第 49 卷 第 7 期 2000 年 7 月
1000-3290/2000/49(07)/1207-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 49, No. 7, July, 2000

包含伺服约束的非完整系统的 Lie 对称性与守恒量*

梅凤翔
(北京理工大学应用力学系,北京 100081)
(1999 年 11 月 14 日收到;1999 年 12 月 17 日收到修改稿)

利用代数方程和微分方程在无限小变换下的不变性,研究带有伺服约束的非完整系统的 Lie 对称性. 给出 Lie 对称性的确定方程、限制方程、结构方程,并给出守恒量的形式.

关键词:非完整系统,伺服约束,Lie 对称性,守恒量
PACC:0320

1 引 言

力学系统的对称性与守恒量研究,不仅具有数学意义,而且有更为重要的物理意义. Noether 对称性与 Lie 对称性是两种重要的对称性. 关于 Noether 对称性的研究已取得重要进展[1—4]. 自 70 年代 Lutzky 将 Lie 对称性方法引入力学系统以来,Lie 对称性研究已取得一些进展,如文献[5—8].

本文研究包含伺服约束的非完整系统的 Lie 对称性与守恒量. 建立系统的运动微分方程,取时间和坐标的无限小变换,给出系统 Lie 对称性的定义,建立结构方程并给出守恒量的形式,举例说明结果的应用.

2 系统的运动微分方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s($s=1,\cdots,n$)来确定,并受到通常的理想 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0\quad(\beta=1,\cdots,g),\tag{1}$$

以及 r 个伺服约束:n_1 个完整约束及 n_2($n_2=r-n_1$)个非完整约束

$$\begin{aligned}&\varphi_\alpha(t,\boldsymbol{q})=0 &&(\alpha=1,\cdots,n_1),\\&\psi_{n_1+r}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 &&(r=1,\cdots,n_2).\end{aligned}\tag{2}$$

称方程(1)为第一类约束,方程(2)为第二类约束. 对于第一类约束,由 Appell-Chetaev 定义,有

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s=0\quad(\beta=1,\cdots,g).$$

第一类约束反力的虚功之和为零,但第二类约束反力的虚功一般异于零[9,10]. 在为第一类约束所允许的虚位移中间,存在一些虚位移,使第二类约束反力在其上作功为零,设这些虚位移满足 j 个关系

$$A_{\nu s}\delta q_s=0\qquad(\nu=1,\cdots,j),$$

由 d'Alembert-Lagrange 原理,利用不定乘子法,可得到系统的运动微分方程,有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}+u_kA_{ks}\quad(s=1,\cdots,n),\tag{3}$$

其中 L 为系统的 Lagrange 函数,Q_s 为非势广义力,λ_β,u_k 为不定乘子. 当 $r=j$ 时,方程(3)联同方程(1),(2)组成为确定 $n+g+r$ 个变量 $q_1,\cdots,q_n,\lambda,\cdots,\lambda_g,u_1,\cdots,u_r$ 的 $n+g+r$ 个方程. 在非奇异假设下,展开方程(3),可求出所有广义加速度,记作

$$\ddot{q}_s=H_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u})\quad(s=1,\cdots,n).\tag{4}$$

将方程(1)和方程(2)中第二式对 t 求一次导数,并将方程(2)中第一式对 t 求两次导数,可得到包含对 $\ddot{q}_s$ 为线性的 $g+r$ 个方程,再将(4)式代入这 $g+r$ 个方程,并消去 $\ddot{q}_s$,可得到关于 $g+r$ 个乘子 λ_β,u_k 的一组代数方程,解此代数方程,可得到

$$\lambda_\beta=\lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\quad u_k=u_k(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\tag{5}$$

最后,将(5)式代入方程(4),可求得所有广义加速度,记作

$$\ddot{q}_s=h_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\quad(s=1,\cdots,n).\tag{6}$$

* 国家自然科学基金(批准号:19972010)和高等学校博士学科点专项科研基金资助的课题.

称方程(6)为与非完整系统(1),(2),(3)式相应的完整系统的运动方程.

3 无限小变换和 Lie 对称性

取时间和坐标的无限小变换

$$t^{*} = t + \Delta t,\ q_s^{*} = q_s + \Delta q_s,$$

或其展开式

$$t^{*} = t + \varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\quad q_s^{*} = q_s + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\tag{7}$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_0,ξ_s 为无限小生成元.取无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s},$$

它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s},$$

以及二次扩展

$$X^{(2)} = X^{(1)} + [(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0]\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}.$$

方程(6)在无限小变换(7)式下的不变性归为如下微分方程:

$$X^{(2)}(\ddot{q}_s - h_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}))\Big|_{\ddot{q}_s = h_s} = 0,$$

即

$$\ddot{\xi}_s - 2\dot{\xi}_0 h_s - \ddot{\xi}_0\dot{q}_s = X^{(1)}(h_s)\quad (s = 1,\cdots,n).\tag{8}$$

称方程(8)为无限小生成元的确定方程.

方程(1),(2)在无限小变换(7)式下的不变性归为

$$X^{(1)}(f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}))\Big|_{f_\beta = 0} = 0,\tag{9}$$

$$X^{(0)}(\varphi_\alpha(t,\boldsymbol{q}))\Big|_{\varphi_\alpha = 0} = 0,\tag{10}$$

$$X^{(1)}(\psi_{n_1+r}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}))\Big|_{\psi_{n_1+r} = 0} = 0.\tag{11}$$

称方程(9),(10),(11)为无限小生成元的限制方程.

定义 1 如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足确定方程(8),则称相应的对称性为与非完整系统(1),(2),(3)相应的完整系统的 Lie 对称性.

定义 2 如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足确定方程(8)和限制方程(9),(10),(11),则称相应的对称性为非完整系统(1),(2),(3)的 Lie 对称性.

4 结构方程与守恒量

对包含伺服约束的非完整系统(1),(2),(3)以及相应的完整系统(6),Lie 对称性不一定总能导致守恒量.下面的定理给出 Lie 对称性导致守恒量的条件以及守恒量的形式.

定理 1 对于满足确定方程(8)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s,如果存在规范函数 $G = G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程:

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + (Q_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0,\tag{12}$$

其中

$$\Lambda_s = \lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} + u_k A_{ks},$$

那么与非完整系统(1),(2),(3)相应的完整系统(6)存在如下形式的守恒量:

$$I = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G = \text{const}.\tag{13}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} =& \dot{L}\,\xi_0 + L\dot{\xi}_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\\ &+ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\xi_0 - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) - L\dot{\xi}_0 - \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 - \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s\\ &- \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) - (Q_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\\ =& \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s - \lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} - u_k A_{kr}\right)\\ &\cdot(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0.\end{aligned}$$

定理 2 对于满足确定方程(8)和限制方程(9),(10),(11)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s,如果存在规范函数 $G = G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程(12),那么包含伺服约束的非完整系统(1),(2),(3)存在 Lie 对称性守恒量(13)式.

5 算 例

一质量平面 P 可在一水平固定面 oxy 上平动地滑动.在平面 P 上有一半径为 R,质量为 M 的匀质圆球可无滑动地滚动.平面 P 的运动用伺服装置自动地调节,以使球心以角速度 ω 相对固定轴 oz 匀速转动[9,10],研究此伺服约束系统的 Lie 对称性与守恒量.

首先,列写系统的运动微分方程.设 u,v 为平面 P 上的一点 A 相对轴 ox,oy 的坐标,平面的位置由这两个参数确定.设 ξ,η 为球心 G 的前两个坐标,p,q,r 为球的瞬时角速度在轴 ox,oy,oz 上的投影,ψ,θ,φ 为 Euler 角,有

$$p = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi,$$

$$q = \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi,$$

$$r = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta.$$

表示球沿平面 P 无滑动地滚动的非完整约束条件为

$$\dot{\xi} - qR = \dot{u},\quad \dot{\eta} + pR = \dot{v}.$$

伺服约束为

$$\dot{\xi} + \omega\eta = 0,\quad \dot{\eta} - \omega\xi = 0.$$

使第二类约束反力所做的功变为零的虚位移为

$$\delta u = 0,\quad \delta v = 0.$$

进而有

$$\delta\xi - R(\delta\theta\sin\psi - \delta\varphi\sin\theta\cos\psi) = \delta u = 0,$$

$$\delta\eta + R(\delta\theta\cos\psi + \delta\varphi\sin\theta\sin\psi) = \delta v = 0.$$

球的动能表为

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2 \cdot (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta).$$

令

$$q_1 = \xi,\ q_2 = \eta,\ q_3 = \psi,\ q_4 = \theta,\ q_5 = \varphi,$$

系统的运动方程表为 Routh 形式,有

$$\begin{aligned}
&M\ddot{\xi} = \lambda_1,\\
&M\ddot{\eta} = \lambda_2,\\
&\frac{2}{5}MR^2(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^{\cdot} = 0,\\
&\frac{2}{5}MR^2\ddot{\theta} + \frac{2}{5}MR^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta = -\lambda_1\sin\psi + \lambda_2\cos\psi,\\
&\frac{2}{5}MR^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^{\cdot} = \lambda_1\sin\theta\cos\psi + \lambda_2\sin\theta\sin\psi.
\end{aligned} \tag{14}$$

进而可求得

$$\lambda_1 = \frac{2}{7}M\ddot{u},\quad \lambda_2 = \frac{2}{7}M\ddot{v},$$

$$7\ddot{\xi} = 2\ddot{u},\quad 7\ddot{\eta} = 2\ddot{v}.$$

取出(14)式第三个方程和伺服约束方程,即

$$\begin{aligned}
&\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta = 0,\\
&\dot{\xi} + \omega\eta = 0,\\
&\dot{\eta} - \omega\xi = 0,
\end{aligned} \tag{15}$$

引进无限小变换

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$

$$q_s^* = q_s + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\quad (s = 1,\cdots,5),$$

和无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s},$$

以及其一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s},$$

方程(15)在变换下的不变性归为如下微分方程:

$$(\ddot{\xi}_3 - 2\dot{\xi}_0\ddot{q}_3 - \ddot{\xi}_0\dot{q}_3) + (\ddot{\xi}_5 - 2\dot{\xi}_0\ddot{q}_5 - \ddot{\xi}_0\dot{q}_5)\cos q_4 - \ddot{q}_5\xi_4\sin q_4 - (\dot{\xi}_4 - \dot{q}_4\dot{\xi}_0)\dot{q}_5\sin q_4 - (\dot{\xi}_5 - \dot{q}_5\dot{\xi}_0) \cdot \dot{q}_4\sin q_4 - \dot{q}_4\dot{q}_5\xi_4\cos q_4 = 0,$$

$$\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0 + \omega\xi_2 = 0,$$

$$\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0 - \omega\xi_1 = 0.$$

该方程有如下解:

$$\xi_0 = 1,\quad \xi_i = 0\qquad (i = 1,\cdots,5),$$

$$\xi_3 = 1,\quad \xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = \xi_4 = \xi_5 = 0,$$

$$\xi_1 = \cos\omega t,\ \xi_2 = \sin\omega t,\ \xi_0 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = 0,$$

$$\xi_1 = -\sin\omega t,\ \xi_2 = \cos\omega t,\ \xi_0 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = 0,$$

$$\xi_5 = 1,\ \xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0.$$

最后求守恒量.问题的结构方程为

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + (Q_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0,$$

其中

$$\Lambda_1 = \lambda_1,\ \Lambda_2 = \lambda_2,\ \Lambda_3 = 0,$$

$$\Lambda_4 = -\lambda_1 R\sin\psi + \lambda_2 R\cos\psi,$$

$$\Lambda_5 = \lambda_1 R\sin\theta\cos\psi + \lambda_2 R\sin\theta\sin\psi.$$

对前四个生成元,由结构方程分别求得

$$G = \frac{1}{7}M(\dot{u}^2 + \dot{v}^2),$$

$$G = 0,$$

$$G = -(M\dot{\xi}\cos\omega t + M\dot{\eta}\sin\omega t),$$

$$G = M\dot{\xi}\sin\omega t - M\dot{\eta}\cos\omega t.$$

对最后一个生成元,由结构方程找不到规范函数 G.

系统的守恒量分别给出

$$I = -T + \frac{1}{7}M(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) = \text{const.},$$

$$I = \frac{2}{5}MR^2\dot{\psi} = \text{const.},$$

$I=0$ 和 $I=0$,后两种情形为平庸解.第一个积分不是系统的能量积分,而且与平板速度有关.第二个积

分代表一个循环积分.

[1] Zi-ping Li, *Acta Physica Sinica*, **30**(1981), 1659(in Chinese)[李子平,物理学报,**30**(1981),1659].

[2] Duan Liu, *Science in China*(*Ser. A*),**34**(1991),419.

[3] Zi-ping Li,Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties(Beijng Polytechnic University Press,Beijing,1993),p.1(in Chinese)[李子平,经典和量子约束系统及其对称性质(北京工业大学出版社,北京,1993),第1页].

[4] Yue-yu Zhao, Feng-xiang Mei, Symmetries and Invariants of Mechanical Systems(Science Press,Beijing,1999),p.1(in Chinese)[赵跃宇、梅凤翔,力学系统的对称性与不变量(科学出版社,北京,1999),第1页].

[5] M. Lutzky, *J Phys. A*:*Math. Gen.*,**12**(1979),973.

[6] Feng-xiang Mei, *J. Beijing Institute of Technology*,**7**(1998),26.

[7] Feng-xiang Mei,Run-heng Wu,Yong-fa Zhang,*Acta Mechanica Sinica*,**30**(1998),468(in Chinese)[梅凤翔、吴润衡、张永发,力学学报,**30**(1998),468].

[8] Feng-xiang Mei,*Appl. Math. Mech.*,**20**(1999),629.

[9] Feng-xiang Mei, Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems(Beijing Institute of Technology Press,Beijing,1985),p.424(in Chinese)[梅凤翔,非完整系统力学基础(北京工业学院出版社,北京,1985),第424页].

[10] P. Appell,Traité de Mécanique Rationnelle,Vol Ⅱ,Sixième ed.(Gauthier-Villars,Paris,1953),p.344.

LIE SYMMETRIES AND CONSERVED QUANTITIES OF NONHOLONOMIC SYSTEMS WITH SERVOCONSTRAINTS*

MEI FENG-XIANG

(*Department of Applied Mechanics*,*Beijing Institute of Technology*,*Beijing* 100081, *China*)

(Received 14 November 1999; revised manuscript received 17 December 1999)

ABSTRACT

Using the invariance of the algebraic equations and the differential equations under the infinitesimal transformations, we study the Lie symmetries and conserved quantities of the nonholonomic systems with servoconstraints. We establish the determining equations,the restriction equations and the structure equation,and give the form of conserved quantities.

Keywords: nonholonomic system, servoconstraint, Lie symmetry, conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.19972010) and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China.