第 49 卷 第 5 期 2000 年 5 月
1000-3290/2000/49(05)/0965-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 5, May, 2000

压缩真空态下介观 *RLC* 电路中电荷和电流的量子涨落

顾永建

(昌潍师专物理系，山东潍坊 261043)

(1999 年 11 月 6 日收到)

发展了一种有源 RLC 电路的量子力学处理方案，在此基础上研究了压缩真空态下介观 RLC 电路中电荷和电流的量子涨落，着重研究了电阻和压缩参数对量子涨落的影响.

PACC：7335

1 引 言

随着纳米技术和纳米电子学的发展，器件及电路日益小型化，现已达原子尺寸的量级[1]. 70 年代 Louisell[2] 讨论了 LC 电路的量子力学效应，近年来由于介观物理研究的深入，关于介观电路量子效应的研究逐渐成为热点，这些研究将从原理上为微小电路的设计奠定基础. 近来崔元顺[3] 给出了介观 LC 电路在真空态和压缩真空态下电压、电流的量子涨落的正确结果，更普遍的 RLC 电路对应着力学上的阻尼谐振子，其量子力学处理存在着一些困难. Dekker[4] 曾提出一种单位质量阻尼谐振子的量子化方案，陈斌等[5] 借鉴这一方案研究了真空态下介观 RLC 电路中电荷、电流的量子涨落，但导致了至少在量纲上不合理的结论. 关于压缩真空态下介观电路量子涨落的研究最先由王继锁等[6] 从 LC 电路开始，但由于沿用了上述量子化方案其结论同样值得商榷. 本文借鉴彭桓武[7] 的阻尼谐振子的量子力学处理方案，将其发展到有源 RLC 电路，研究压缩真空态下介观 RLC 电路中电荷和电流的量子涨落.

2 有源 *RLC* 电路的量子力学处理

有源 RLC 电路的运动方程为

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) = \frac{\varepsilon(t)}{L}, \tag{1}$$

其中 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$，$q(t)$ 和 $\dot{q}(t) = j(t)$ 分别是电荷和电流. 令 $p = L\dot{q}$，则 (1) 式表示的运动方程可用 q，p 表示为

$$\dot{q} = p/L, \tag{2}$$

$$\dot{p} = -\frac{R}{L}p - \frac{1}{C}q + \varepsilon(t). \tag{3}$$

由 (2)，(3) 式易得

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = -\frac{R}{L}. \tag{4}$$

(4) 式表明，由于电路中存在电阻 R，q，p 在经典力学中不再构成正则共轭变量. 设想电阻 R 是在 $t=0$ 时突然接入的，即在 $t \leqslant 0$ 时 q，p 构成正则共轭变量，$t>0$ 时，考虑非正则变量 q，p 到正则共轭变量 u，v 的变换

$$q = u\mathrm{e}^{-Rt/2L}, \tag{5}$$

$$p = \left(v - \frac{R}{2}u\right)\mathrm{e}^{-Rt/2L}, \tag{6}$$

文献[7] 称 (5)，(6) 式为正则化变换. 该式将 (2)，(3) 式表示的运动方程变换为

$$\dot{u} = v/L, \tag{7}$$

$$\dot{v} = -\left(\frac{1}{C} - \frac{R^2}{4L}\right)u + \varepsilon(t)\mathrm{e}^{Rt/2L}. \tag{8}$$

考虑弱阻尼 $\left(\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}\right)$ 的情况，令

$$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \omega^2 \qquad (\omega \text{ 为正数}), \tag{9}$$

即 $\omega_0^2 - \lambda^2 = \omega^2$，$\lambda = \frac{R}{2L}$，则 (8) 式可写成

$$\dot{v} = -L\omega^2 u + \varepsilon(t)\mathrm{e}^{Rt/2L}. \tag{10}$$

(7)，(8) 式形式上可看作一个电荷、电流分别为 u，$\dot{u}$，振荡频率为 ω，电源电动势为 $\varepsilon(t)\mathrm{e}^{Rt/2L}$ 的有源 "LC 电路" 的运动方程，但 $\omega \neq (LC)^{1/2}$ 而由 (9) 式决定. 所以正则化变换式 (5)，(6) 式将一个有源 RLC 电路变换为一个有源 LC 电路，将非正则变量

q, p 变换为正则共轭变量 u, v.

引入复正则电荷和电流

$$Q = \sqrt{\frac{L}{\omega}}\left(\omega u + \mathrm{i}\frac{v}{L}\right), \tag{11}$$

$$P = \frac{\mathrm{i}}{2}Q^* = \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{L}{\omega}}\left(\omega u - \mathrm{i}\frac{v}{L}\right), \tag{12}$$

其相应的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2L}v^2 + \frac{1}{2}L\omega^2 u^2 - u\varepsilon(t)\mathrm{e}^{Rt/2L} \\ &= -\mathrm{i}\omega PQ + \mathrm{i}Pf(t) - \frac{1}{2}Qf(t), \end{aligned} \tag{13}$$

式中 $f(t) = (\omega L)^{-1/2}\varepsilon(t)\mathrm{e}^{Rt/2L}$. 容易验证,(7),(8)式为正则方程 $\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P}, \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q}$的结果.

为进行量子力学处理,将 Q, P 看作算符并令 $[Q, P] = \mathrm{i}\hbar$. 解薛定谔方程求得波函数 $\psi = \psi(u, t)$后,对于任何物理量,可通过正则化变换以正则变量表示之,再利用波函数计算其统计平均值,如

$$\bar{q}(t) = \frac{\int \psi^*(u,t)\, u\mathrm{e}^{-Rt/2L}\psi(u,t)\mathrm{d}u}{\int \psi^*(u,t)\psi(u,t)\mathrm{d}u}.$$

进一步引入推广的升降算符

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}Q = \sqrt{\frac{L}{2\hbar\omega}}\left(\omega u + \mathrm{i}\frac{v}{L}\right), \tag{14}$$

$$a^* = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\hbar}}P = \sqrt{\frac{L}{2\hbar\omega}}\left(\omega u - \mathrm{i}\frac{v}{L}\right), \tag{15}$$

则哈密顿量(13)式可写成

$$H = \hbar\omega a^* a + \frac{1}{2}\hbar\omega - \sqrt{\frac{\hbar}{2}}f(t)(a^* + a). \tag{16}$$

由$[Q, P] = \mathrm{i}\hbar$,可得$[a, a^*] = 1$. 利用$[a, a^*] = 1$,不难定义真空态$|0\rangle$,借助压缩算符 $S(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}\xi^* a^2 - \frac{1}{2}\xi a^{*2}\right)$不难定义压缩真空态$|0\rangle_s = S(\xi)|0\rangle$,其中 $\xi = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,$r$ 为压缩因子($0 \leqslant r < \infty$),θ 为压缩角.

由(5),(6),(11),(12)式不难得出

$$[q, j] = \frac{\mathrm{i}\hbar}{L}\mathrm{e}^{-Rt/L}, \tag{17}$$

该式即电荷、电流的对易关系. 当 $R = 0$ 时,(17)式还原为 LC 电路的正常的正则对易关系[3]. 可以看出,当存在电阻 R 时,量子效应是随时间衰减的,下面证明这在物理上的合理性. 在海森堡表象中,运动方程(2),(3)形式不变,但 q, p 理解为非对易量,则由(2),(3)式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(qp - pq) = -\frac{R}{L}(qp - pq). \tag{18}$$

(17)式表示的对易关系满足(18)式,因而与运动方程(2),(3)相容.

3 压缩真空态下电荷、电流的量子涨落

未接电源时,(16)式中 $f(t) = 0$,设此时电路处在压缩真空态$|0\rangle_s$,该态在粒子数表象中可表示为[8]

$$|0\rangle_s = \mathrm{sech}^{1/2} r \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{th}r)^n[(2n)!]^{1/2}}{n!2^n}|2n\rangle. \tag{19}$$

由(5),(6),(14),(15)式得

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2L\omega}}\mathrm{e}^{-Rt/2L}(a^* + a), \tag{20}$$

$$p = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar L\omega}{2}}\mathrm{e}^{-Rt/2L}(a^* - a) - \frac{R}{2}q, \tag{21}$$

$$q^2 = \frac{\hbar}{2L\omega}\mathrm{e}^{-Rt/L}(a^{*2} + a^2 + 2a^* a + 1), \tag{22}$$

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{\hbar L\omega}{2}\mathrm{e}^{-Rt/L}(-a^{*2} - a^2 + 2a^* a + 1) \\ &\quad + \frac{R^2}{4}q^2 - \mathrm{i}\frac{\hbar R}{2}\mathrm{e}^{-Rt/L}(a^{*2} - a^2). \end{aligned} \tag{23}$$

利用(20)—(23)式并利用 $\dot{q} = p/L = j$ 可计算出

$${}_s\langle 0|q|0\rangle_s = 0, \tag{24}$$

$${}_s\langle 0|j|0\rangle_s = 0, \tag{25}$$

$$\begin{aligned} {}_s\langle 0|q^2|0\rangle_s &= \frac{\hbar}{2L\omega}\mathrm{e}^{-Rt/L}\mathrm{sech}r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{th}^{2n}r(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \\ &\quad \cdot [4n + 1 - 2(2n+1)\mathrm{th}r\cos\theta], \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} {}_s\langle 0|j^2|0\rangle_s &= \mathrm{e}^{-Rt/L}\mathrm{sech}r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{th}^{2n}r(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \\ &\quad \cdot \Big[(4n+1)\frac{\hbar\omega_0^2}{2L\omega} + 2(2n+1)\mathrm{th}r \\ &\quad \cdot \left(\frac{\hbar\omega}{L}\cos\theta - \frac{\hbar\omega_0^2}{2L\omega}\cos\theta + \frac{\hbar R}{2L^2}\sin\theta\right)\Big]. \end{aligned} \tag{27}$$

可见,在压缩真空态下,RLC 电路中的电荷、电流均存在量子涨落,其量子涨落之积为

$$\overline{(\Delta q)^2}\cdot\overline{(\Delta j)^2}=\frac{\hbar}{2L\omega}e^{-2Rt/L}\mathrm{sech}^2 r\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{th}^{2n}r(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}\cdot[4n+1-2(2n+1)\mathrm{th}r\cos\theta]\right\}\cdot\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{th}^{2n}r(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}\left[(4n+1)\frac{\hbar\omega_0^2}{2L\omega}+2(2n+1)\mathrm{th}r\left(\frac{\hbar\omega}{L}\cos\theta-\frac{\hbar\omega_0^2}{2L\omega}\cos\theta++\frac{\hbar R}{2L^2}\sin\theta\right)\right]\right\}. \quad (28)$$

这表明,电荷、电流的量子涨落及两者之积与电路元件参数 R,L,C 和压缩参数 r,θ 均有关系.因而可通过适当的参数选择来降低所需电学量的量子噪声.从上面的结果还可看出,量子效应是随时间衰减的,这是电路中存在阻尼(有电阻)的结果.如前所述,这在物理上是合理的.

当压缩因子 $r=0$ 时,由(24)–(28)式可得真空态下介观 RLC 电路的量子涨落为

$$\overline{(\Delta q)^2}=\frac{\hbar}{2L\omega}e^{-Rt/L}, \quad (29)$$

$$\overline{(\Delta j)^2}=\frac{\hbar\omega_0^2}{2L\omega}e^{-Rt/L}, \quad (30)$$

$$\overline{(\Delta q)^2}\cdot\overline{(\Delta j)^2}=\frac{\hbar^2\omega_0^2}{4L^2\omega^2}e^{-2Rt/L}. \quad (31)$$

若进一步令 $R=0$,则得真空态下介观 LC 电路的以下关系

$$\overline{(\Delta q)^2}=\frac{\hbar}{2L\omega_0}, \quad (32)$$

$$\overline{(\Delta j)^2}=\frac{\hbar\omega_0}{2L}, \quad (33)$$

$$\overline{(\Delta q)^2}\cdot\overline{(\Delta j)^2}=\frac{\hbar^2}{4L^2}. \quad (34)$$

这与文献[3]的结果是一致的.

若在(24)–(28)式中令 $R=0$,可得压缩真空态下介观 LC 电路的量子涨落为

$$\overline{(\Delta q)^2}=\frac{\hbar}{2L\omega_0}\mathrm{sech}r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{th}^{2n}r(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}\cdot[4n+1-2(2n+1)\mathrm{th}r\cos\theta], \quad (35)$$

$$\overline{(\Delta j)^2}=\frac{\hbar\omega_0}{2L}\mathrm{sech}r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{th}^{2n}r(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}\cdot[4n+1+2(2n+1)\mathrm{th}r\cos\theta], \quad (36)$$

$$\overline{(\Delta q)^2}\cdot\overline{(\Delta j)^2}=\frac{\hbar^2}{4L^2}\mathrm{sech}^2 r\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{th}^{2n}r(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}\cdot[4n+1-2(2n+1)\mathrm{th}r\cos\theta]\right\}\cdot\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{th}^{2n}r(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}[4n+1+2(2n+1)\mathrm{th}r\cos\theta]\right\}. \quad (37)$$

这与文献[3]的结果一致.由(35)–(37)式可见,量子涨落的大小与压缩参数有关,如当 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 时,两种情况下量子涨落之积并不改变,但电荷、电流量子涨落的分配发生了变化,这表明在不同压缩角下电荷、电流的量子涨落将不同.因而,对于给定的 L,C 和 r 参数,可以选择适当的 θ 角来降低所需电学量的量子噪声.

4 结 论

本文发展了一种有源 RLC 电路的量子力学处理方案,在此基础上研究了压缩真空态下介观 RLC 电路中电荷、电流的量子涨落,结果表明这种量子涨落的确存在,且与电路参数和压缩参数均有关,但由于电阻的存在,这种量子效应是随时间衰减的,并指出可通过适当的参数选择来降低所需电学量的量子噪声.另外,本文结论具有普遍性,文献中曾研究的真空态下介观 RLC 电路、真空态和压缩真空态下介观 LC 电路的量子涨落成为本文结论的几个特例.

[1] R. G. Garcia, *Appl. Phys. Lett.*, **60**(1992), 1960.
[2] W. H. Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation (John Wiley, New York, 1973).
[3] Yuan-shun Cui, *Acta Photonica Sinica*, **27**(1998), 517 (in Chinese) [崔元顺,光子学报,**27**(1998),517].
[4] H. Dekker, *Physica*, **A95**(1979), 311.
[5] Bin Chen *et al.*, *Chinese Science Bulletin*, **41**(1996), 1170 (in Chinese) [陈斌等,科学通报,**41**(1996),1170].
[6] Ji-suo Wang, *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **46**(1997), 2007 (in Chinese) [王继锁等,物理学报,**46**(1997),2007].
[7] Huan-wu Peng, *Acta Physica Sinica*, **29**(1980), 1084 (in Chinese) [彭桓武,物理学报,**29**(1980),1084].
[8] Jin-sheng Peng, *et al.*, Introduction to Contemporary Quantum Optics (Science Press, Beijing, 1996) (in Chinese) [彭金生等,近代量子光学导论,科学出版社,北京,1996].

QUANTUM FLUCTUATIONS OF CHARGE AND CURRENT IN MESOSCOPIC *RLC* CIRCUIT IN SQUEEZED VACUUM STATE

GU YONG-JIAN
(*Department of Physics*, *Changwei Teachers College*, *Weifang* 261043, *China*)

(Received 6 November 1999)

ABSTRACT

A method of quantizing an active *RLC* circuit is developed, and the quantum fluctuations of the charge and current in the mesoscopic *RLC* circuit in the squeezed vacuum state, especially the influences of the resistance and the squeezing parameters on the quantum fluctuations are investigated.

PACC: 7335