第 49 卷 第 6 期 2000 年 6 月
1000-3290/2000/49(06)/1070-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 6, June, 2000


# 电流变液中电场强度的半解析计算*

李向亭 马红孺

(上海交通大学应用物理系,上海 200240)

(1999 年 11 月 7 日收到)

在 Bergman 表示的基础上,建立了电介质电流变液中电场和小球表面极化电荷的表达式,并以电流变液的基态结构——BCT 结构为例进行了数值计算.定量讨论了多极矩的贡献与小球间距的关系,并给出了偶极近似成立的条件.

PACC:4120;8370;0270

## 1 引 言

电流变液由微小电介质颗粒悬浮于电介质液体中而成,当加上外电场后,其粘滞性突然增加变成类固体,这个过程是快速可逆的,响应时间为 ms 数量级.Winslow 1947 年就电流变效应的应用申请了美国专利[1],并于 1949 年详细报道了电流变效应的实验结果[2].电流变效应的响应速度超过一般机械系统,这使它的机电耦合特性具有很大的技术应用价值.电流变液研究中的一个重要的理论问题是计算介质中的电场分布,通常的作法是求解复合介质的 Laplace 方程可以得到电势分布,然后用数值微分方法计算电场.常用的求解方法有有限差分方法、有限元方法等.由于复合介质中电场强度在两种介质交界处是不连续的,用数值求导方法来通过电势计算两种介质边界表面附近的电场,很难达到较高的精度.

文献[3]曾在文献[4,5]有效介电常数谱表示的基础上,推导出球形嵌入二元复合材料中静电势的表达式,并计算了几种常见周期结构中的电势分布,本文在上述工作的基础上,对静电势表达式作了进一步简化,得到了电场强度的解析表达式,建立了计算球形嵌入复合介质中电场分布的半解析方法,并进而得到了简洁的表面极化电荷的解析表达式,.最后以电流变液的基态结构(BCT)为例计算了电流变液中的电场分布,讨论了表面极化电荷与小球间距的关系,给出了偶极近似有效的范围.

## 2 理 论

考虑一电流变液系统,介质 1 为半径为 $a$ 的固体电介质小球,介电常数为 $\varepsilon_1$,散布于介电常数为 $\varepsilon_2$ 的液体(如硅油)中,放置于两平行电极之间,电极可以视为无限大.取垂直于极板的方向为坐标的 $z$ 轴方向,在外电场 $E_0$ 作用下,小球排列成某种周期性结构,电势 $\phi$ 由 Laplace 方程及边界条件

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot(\varepsilon(\boldsymbol{r})\nabla\phi)=0,\\&\phi\left(x,y,z=-\frac{L}{2}\right)=\frac{L}{2}E_0,\\&\phi\left(x,y,z=\frac{L}{2}\right)=-\frac{L}{2}E_0\end{aligned}\tag{1}$$

决定.其中

$$\varepsilon(\boldsymbol{r})=\varepsilon_1\eta(\boldsymbol{r})+\varepsilon_2(1-\eta(\boldsymbol{r}))=\varepsilon_2\left(1-\frac{1}{s}\eta(\boldsymbol{r})\right),\tag{2}$$

$$s=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\tag{3}$$

是一仅与材料特性有关的参数,

$$\eta(\boldsymbol{r})=\begin{cases}1 & \text{当 } r \text{ 在介质 1 中}\\0 & \text{其他}\end{cases}\tag{4}$$

为介质 1 的指示函数,反映了材料的微结构.

对上述问题,我们用 Bergman 方法,以小球半径为长度单位,以外电场强度为电场单位,得到了两种介质中的电势分布表达式为[3]

* 国家自然科学基金(批准号:19504009)和上海市科委优秀学科带头人基金和攀登计划资助的课题.

$$
\phi=\begin{cases}\sum_{lm}\frac{1}{l^{1/2}}a_{lm}r^{l}Y_{lm}(\Omega_r) & r\ \text{在小球内,}\\ z+\frac{1}{s}\sum_{lm}\frac{l^{1/2}}{2l+1}a_{lm} & \\ \cdot\sum_{\boldsymbol{R}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|^{l+1}}Y_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}}) & r\ \text{在小球外,}\end{cases} \tag{5}
$$

其中 $a_{lm}$ 为展开系数,满足方程

$$
a_{lm}=z_{lm}\delta_{k,0}+\frac{1}{s}\sum_{l'm'}\hat{\Gamma}_{lm,l'm'}a_{l'm'}, \tag{6}
$$

其中矩阵

$$
\Gamma_{lm;l'm'}=\sum_{\boldsymbol{R}}\Gamma_{0lm;\boldsymbol{R}lm}, \tag{7}
$$

$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}'$ 时

$$
\Gamma_{\boldsymbol{R}lm;\boldsymbol{R}'l'm'}=\frac{l}{2l+1}\delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{8}
$$

$\boldsymbol{R}\neq\boldsymbol{R}'$ 时

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\boldsymbol{R}lm;\boldsymbol{R}'l'm'}&=(-1)^{l'+m'}\left(\frac{1}{\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'}\right)^{l+l'+1}\\
&\cdot\left(\frac{ll'}{(2l+1)(2l'+1)}\right)^{1/2}\\
&\times\frac{(l+l'+m-m')!}{[(l+m)!(l-m)!(l'+m')!(l'-m')!]^{1/2}}\\
&\times P_{l+l'}^{m'-m}(\cos\theta_{\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'})\exp[\mathrm{i}(m-m')\varphi_{\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'}]\\
&\equiv\Gamma_{lm;l'm'}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}').
\end{aligned} \tag{9}
$$

其含义和求解方法在文献[3]中有详细的叙述;$Y_{lm}(\Omega_r)$为球谐函数,定义为

$$
Y_{lm}(\Omega)=N_{lm}P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},
$$

$$
P_l^m(\cos\theta)=(-1)^m\frac{1}{2^l l!}(1-\cos^2\theta)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}(\cos\theta)^{l+m}}(\cos^2\theta-1)^l, \tag{10}
$$

$$
N_{lm}=\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}.
$$

电场强度 $E$ 为

$$
\boldsymbol{E}=-\nabla\phi, \tag{11}
$$

对位于原点的小球内可以得到

$$
\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}=-\sum_{lm}a_{lm}\frac{1}{\sqrt{l}}r^{l-1}\left[lY_{lm}(\Omega_r)\boldsymbol{e}_r+\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right], \tag{12}
$$

其中

$$
\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}=N_{lm}\left[m\frac{\cos\theta}{\sin\theta}P_l^m(\cos\theta)+P_l^{m+1}(\cos\theta)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},
$$

$$
\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}=\mathrm{i}mN_{lm}P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}. \tag{13}
$$

定义矢量球谐函数

$$
\boldsymbol{A}_{lm}(\theta,\varphi)\equiv lY_{lm}(\theta,\varphi)\boldsymbol{e}_r+\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi, \tag{14}
$$

球内电场强度可以写为

$$
\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}=-\sum_{lm}a_{lm}\frac{1}{\sqrt{l}}r^{l-1}\boldsymbol{A}_{lm}(\theta,\varphi). \tag{15}
$$

因 $Y_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}})$是以 $\boldsymbol{R}$ 为原点的球谐函数,对(5)式中的第二个式子直接求梯度,将得到复杂而不易计算的结果,为此,当 $r\leqslant R$ 时,可以对$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|^{l+1}}Y_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}})$作变换[6],

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|^{l+1}}Y_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}})&=\sum_{\lambda}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}\frac{2l+1}{\sqrt{l\lambda}}(-1)^{\lambda+\mu}\\
&\cdot\left(\frac{1}{R}\right)^{l+\lambda+1}\left(\frac{l\lambda}{(2l+1)(2\lambda+1)}\right)^{1/2}\\
&\times\frac{(l+\lambda+m-\mu)!}{[(l+m)!(l-m)!(l+\mu)!(\lambda-\mu)!]^{1/2}}\\
&\times P_{l+\lambda}^{\mu-m}(\cos\theta_{\boldsymbol{R}})\exp[\mathrm{i}(m-m')\varphi_{\boldsymbol{R}}]r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\Omega_r),
\end{aligned} \tag{14}
$$

与(9)式中的 $\Gamma$ 矩阵元的表示式比较,可以写为

$$
\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|^{l+1}}Y_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}})=\sum_{\lambda}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}\frac{2l+1}{\sqrt{l\lambda}}\cdot\Gamma_{0\lambda\mu,\boldsymbol{R}lm}r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\Omega_r). \tag{15}
$$

从而(5)式中的第二式可以化简为

$$
\begin{aligned}
\phi_{\mathrm{out}}&=z+\frac{1}{s}\sum_{lm}\frac{\sqrt{l}}{2l+1}a_{lm}\sum_{\boldsymbol{R}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|^{l+1}}Y_{lm}(\Omega_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}})\\
&=z+\frac{1}{s}\sum_{lm}a_{lm}\sum_{\boldsymbol{R}\neq0}\sum_{\lambda\mu}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Gamma_{0\lambda\mu,\boldsymbol{R}lm}r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\Omega_r)\\
&\quad+\frac{1}{s}\sum_{lm}a_{lm}\frac{\sqrt{l}}{2l+1}\frac{1}{r^{l+1}}Y_{lm}(\Omega_r)\\
&=z+\frac{1}{s}\sum_{lm}a_{lm}\sum_{\lambda\mu}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum_{\boldsymbol{R}}(\Gamma_{0\lambda\mu,\boldsymbol{R}lm}-\Gamma_{0\lambda\mu,0lm})\\
&\quad\cdot r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\Omega_r)+\frac{1}{s}\sum_{lm}a_{lm}\frac{\sqrt{l}}{2l+1}\frac{1}{r^{l+1}}Y_{lm}(\Omega_r)\\
&=z+\frac{1}{s}\sum_{lm}a_{lm}\sum_{\lambda\mu}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Gamma_{\lambda\mu,lm}r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\Omega_r)\\
&\quad-\frac{1}{s}\sum_{lm}a_{lm}\frac{\sqrt{l}}{2l+1}r^lY_{lm}(\Omega_r)\\
&\quad+\frac{1}{s}\sum_{lm}a_{lm}\frac{\sqrt{l}}{2l+1}\frac{1}{r^{l+1}}Y_{lm}(\Omega_r)\\
&=\sum_{lm}a_{lm}\frac{1}{\sqrt{l}}r^lY_{lm}(\Omega_r)-\frac{1}{s}\sum_{lm}a_{lm}\frac{\sqrt{l}}{2l+1}r^lY_{lm}(\Omega_r)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{s}\sum_{lm}a_{lm}\frac{\sqrt{l}}{2l+1}\frac{1}{r^{l+1}}Y_{lm}(\Omega_r). \tag{16}$$

在推导中第三行到第四行利用了(8)式,最后一个等号使用了文献[3]中的(5)式.现在可以求 $\phi_{\rm out}$ 对 $r$,$\theta$,$\varphi$ 的梯度,利用(13),(14)式可得

$$\boldsymbol{E}_{\rm out}=-\sum_{lm}a_{lm}\left[\frac{1}{\sqrt{l}}-\frac{\sqrt{l}}{s(2l+1)}\right]r^{l-1}\boldsymbol{A}_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$-\frac{1}{s}\sum_{lm}a_{lm}\frac{\sqrt{l}}{2l+1}r^{-(l+2)}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi), \tag{17}$$

其中,$\boldsymbol{B}(\theta,\varphi)$为另一类矢量球谐函数,定义为

$$\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)=-(2l+1)Y_{lm}(\theta,\varphi)\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{A}_{lm}(\theta,\varphi). \tag{18}$$

Clercx 等人[7]也曾用多极展开方法得到过复合介质中电场强度的公式,但其公式含有外电场项,公式形式也较繁.

在小球表面上

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{D}_{\rm out}-\boldsymbol{D}_{\rm in}]\cdot\boldsymbol{e}_{|r|=1}&=\varepsilon_2\boldsymbol{E}_{\rm out}-\varepsilon_1\boldsymbol{E}_{\rm in}\\&=-(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{lm}a_{lm}\sqrt{l}Y_{lm}(\theta,\varphi)\\&\quad+\frac{\varepsilon_2}{s}\frac{\sqrt{l}}{2l+1}(2l+1)Y_{lm}(\theta,\varphi)\\&=0,\end{aligned} \tag{19}$$

这正是边界条件所要求的.

小球的表面极化电荷密度为

$$\begin{aligned}\sigma_p&=-[\boldsymbol{P}_{\rm out}-\boldsymbol{P}_{\rm in}]_{|r|=1}\cdot\boldsymbol{e}_r\\&=-\frac{1}{4\pi}[(\varepsilon_2-1)\boldsymbol{E}_{\rm out}-(\varepsilon_1-1)\boldsymbol{E}_{\rm in}]_{|r|=1}\cdot\boldsymbol{e}_r\\&=\frac{1}{4\pi}[\boldsymbol{E}_{\rm out}-\boldsymbol{E}_{\rm in}]_{|r|=1}\cdot\boldsymbol{e}_r\\&=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{s}\sum_{lm}a_{lm}\sqrt{l}Y_{lm}(\theta,\varphi).\end{aligned} \tag{20}$$

$a_{lm}$ 由线性方程组(6)求出,利用(12),(17),(20)式通过简单求和可得到小球内外的电场强度和表面极化电荷密度.

## 3 结 果

利用上节的公式,我们计算小球排列为 BCT 结构时的电场强度.具体计算中的一些技术上的问题,已经在文献[3]中解决,这一计算过程没有困难.为了验证(16)式的正确性,我们用(16)式计算了 BCT 结构和正方结构的电势分布,并与利用(5)式得到的结果作了比较,结果完全一致.利用(5)式计算时要对空间所有小球求和,速度较慢,而(16)式无需对 $\boldsymbol{R}$ 求和,计算量小了很多.

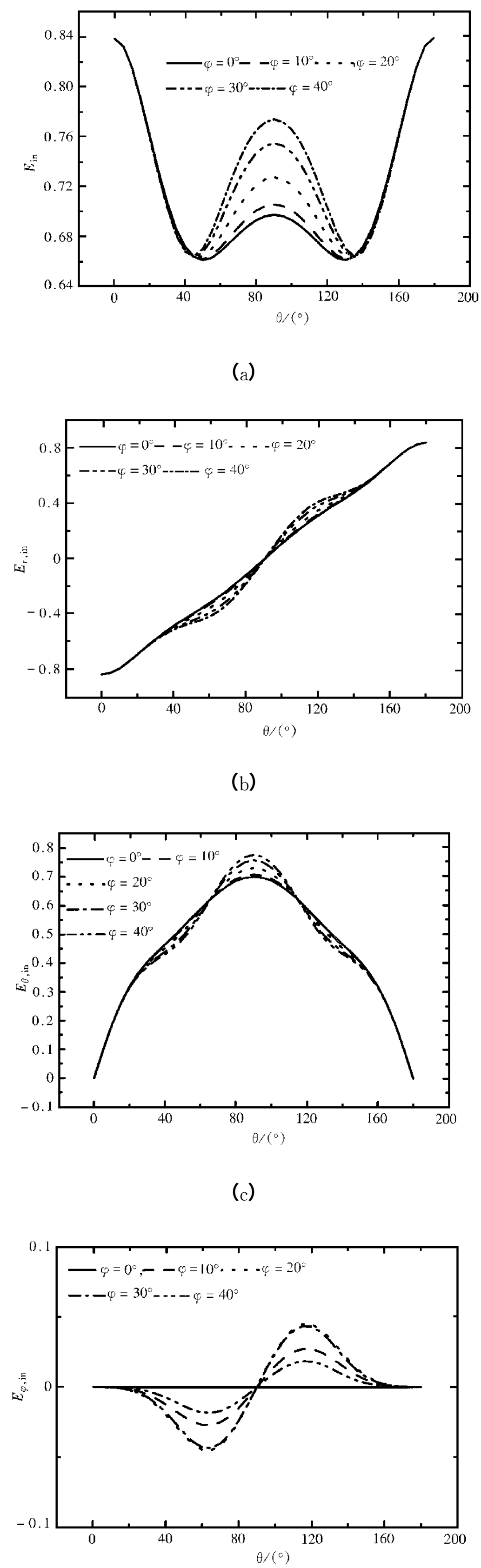
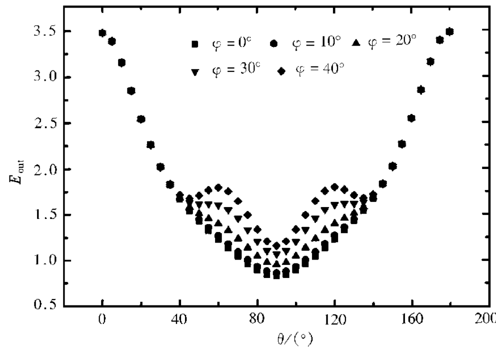
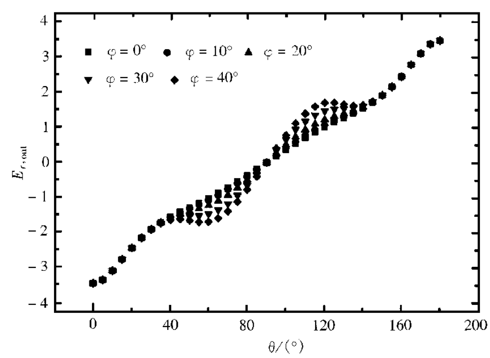


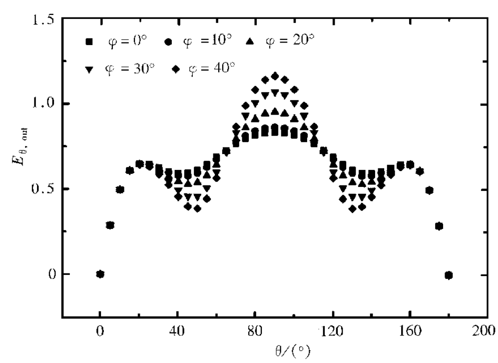

图 1 $r=0.9$ 球面上的电场分布,$\varepsilon_1=10$,$\varepsilon_2=2.5$



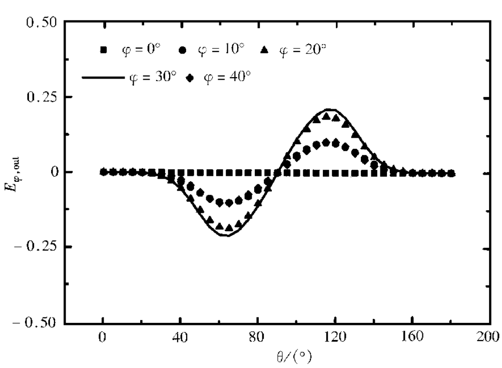

(a)




(b)




(c)




(d)

图 2　$r = 1.1$ 球面上的电场分布，参数同图 1

因空间周期性，我们只需计算了一个原胞中的电场情况. 计算时，取液体的介电常数为 2.5，小球的介电常数为 10. 由于 BCT 结构具有绕 $z$ 轴的四度对称轴和对 $xy$ 平面的镜象对称，因此只需计算出八分之一原胞中的电场强度，为了看出结果的对称性及检验结果确实满足对称性的要求，我们对整个原胞作了计算并给出四分之一原胞中的计算结果. 图 1 和图 2 的 (a)，(b)，(c)，(d) 分别给出了 $r = 0.9$ 和 $r = 1.1$ 的球面上电场强度的大小和 $E_r$，$E_\theta$ 和 $E_\varphi$ 的值. 与偶极近似不同，球内电场不再是匀强电场，但电场变化较为缓慢，在小球距离较远时，接近均匀电场，如果把 $E_r$，$E_\theta$ 和 $E_\varphi$ 转化为 $E_x$，$E_y$ 和 $E_z$，$E_x$，$E_y$ 的值很小，电场基本上沿 $z$ 方向. 小球越接近，球内的不均匀程度越明显. 在 $\theta = 50°$ 和 $\theta = 130°$ 方向电场强度最小，这些方向正好为周围邻近小球所在方向，这表现了极化小球之间的相互影响，与之相应，$E_r$，$E_\theta$，$E_\varphi$ 在这些方向也出现了极值与拐点. 球外电场变化幅度较大，电场方向变化也大，小球的上下两端电场强度最大，同样在其他小球所在方向上，电场出现了极值和拐点. 为了显示电场的概貌，图 3 给出了 $x = 0.5$ 面上的等势线图和电场强度分布图.

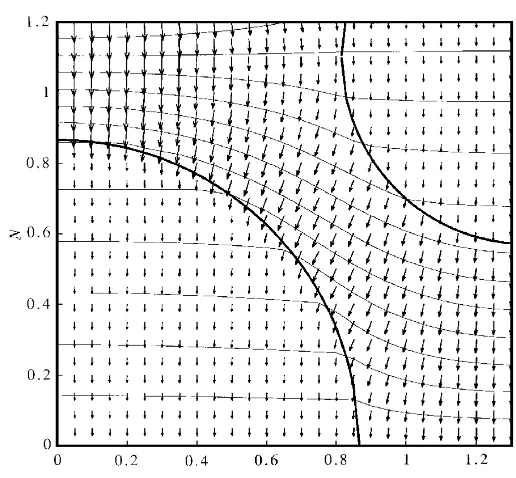



图 3　$x = 0.5$ 平面上的等势线和电场，参数同图 1

小球表面极化电荷分布如图 4 所示，小球间距 $\delta = (R - a)/a$（$2R$ 为最邻近小球球心的距离）越大，表面极化电荷分布越接近偶极子的电荷分布形式，即余弦分布.

为了定量考察小球间距对表面极化电荷和电场分布的影响，定义下述无量纲量

$$\gamma_c = \sum_{lm\,(lm \neq 1,0)} \frac{a_{lm}}{a_{10}}, \tag{21}$$

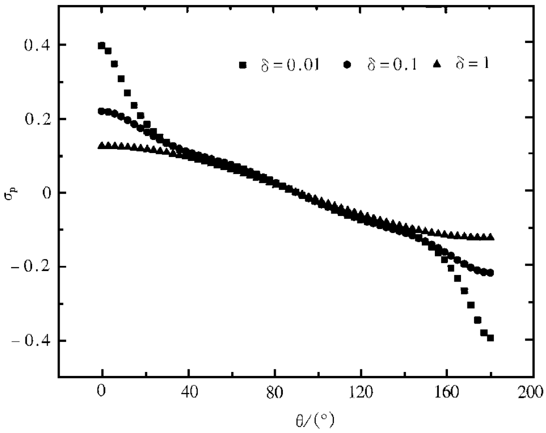



图 4 不同 $\delta$ 时表面电荷随 $\theta$ 角的变化($\varphi=0°$),参数同图 1

$$\gamma_F = \frac{\int_{\text{球内}} (E-\bar{E})^2 \mathrm{d}V}{\bar{E}^2}. \tag{22}$$

其中 $\bar{E}=\int_{\text{球内}} E\mathrm{d}V$. $\gamma_c$ 代表高阶多极矩的贡献与偶极矩贡献之比,$\gamma_F$ 代表球内电场的不均匀度,反映了高阶矩的贡献. 图 5 和图 6 画出了 $\varepsilon_1/\varepsilon_2=4$ 时 $\gamma_c$,$\gamma_F$ 与 $\delta$ 的关系,这两种关系具有类似的形式. 在

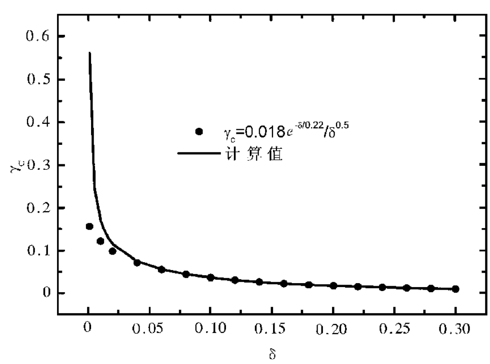



图 5 $\gamma_c$ 随 $\delta$ 的变化,参数同图 1

$\delta>0.04$ 时 $\gamma_c$ 与 $\delta$ 的关系可近似描述为

$$\gamma_c = 0.018\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{0.22}}/\sqrt{\delta}. \tag{23}$$

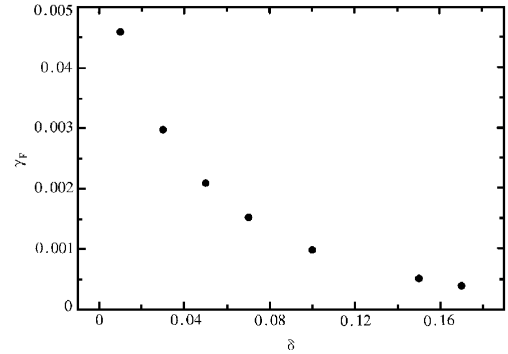



图 6 $\gamma_F$ 随 $\delta$ 的变化,参数同图 1

为了与计算值比较,图 5 中同时画出了上式的曲线,$\delta>0.04$ 时,计算得到的点与上述曲线重合. 当 $\delta\gg0.2$ 时,高阶矩的贡献可以忽略不计. 而实际的电流变系统,发生相分离时,颗粒之间距离很小,采用偶极近似是很粗糙的. 要解决电流变液的动力学模拟问题,必需考虑多极相互作用的影响.

本文简化了文献[3]的结果,给出了计算电场强度的公式,以 BCT 结构为例做了数值计算,并利用所得结果定量讨论了小球间距 $\delta$ 与高阶多极矩贡献之间的关系,给出了偶极近似的可用范围.

[1] W. M. Winslow, Methods and means for translation electrical impulses into mechanical force. US Patent No. 2417850, 1947.
[2] W. M. Winslow, *J. Appl. Phys.*, **20**(12)(1949), 1137.
[3] X. T. Li, H. R. Ma, *Acta Physica Sinica*, **48**(1999), 461 (in Chinese) [李向亭、马红孺,物理学报,**48**(3)(1999),461].
[4] D. J. Bergman, in "Solid State Physics", Vol. 46, edited By H. Ehrenreich and D. Turnbull (Academic Press, New York, 1992), p. 147.
[5] G. W. Milton, *Appl. Phys.*, **A26**(1981), 1207; *J. Appl. Phys.*, **52**(1980), 5286.
[6] H. R. Ma, in "Complex Fluids (Ⅲ) and Theoretical Approaches", CCAST-WL Workshop Series: Vol. 87, (CCAST, Beijing, 1998), p. 197.
[7] H. J. H. Clercx, G. Bossis, *Phys. Rev.*, **B48**(1993), 2721.

# ELECTROSTATIC FIELD IN ELECTRORHEOLOGICAL FLUIDS :A SEMI-ANALYTICAL METHOD*

LI XIANG-TING　MA HONG-RU

(*Department of Applied Physics*, *Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200240, *China*)

(Received 7 November 1999)

ABSTRACT

Based on the Bergman's representation, a semi-analytical method for the calculation of electrostatic field in electrorheological fluids was presented. The electric field for BCT structure was calculated as an example. The multipole contribution as a function of the separation of particles was discussed quantitatively and the range of validity of dipole approximation was given.

**PACC**: 4120; 8370; 0270

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19504009).