^{-\beta x}-1, \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\langle\varepsilon_2\rangle=&-\frac{\mu^2}{2(1+\beta^2)(4+\beta^2)}[\beta^2(\cos^2x-\sin^2x)+4]\\&+\frac{\mu^2}{2(1+\beta^2)}\cos x+\frac{\mu}{1+\beta}(\beta\sin x-\cos x)\\&+\frac{\mu}{1+\beta^2}(\cos x-\beta\sin x)\\&+\frac{\mu^2}{2\beta(1+\beta^2)}[\sin x+(\beta\cos x-\sin x)\mathrm{e}^{-\beta x}]\\&+\left[\frac{\mu^2}{(1+\beta^2)(4+\beta^2)}\left(2+\frac{\beta^2}{2}\right)-\frac{\mu^2}{1+\beta^2}\right.\\&\left.-\frac{\mu\beta(1-\beta)}{(1+\beta)(1+\beta^2)}\right]\mathrm{e}^{-\beta x},\end{aligned} \tag{28}$$

$$\langle\varepsilon\rangle=\langle\varepsilon_0\rangle+\mu^2x^3f(x), \tag{29}$$

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{1}{x^3}\Bigg\{-\frac{1}{2(1+\beta^2)(4+\beta^2)}[\beta^2(\cos^2x-\sin^2x)+4]\\&+\frac{1}{2(1+\beta^2)}\cos x+\frac{1}{\mu(1+\beta)}(\beta\sin x-\cos x)\\&+\frac{1}{\mu(1+\beta^2)}(\cos x-\beta\sin x)\\&+\frac{1}{2\beta(1+\beta^2)}[\sin x+(\beta\cos x-\sin x)\\&\cdot\mathrm{e}^{-\beta x}]-\frac{1}{\mu^2}+\left[\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{2(1+\beta^2)}\right.\\&\left.-\frac{\beta(1-\beta)}{\mu(1+\beta)(1+\beta^2)}\right]\mathrm{e}^{-\beta x}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{30}$$

4　讨　　论

1. 弱阻尼情况，设 $\beta\ll1$，这时(30)式简化为

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{1}{x^3}\left[\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\beta x}-1)+\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-\beta x})\cos x\right.\\&\left.+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{\mu^2}(\mathrm{e}^{-\beta x}-1)-\left(1+\frac{\beta}{\mu}\right)\mathrm{e}^{-\beta x}\right],\end{aligned} \tag{31}$$

从(31)式已可明显地看出阻尼对增益函数的影响. 为了更直接地进行比较，不妨进一步简化(31)式，将小括弧内的 $\mathrm{e}^{-\beta x}$ 取做 1，这时(31)式变为

$$f(x)=\frac{1}{x^3}\left[\cos x+\frac{1}{2}x\sin x-\left(1+\frac{\beta}{\mu}\right)\mathrm{e}^{-\beta x}\right], \tag{32}$$

由(32)式可清晰地看出阻尼对增益函数的影响及其与 FEL 中的某些参量的关系. 若 $\mu\gg\beta$，(32)式变为

$$f(x)=\frac{1}{x^3}\left[\cos x+\frac{1}{2}x\sin x-\mathrm{e}^{-\beta x}\right], \tag{33}$$

这时，(33)式已与(18)式非常接近，从中可看到阻尼的影响.

2. 过阻尼情况，设 $\beta\gg1$，当只保留 β 的负一次项时，(30)式可简化为

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{1}{\mu x^3}\left[\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\sin x-\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\beta}\cos x\right)\right.\\&\left.+\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\beta}\right)\mathrm{e}^{-\beta x}\right].\end{aligned} \tag{34}$$

若不保留 β 的负一次项，(34)式进一步简化为

$$f(x)=\frac{1}{\mu x^3}\left[\sin x-\frac{1}{\mu}(1-\mathrm{e}^{-\beta x})\right]. \tag{35}$$

3. 当 $\beta=1$ 时，(30)式变为

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{1}{x^3}\left[-\frac{1}{20}(\cos^2x-\sin^2x+4)\right.\\&+\frac{1}{4}(\cos x+\sin x)-\frac{1}{\mu^2}\\&\left.+\frac{1}{4}\left(\cos x-\sin x-1+\frac{4}{\mu^2}\right)\mathrm{e}^{-x}\right].\end{aligned} \tag{36}$$

4. 我们认为阻尼来自集体效应；来自 Wiggler 场的误差. 按照文献[9]，FEL 的集体效应可分为两类，一是空间电荷；二是自电场和自磁场. 集体效应会降低束波相互作用，改变增益和效率[10]. 在文献[11]和[12]中，是在一维单电子理论中，考虑了空间电荷场的影响，在摆方程中加进了空间电荷项. 在文献[11]中所建立的方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Delta z(t)=a\cos[\Omega t-\beta\Delta z(t)+\phi]+\frac{eE_z^{(c)}}{m\gamma^3}. \tag{37}$$

在 z 方向的空间电荷场为

$$E_z^{(c)}(z,t)=-\frac{eN_0}{\varepsilon_0}[\Delta z(\phi,t)-\langle\Delta z(\phi,t)\rangle_\phi]. \tag{38}$$

在文献[12]中所建立的方程是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z}=&-\frac{\omega_s}{\gamma c}a_wa_s\sin(\theta+\phi_s)\\&-\frac{eE_z^{(c)}}{mc^2},\end{aligned} \tag{39}$$

$$E_z^{(c)}=\frac{2Z_0I}{k_w+k_s}\sum_{l=1}^{x}f_l\frac{\langle\sin l\psi\rangle\cos l\psi-\langle\cos l\psi\rangle\sin l\psi}{l}, \tag{40}$$

式中 f_l 是空间电荷填充因子.

如果本文所建立的方程(20)中的阻尼项只考虑空间电荷的作用，从(20)式与(39)式的简单对比，可

得到(20)式中的阻尼系数 β 的表达式为

$$\beta=\frac{2eE_z^{(c)}}{mc^2k_w\gamma_0\eta_0\eta}. \tag{41}$$

是否考虑空间电荷效应,有所谓 Raman 判据[9]

$$\frac{\omega_b}{\gamma_0^{\frac{1}{2}}ck_w}\gg\frac{\gamma_z^3v_w^2}{16c^2}. \tag{42}$$

但是三维效应改变了有质动力波与空间电荷之间的关系,除要考虑(42)式外,还要考虑 Raman 漂移和 Landau 阻尼. 若空间电荷波长小于 Debye 长度时, Landau 阻尼就变得很重要. 例如在文献[13]的实验中,$\frac{\omega_b}{\gamma_0^{1/2}ck_w}=0.25$,$\frac{\gamma_z^3v_w^2}{16c^2}=0.040$,满足不等式(42),但是其 Debye 长度约 0.09 cm 空间电荷波长约 0.06 cm,这时空间电荷波被阻尼,可不考虑 Raman 效应. 在文献[14]的实验中,$\frac{\omega_b}{\gamma_0^{1/2}ck_w}=0.25$,$\frac{\gamma_z^3v_w^2}{16c^2}=0.005$,满足不等式(42),其 Debye 长度约 0.14 cm,空间电荷波长 0.8 cm,Landau 阻尼不重要,应考虑空间电荷波的作用.

5. 自电场可由 Poisson 's 方程解得

$$E^{(s)}=-\frac{m}{2e}\omega_b^2\gamma\hat{e}_\gamma. \tag{43}$$

自磁场可由 Ampere 's 定律解得

$$B^{(s)}=-\frac{m}{2e}\omega_b^2\beta_z\gamma\hat{e}_\theta. \tag{44}$$

为叙述简便,以下统称为 DC 自场,对于平面 Wiggler 场的 FEL,在不考虑 DC 自场时,当轴向能散 $\Delta\gamma_z/\gamma_0$ 由零增到 2% 时,效率由 7.12% 降到 6.35%,当考虑 DC 自场时,当 $\Delta\gamma_z/\gamma_0=1.5\%$ 时,效率下降到 2% 以下[9]. 由此看出,由于 DC 自场的存在,使效率与能散的关系更加敏感. 再者,DC 自场对束流截面的形状及传输都有影响[15].

6. Wiggler 磁体的制造和安装公差,磁场的涨落和随机误差对束流轴向能散,对 FEL 的效率都有影响[16]. 文献[9]中有如下的关系:

$$\frac{\Delta v_z}{v_z}=-\left(\frac{v_w}{v_z}\right)\frac{\Delta B_w}{B_w}, \tag{45}$$

式中 ΔB_w 是 Wiggler 场的涨落,Δv_z 是电子的轴向速度的变化,v_w 是 Wiggler 的横向速度,有关这方面的问题,文献[9]中有较全面的叙述,这里不再重述.

7. 按照非线性动力学的观点,有阻尼项的摆方程,存在"吸引子(attractor)". 反映在相图上是从一个异宿点出发的轨线发生形变,不再通过另一异宿点. 分界线(separatrix)把相平面分隔成一个个区域,轨线都流向该区中心的吸引子,这是通向混沌的途径之一. 文献[17,18]研究了理想的螺旋 Wiggler FEL 中,在轴向速度是常数的自电场的作用下,产生混沌的问题. 混沌可降低 FEL 的效率,并影响光束的品质. 有关这方面的问题,宜专文论述.

清华大学林郁正教授的热情帮助,并提供 L.H.Yu 教授的讲义 斯坦福大学 SLAC 的 DAVID 教授多次友好寄赠有关资料 审稿人提出的中肯意见并具体指出文献[5],使本工作能更深入一步 国家图书馆科技咨询室的同志,在炎热的夏天,从馆内到馆外及时寻找有关文献. 对他们的大力支持表示感谢. 该工作得到本校科研资金部分资助.

[1] W.B.Colson, *Phys. Lett.*, **A64**(2)(1977),190.
[2] N.M.Kroll, P.L.Morton, M.N.Rosenbluth, *IEEE J.*, **QE-17**(8),(1981),1436.
[3] P.Sprangle, R.A.Smith, *Phys. Rev.*, **A2**(1980),293.
[4] D.H.Zhao, *Acta Physica Sinica*, **43**(1994),1447(in Chinese) [赵东焕,物理学报,**43**(1994),1447].
[5] V.Kumar, S.Krishnagopal, *Phys. Rev.*, **E55**(1997),1887.
[6] G. Dattoli, S. Cabrini, L. Giannessi, *Phys. Rev.*, **A44**(1991),8433.
[7] G.Dattoli, L.Giannessi, A. torre, *Phys, Rev.*, **E48**(1993), 1401.
[8] G.Dattoli, M. Gali, L. Giannessi, P. L. Ottaviani, A. Torre, *IEEE J. Quantum Elec.*, **30**(1994),1283.
[9] H.P. Freund, T. M. Antonsen-Jr, Principles of Free-Electron lasers, (Printed in Great Britain by Hartnolls Ltd. Bodmin, Cornwall) Second edition (1996),chapter 14 and 12.
[10] H.P.Freund, *Nucl. Instr. Meth.*, **A331**(1993),496.
[11] C.C.Shih, A.Yariv, *Phys. Rev.*, **A22**(1980),2717.
[12] T.M.Tran, J.S.Wuriele, *Physics Reports* 195, 1-21 North-Holland No. 1 (1990),p.6—8.
[13] D. A. Kirkpatrick, G. Bekefi , *et al.*, *Phys. Fluids*, **B1**(1989),1511.
[14] M.E.Conde, G.Bekefi, *Phys. Rev.*, *Lett.*, **67**(1991), 3082.
[15] H.P.Freund, R.H.Jackson, D.E.Pershing, *Phys. Fluids*, **B5**(1993),2318.
[16] L.H.Yu, S.Krinsky ,*et al.*, *Phys Rev.*, **A45**(1992),1163.
[17] C.Chen, R.C.Davidson, *Phys Rev.*, **A43**(1991),5541.
[18] L.Michel, A.Bourdier, J.M.Buzzi, *Nucl. Instr. Meth.*, **A304**(1991),465.

DAMPED MOTION OF AN ELECTRON IN FREE-ELECTRON LASER

LI ZHI-KUAN
(*Department of Physics*, *Chengde Teachers College of Nationalities*, *Chengde* 067000, *China*)

(Received 12 May 1999 ; revised manuscript received 2 November 1999)

ABSTRACT

In this paper a simple pendulum equation with damping term is found for a free-electron laser. The equation is solved by using iteration in small signal regime and the formula of the gain function obtained corresponds to the iteration solution. Particularly, the simplified formulae are also derived of the gain function in both weak damping and overdamping regimes in free-electron lasers, and the origin and the physical meaning of the damping term in the simple pendulum equation are discussed in detail.

PACC: 4255T