第 49 卷 第 6 期 2000 年 6 月
1000-3290/2000/49(06)/1031-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 6, June, 2000

广义 Schwarzschild 几何的引力微扰*

李新洲[1)2)] 袁宁一[1)] 刘道军[2)] 郝建纲[2)]

[1)](上海师范大学物理系,上海 200234)

[2)](华东理工大学理论物理研究所,上海 200237)

(1999 年 12 月 5 日收到)

利用 Regge 和 Wheeler 提出的方法,导出了广义 Schwarzschild 几何的轴扰动方程. 对给定角动量 L 和 λ 参数,通过数值计算,得到了拟正则模的值. 数值结果与不稳定性的解析证明相一致.

PACC:0420;0450;0430

1 引 言

多年来,引力微扰已经引起了理论和观测两方面的研究兴趣. 引力微扰可以分成轴微扰和极微扰两类[1],轴扰动方程在文献中通常称作 Regge-Wheeler 方程[2],而极扰动方程又称为 Zerilli 方程[3],对于球对称解的稳定性而言,Chandrasekhar 已经指出仅需讨论其中一类即可[4]. 研究 Regge-Wheeler 方程的稳定性问题有多种不同的途径:数值积分法[5]、模拟法[6]、无穷级数法[7]以及 Wenzel-Kramers-Brillouin 近似法[8]. 另一方面,当考虑到无质量标量场耦合时,Agnese,Camera 和 Froyland 等人找到了一类广义 Schwarzschild 几何解[9]. 新近,我们利用 Hamilton-Jacobi 方法研究了在带有参数 $0<\lambda\leqslant 1$ 的广义 Schwarzschild 几何中经典粒子运动[10],我们发现 $\lambda=1/2$ 是一个临界点,在 $1/2\leqslant\lambda<1$ 情形,运动的定性性质类似于 Schwarzschild 情形($\lambda=1$). 与此相反,$0<\lambda<1/2$ 情形与 $\lambda=1$ 的运动性质本质不同.

本文利用 Regge 和 Wheeler 提出的方法[2]导出广义 Schwarzschild 几何在引力微扰下的轴扰动方程,并利用 Mashhoon 等人提出的模拟法计算扰动的拟正则模,最后,给出广义 Schwarzschild 几何在引力扰动下不稳定的严格证明.

2 广义 Regge-Wheeler 方程

背景度规记为 $g_{\mu\nu}$,扰动度规记为 $h_{\mu\nu}$. 我们将对应于 $g_{\mu\nu}$ 的 Ricci 张量记成 $R_{\mu\nu}$,并将对应于 $g_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$ 的 Ricci 张量记成 $R_{\mu\nu}+\delta R_{\mu\nu}$. Eisenhart[11]首先找到了 $\delta R_{\mu\nu}$ 的计算方法[11]

$$\delta R_{\mu\nu} = -\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\nu;\beta} + \delta\Gamma^{\beta}_{\mu\beta;\nu}, \tag{1}$$

其中

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\nu}(h_{\beta\nu;\gamma} + h_{\gamma\nu;\beta} - h_{\beta\gamma;\nu}). \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式,可以得到 $h_{\mu\nu}$ 的二阶微分方程. 下面将 $g_{\mu\nu}$ 取成广义 Schwarzschild 度规[9],

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{\nu}dt^2 - e^{\alpha}dr^2 - e^{\beta}r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \\ &= g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\nu(r) = -\alpha(r) = \frac{m}{\eta}\ln\left(1-\frac{2\eta}{r}\right), \tag{4}$$

$$\beta(r) = \left(1-\frac{m}{\eta}\right)\ln\left(1-\frac{2\eta}{r}\right), \tag{5}$$

其中 $m\leqslant\eta$,m 代表质量,η 是与标量场相关的一个常数. 度规(3)式是 Petrov D 型的,并在 $r=2\eta$ 处出现奇性. 在标量场恒等于零的情形,$m=\eta$,即该情形约化为通常的 Schwarzschild 几何.

下面考虑 2 维子流形($t=r=$常数)上的谐和分析. 扰动张量的 10 个独立分量分别对应于 3 个标量(h_{00};h_{01};h_{11}),和 2 个矢量(h_{02},h_{03};h_{12},h_{13})和一个 2 秩张量.

典型的标量函数为

$$\varphi^M_L = Y^M_L(\theta,\varphi) \quad (宇称为(-)^L), \tag{6}$$

$$\psi^M_{L,a} = \frac{\partial}{\partial x^a}Y^M_L(\theta,\varphi) \quad (宇称为(-)^L), \tag{7}$$

$$\phi^M_{L,a} = \varepsilon^b_a Y^M_L(\theta,\varphi) \quad (宇称为(-)^{L+1}), \tag{8}$$

* 国家自然科学基金(批准号:19875016)和博士点专项基金(批准号:1999025110)资助的课题.

其中 $a, b=2,3$ 而 $\varepsilon_2^2=\varepsilon_3^3=0, \varepsilon_2^3=-1/\sin\theta, \varepsilon_3^2=\sin\theta$. 角动量为 L 的3种类型的张量为

$$\psi_{L\,ab}^M = Y_{L\,;\mu\nu}^M \quad (\text{宇称为}(-)^L), \tag{9}$$

$$\phi_{L\,ab}^M = \gamma_{\mu\nu} Y_L^M \quad (\text{宇称为}(-)^L), \tag{10}$$

$$\chi_{L\,ab}^M = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_a^c \psi_{L\,cb}^M + \varepsilon_b^c \psi_{L\,ca}^M\right] \quad (\text{宇称为}(-)^{L+1}), \tag{11}$$

其中 $\gamma_{22}=1, \gamma_{23}=\gamma_{32}=0, \gamma_{33}=\sin^2\theta$. 上述这些形式分别乘以 r, t 的任意函数不改变其转动性质. 轴微扰是宇称为 $(-)^{L+1}$ 的扰动,对于给定的 L 和 M 值,微扰的最一般形式为

$$\begin{aligned}
h_{00} &= h_{01} = h_{11} = 0,\\
h_{02} &= -h_0(t,r)\left(\frac{\partial}{\sin\theta\partial\varphi}\right)Y_L^M,\\
h_{03} &= h_0(t,r)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)Y_L^M,\\
h_{12} &= -h_1(t,r)\left(\frac{\partial}{\sin\theta\partial\varphi}\right)Y_L^M,\\
h_{13} &= h_1(t,r)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)Y_L^M,\\
h_{22} &= h_2(t,r)\left(\frac{\partial^2}{\sin\theta\partial\theta\partial\varphi} - \cos\theta\frac{\partial}{\sin^2\theta\partial\theta}\right)Y_L^M,\\
h_{23} &= \frac{1}{2}h_2(t,r)\left(\frac{\partial^2}{\sin\theta\partial\varphi^2} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)Y_L^M,\\
h_{33} &= -h_2(t,r)\left(\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)Y_L^M.
\end{aligned} \tag{12}$$

由于背景度规的球对称性,在(1)和(2)式中应将不同的 L 和宇称分开来讨论. L, M 和宇称都是系统的运动常数,余下的一个常数是扰动的频率 ω. 特定的 L, M, ω 和宇称值完全确定方程的一个特解. 而通解是这些特解的叠加,其系数依赖于边界条件和初值. 对于给定的 L, M, ω 和宇称, $M(=-L, -L+1, \cdots, L)$ 将导致相同的径向方程,所以从简单性出发可选取 $M=0$. 在无穷小坐标变换 $x'^{\alpha}=x^{\alpha}+\xi^{\alpha}$ 下, $h_{\mu\nu}$ 的变换为

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \xi_{\mu\,;\nu} + \xi_{\nu\,;\mu}. \tag{13}$$

选取 Regge-Wheeler 规范[2],

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= \xi^1 = 0,\\
\xi^{\alpha} &= \Lambda(t,r)\varepsilon^{ab}(\partial/\partial x^b)Y_L^M(\theta,\varphi)\\
&\quad (a, b = 2,3),
\end{aligned} \tag{14}$$

其中径向函数 $\Lambda(t,r)$ 将消去(12)式中的 $h_2(t,r)$. 在上述规范下,总角动量为 L,投影为 $M=0$ 的轴微扰形式可写作

$$h_{\mu\nu} = \exp(-\mathrm{i}\omega t)(\sin\theta\partial/\partial\theta)P_L(\cos\theta) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0(r)\\ 0 & 0 & 0 & h_1(r)\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ h_0(r) & h_1(r) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

将(15)式代入(1)式,可得 Einstein 方程为

$$\left(1-\frac{2\eta}{r}\right)^{-\frac{m}{\eta}}\mathrm{i}\omega h_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\left(1-\frac{2\eta}{r}\right)^{\frac{m}{\eta}}h_1\right] = 0, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{2\eta}{r}\right)^{-\frac{m}{\eta}}\mathrm{i}\omega\left[\frac{\partial h_0}{\partial r} + \mathrm{i}kh_1 - \frac{2h_0}{r}\left(1-\frac{2\eta}{r}\right)^{-1}\left(1-\frac{m+\eta}{r}\right)\right]\\
&+ (l-1)(l+2)\left(1-\frac{2\eta}{r}\right)^{\frac{m}{\eta}-1}\frac{h_1}{r^2} = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

将(16)式代入(17)式,并定义

$$Q = \frac{1}{r}\left(1-\frac{2\eta}{r}\right)^{\frac{2m}{2\eta}-\frac{1}{2}}h_1(r), \tag{18}$$

定义 $\lambda = m/\eta$,并利用广义" tortoise "变换

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} = \left(1-\frac{2\eta}{r}\right)^{\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}, \tag{19}$$

即导出了广义 Regge-Wheeler 方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*^2} + \tilde{\omega}^2\right)Q = VQ, \tag{20}$$

其中势的一个光滑的实函数,

$$\begin{aligned}
V = &\left(1-\frac{1}{\tilde{r}}\right)^{2\lambda-2}\left\{\frac{1}{\tilde{r}^2}\left[L(L+1) - \frac{3\lambda}{\tilde{r}}\right]\left(1-\frac{1}{\tilde{r}}\right)\right.\\
&\left. + \frac{3}{4\tilde{r}^4}(1-\lambda)^2\right\}.
\end{aligned} \tag{21}$$

在(21)式中,我们已作标度变换 $\tilde{r}=\frac{r}{2\eta}, \tilde{\omega}=2\eta\omega$.

3 拟正则模

引力扰动的拟正则模(QNM)是指具有在空间无穷远处是纯出射波的解. 从著名的 Heisenberg-Kramers 关系[12]可知,我们散射振幅的奇异性对应于束缚态. 当广义 Regge-Wheeler 方程的逆有效势的束缚态解析近似计算后,QNM 能用确定的变换得到. 我们利用 Hulthen 势去拟合逆有效势 V:

$$V = -V_0\frac{\mathrm{e}^{-r/a}}{1-\mathrm{e}^{-r/a}}, \tag{22}$$

其中,参数 V_0 和 a 与 λ 有关,可以用数值法拟合得

出束缚态能级为

$$\Omega(a) = -V_0\left(\frac{\beta^2-n^2}{2n\beta}\right)^2, \qquad (23)$$

其中 $\beta^2 = a^2V_0$，$n=1,2,\cdots$

拟正则模频率能由

$$\omega = \Omega(-\mathrm{i}a) = -\left(\frac{aV_0}{2n}+\frac{n}{2a}\right)\mathrm{i} \qquad (24)$$

得到. 对于各种 l 值和 n 值，广义 Schwarzschild 几何引力扰动的拟正则模列于表 1 中. 表中也列出了 Schwarzschild 几何($\lambda=1$)引力扰动的拟正则模.

表 1　广义 Schwarzschild 几何($\lambda<1$)引力扰动的拟正则模

λ	n	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
1	1	0.731+0.181i	1.612+0.187i	1.612+0.189i	2.020+0.190i
	2		1.142+0.593i	1.572+0.587i	1.985+0.548i
	3				1.936+1.006i
0.6	1	−1.043i	−2.187i	−3.571i	−6.528i
	2	−0.521i	−1.094i	−1.785i	−3.264i
	3	−0.348i	−0.729i	−1.190i	−2.176i
0.4	1	−2.127i	−3.527i	−5.479i	−7.950i
	2	−1.298i	−1.867i	−2.786i	−3.991i
	3	−1.126i	−1.359i	−1.908i	−2.679i
0.2	1	−4.316i	−6.252i	−8.983i	−12.456i
	2	−3.059i	−3.796i	−5.048i	−6.722i
	3	−3.041i	−3.275i	−3.984i	−5.031i
0.1	1	−5.843i	−8.098i	−11.289i	−15.355i
	2	−4.233i	−5.076i	−6.526i	−8.475i
	3	−4.280i	−4.526i	−5.330i	−6.537i

4　广义 Schwarzschild 几何的不稳定性

从上节拟正则模的近似计算可知，ω 取负的纯虚数值，所以我们看出广义 Schwarzschild 几何是不稳定的. 下面我们对此进行解析证明.

我们可以将广义 Regge-Wheeler 方程写成更一般的形式：

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial r_*^2} - VZ, \qquad (25)$$

其中 $Z(r_*,t)=T(t)Q(r_*)$. 在渐近条件 $\tilde{r}\to 1$，有 $\tilde{r}-1=[r_*/(1-\lambda)]^{1/(1-\lambda)}$，而在渐近条件 $\tilde{r}\to\infty$ 下，有 $r_*\to\tilde{r}$. 取 $T(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 那末(25)式在 $r_*=0$ 的渐近解为

$$Z \sim \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} r_*^{\alpha}, \qquad (26)$$

其中　$\alpha = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+(1-\lambda)^4} \geqslant 1$. 将(25)式两边乘以 $\frac{\partial Z^*}{\partial t}$，并作积分可得

$$\int_0^\infty\left(\frac{\partial Z^*}{\partial t}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}+\frac{\partial Z}{\partial r_*}\frac{\partial^2 Z^*}{\partial t\partial r_*}+VZ\frac{\partial Z^*}{\partial t}\right)\mathrm{d}r_* = \frac{\partial Z^*}{\partial t}\frac{\partial Z}{\partial r_*}\bigg|_0^\infty. \qquad (27)$$

对(27)式取复共轭有

$$\int_0^\infty\left(\frac{\partial Z}{\partial t}\frac{\partial^2 Z^*}{\partial t^2}+\frac{\partial z^*}{\partial r_*}\frac{\partial Z^2}{\partial t\partial r_*}+VZ^*\frac{\partial Z}{\partial t}\right)\mathrm{d}r_* = \frac{\partial Z}{\partial t}\frac{\partial Z^*}{\partial r_*}\bigg|_0^\infty. \qquad (28)$$

将(27)，(28)两式合并，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty\left(\left|\frac{\partial Z}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial Z}{\partial r_*}\right|^2+V|Z|^2\right)\mathrm{d}r_* = \left(\frac{\partial Z}{\partial t}\frac{\partial Z^*}{\partial r_*}+\frac{\partial Z^*}{\partial t}\frac{\partial Z}{\partial r_*}\right)_0^\infty. \qquad (29)$$

将边界条件(26)式以及无穷远处拟正则模边界条件

$$Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega r_*}, \qquad (30)$$

代入(29)式可得

$$\mathrm{Im}(\omega) = -\frac{|\omega|^2\,|R(\infty)|^2}{\int_0^\infty\left(|\omega|^2\,|R|^2+\left|\frac{\partial R}{\partial r_*}\right|^2+V|R|^2\right)\mathrm{d}r_*.} < 0. \qquad (31)$$

可见引力扰动将随时间指数增长，所以广义 Schwarzschild 几何在引力的扰动下是不稳定的.

最后，我们对本文的结论作一个简明的讨论. 本文在 Regge-Wheeler 规范下导出了广义 Schwarzschild 几何的轴扰动方程，并且证明该几何在引力扰动下是不稳定的 Yoshida 等人已利用 Regge-Wheeler 方法讨论了玻色子星的拟正则模问题. 显然，我们也将上述讨论扩充到 D 星[13,14]的稳定性和拟正则模的研究，这些结果将另文发表.

[1]　S. Chandrasekhar, in General Relativily——An Einstein Centenary Survey, edited by S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge (1979), Chap. 7.

[2]　T. Regge, J. A. Wheeler, *Phys. Rev.*, **108** (1957), 1063; S. Detweiler, L. Lindblom, *Astrophys. J.*, **292** (1985), 12; S. Yoshida, Y. Eriguchi and T. Futamase, *Phys. Rev.*, **D50** (1994), 6235.

[3]　F. J. Zerilli, *Phys. Rev. Lett.*, **24** (1970), 737.

[4]　S. Chandrasekhar, *Proc. Roy. Soc.* (London), **A369** (1980), 42; N. Anderson, K. D. Kokkotas, P. Launa, Papadopoulos, M. Sipper, *Phys. Rev.*, **D60** (1999), 124004.

[5]　S. Detweiler, *Astrophys. J.*, **239** (1980), 292.

[6] H. Blome, B. Mashhoon, *Phys. Lett.*, **100A** (1984), 231; V. Ferrari, B. Mashhoon, *Phys. Rev.*, **D30** (1984), 295.

[7] E. Leaver, *J. Math. Phys.*, **27** (1986), 1238.

[8] S. Iyer, *Phys. Rev.*, **D35** (1987), 3632; N. Y. Yuan, X. Z. Li, *Chin. Phys. Lett.*, **17** (2000), 246.

[9] G. Agnese, M. L. Camera, *Lett. Nuov. Cim.*, **35** (1982), 365; *Phys. Rev.*, **D31** (1985), 1280; J. Froyland, *Phys. Rev.*, **D25** (1982), 1470.

[10] X. H. Zhai, N. Y. Yuan, X. Z. Li, *Chin. Phys. Lett.*, **16** (1999), 321.

[11] L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton Univ. Press, Princeton (1926), Chap. 6.

[12] W. Heisenberg, *Z. Natureforschung*, **1** (1946), 608.

[13] X. Z. Li, X. H. Zhai, *Phys. Lett.*, **B364** (1995), 212.

[14] X. Z. Li, X. H. Zhai, G. Chen, *Astropart. Phys.*, **13** (2000), 245.

EXTERIOR GRAVITATIONAL PERTURBATION ON GENERALIZED SCHWARZSCHILD GEOMETRY*

LI XIN-ZHOU[1)2)] YUAN NING-YI[1)] LIU DAO-JUN[2)] HAO JIAN-GANG[2)]

[1)] (*Department of Physics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China*)

[2)] (*Institute for Theoretical Physics, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China*)

(Received 5 December 1999)

ABSTRACT

Using Regge-Wheeler's method, axial perturbation equation of generalized Schwarzschild geometry is derived. The numerical results of quasi-normal modes for given angular momentum L and parameter λ indicate the instability of the geometry, which is in agreement with our analytic results.

PACC: 0420; 0450; 0430

* Project supported by the National Natural Science Foundation of Chinese (Grant No. 19875016).