第 49 卷 第 8 期 2000 年 8 月
1000-3290/2000/49(08)/1409-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 8, August, 2000
©2000 Chin. Phys. Soc.

齐次平衡法、Weiss-Tabor-Carnevale 法及 Clarkson-Kruskal 约化法之间的联系*

范恩贵
（复旦大学数学研究所，上海 200433）
（1999 年 12 月 11 日收到）

扩充齐次平衡法的应用范围，用于寻找非线性数学物理方程的 Bäcklund 变换和相似约化，其结果分别等同于 Weiss-Tabor-Carnevale（WTC）法及 Clarkson-Kruskal（CK）法结果，并从理论上进一步说明三种方法之间的密切联系.

关键词：齐次平衡法，WTC 法，CK 约化法
PACC：0340K，0290

1 引 言

近年来，提出并发展起来的齐次平衡法、Weiss-Tabor-Carnevale（缩写为 WTC）法和 Clarkson-Kruskal（缩写为 CK）约化法是直接处理非线性偏微分方程的三种十分有效方法，具有直接、步骤分明的特点，并且可利用符号运算在计算机上实现，目前这些方法已在非线性数学物理中得到广泛应用[1—17]. 对给定方程，如两个自变量的 m_0 阶非线性偏微分方程

$$P(u,\partial_x u,\partial_t u\ldots,\partial_x^{m_0}u)=0,\tag{1}$$

齐次平衡法的关键是，寻找方程（1）关于 $f(w)$，$f(w)_x$，$f(w)_t$，…适当线性组合形式的解，为使讨论简单明了，我们仅假设它的解为如下形式：

$$u(x,t)=\partial_x^m f(w),\tag{2}$$

其中 m 为正整数，可由最高导数项 $\partial_x^{m_0}u$ 与非线性项间平衡得到，而 $f=f(w)$，$w=w(x,t)$ 为待定函数，可分别通过求解常微分方程及代数方程组确定，由此可构造非线性方程的孤子解[1—5]，同时也可推广用于获得非线性数学物理方程更多的精确解和多孤子解[6—8]. WTC 法的关键是，在 $w(x,t)=0$ 的邻域内构造方程（1）解的如下 Laurent 展开：

$$u(x,t)=w^{-\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}u_j(x,t)w^j.\tag{3}$$

WTC 法不仅可有效地用于研究许多非线性系统的可积性及不可积系统特殊类型的解，而且可导出方程的 Lax 对和 Backlund 变换[9—12]. CK 直接约化法关键是寻找方程（1）如下形式的相似解：

$$u(x,t)=\alpha(x,t)+\beta(x,t)Q(w(x,t)).\tag{4}$$

这种方法不涉及群理论，一般计算量小，且可获得比群论更多的相似约化[14—17]. 本文的目的是扩充齐次平衡法的应用范围，使之可简捷地获得非线性数学物理方程的 Bäcklund 变换及相似约化，并且相应的结果可与 WTC 法及 CK 直接约化法的结果一致，同时从理论上说明这三种方法在（2）—（4）式之间的密切联系.

2 利用齐次平衡法寻找 Bäcklund 变换及其与 WTC 法的联系

基于齐次平衡法的思想，我们在（2）式中增加一个调整项 $\tilde{u}(x,t)$，即寻求方程（1）如下形式 Bäcklund 变换：

$$u=\partial_x^m f(w)+\tilde{u},\tag{5}$$

其中 u，$\tilde{u}$ 为方程（1）的两个解，m，$f(w)$ 可用类似于齐次平衡法的过程得到，而 w 满足一定的相容方程，由此便得到方程（1）的 Bäcklund 变换.

结论：利用（5）式得到的 Bäcklund 变换等同于 WTC 法 Painlevé 展开（3）式在 w^0 项截尾且 $m=\alpha$，

* 国家基础性研究重大项目“数学机械化与自动推理平台”（批准号：G1998030600）和中国博士后基金资助的课题.

不同的是，m 通过比较 w_x 的最高次幂得到，α 通过比较 w 的最低次幂得到，并且利用(5)式寻找 Bäcklund 变换，不必讨论 w 的递推关系和共振点.

证明：将(5)代入方程(1)经计算整理后，把所有含 $\partial_x^{m+m_0}w$ 的项放在一起，令其系数为零，可得如下形式的齐次常微分方程：

$$f^{m+m_0}(w)+\sum_{i_1+\ldots+l_k=m+m_0}a_{i_1\ldots i_k}\cdot f^{(l_1)}(w)\ldots f^{(l_k)}(w)=0, \qquad (6)$$

其中 $f^{(\cdot)}$表示 $f(w)$对 w 的微分，显然方程(6)具有对数形式的解

$$f=a\ln w,$$

其中 a 满足

$$(-1)^{m+m_0-1}(m+m_0-1)!a+\sum(-1)^{m+m_0-k}\cdot(i_i-1)!\ldots(i_k-1)!a^k=0.$$

因此 u 可展开为 w 的级数形式

$$u=a\partial_x^{m-1}\left(\frac{w_x}{w}\right)+\tilde{u}=\frac{\tilde{u}_0}{w^m}+\ldots+\frac{\tilde{u}_{m-1}}{w}+\tilde{u},$$

其中

$$\tilde{u}_0=(-1)^{m-1}(m-1)!aw_x^m,\cdots,\tilde{u}_{m-1}=a\partial_x^m w.$$

这恰好为 WTC 法 Laurent 展开(3)式在 w^0 项结尾结果，其中 $\alpha=m$，$u_0=\tilde{u}_0$，…，$u_{m-1}=\tilde{u}_{m-1}$，$u_m=\tilde{u}$.

下面通过熟知的 KdV 方程来具体说明：

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0. \qquad (7)$$

根据(5)式，平衡 u_{xxx}与 uu_x 二项，可得 $m=2$，因此寻找 KdV 方程如下形式的 Bäcklund 变换：

$$u=f''w_x^2+f'w_{xx}+\tilde{u}. \qquad (8)$$

将(8)式代入(7)式，可得

$$\begin{aligned}&(6f''f'''+f^{(5)})w_x^5+(18f''^2+6f'f'''+10f^{(4)})w_x^3w_{xx}+(f'''w_x^2w_t+6f'f''w_x^2w_{xxx}\\&+18f'f''w_xw_{xx}^2+6f'''w_x^3\tilde{u}+15f'''w_xw_{xx}^2+10f'''w_x^2w_{xxx})+(2f''w_xw_{xt}+f''w_tw_{xx}\\&+6f''w_x^2\tilde{u}_x+18f''w_xw_{xx}\tilde{u}+6f'^2w_{xx}w_{xxx}+10f''w_{xx}w_{xxx}+5f''w_xw_{xxxx})+(w_{xxt}\\&+w_{xx}\tilde{u}+w_{xxx}\tilde{u}+w_{xxxxx})f'=0.\end{aligned} \qquad (9)$$

为简化方程(9)，令 w_x^5 的系数为零，得到如下常微方程：

$$f^{(5)}+6f''f'''=0.$$

显然，这个方程有对数形式的解

$$f=2\ln w. \qquad (10)$$

进而导出如下关系：

$$f''^2=-\frac{1}{3}f^{(4)},\quad f'f'''=-\frac{2}{3}f^{(4)},\quad f'f''=-f''',\quad f'^2=-2f'', \qquad (11)$$

利用(11)式，方程(9)可表示为 f'，f''，f'''及$f^{(4)}$的级数形式，令其系数分别为零，得到

$$w_x(w_xw_t+4w_xw_{xxx}-3w_{xx}^2+6u_1w_x^2)=0,$$

$$w_x(w_{xt}+6w_{xx}\tilde{u}+w_{xxxx})+\frac{\partial}{\partial x}\cdot(w_xw_t+6w_x^2\tilde{u}+4w_xw_{xxx}-3w_{xx}^2)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(w_{xt}+6w_{xx}\tilde{u}+w_{xxxx})=0.$$

显然欲使上述条件成立，只须

$$w_{xt}+6w_{xx}\tilde{u}+w_{xxx}=0, \qquad (12)$$

$$w_xw_t+4w_xw_{xxx}-w_{xx}^2+6w_x^2\tilde{u}=0. \qquad (13)$$

于是由(8)，(10)式，便得到 KdV 方程的 Bäcklund 变换

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln w+\tilde{u},$$

其中 w 满足(12)和(13)式，这一结果等同于 WTC 截尾展开[9]

$$u=\frac{u_0}{w^2}+\frac{u_1}{w}+u_2,$$

其中 $u_0=-2w_x^2$，$u_1=2w_{xx}$，$u_2=\tilde{u}$.

3 利用齐次平衡法用于寻找相似约化及其与 CK 法的联系

这一节我们推广齐次平衡法用于寻找非线性发展方程的相似约化，并说明与 CK 直接约化法的联系，与上一节不同的是(5)式中的 $\tilde{u}$ 不再看成方程(1)的初始解，而做为待定函数使用，将(5)式代入(1)式中后，将 f 关于 w 相同微分项放在一起，其系数为 w，$\tilde{u}$ 的函数，为使相应的方程为 f 关于 w 的常微方程，因而要求这些系数之比仅为 w 的函数，在确定自由度 w，$\tilde{u}$ 时可采用如下规则：

1) 若 $\tilde{u}=u_0+\partial_x^m\Omega(w)$，可取 $\Omega(w)=0$ (作变换 $w\to f(w)-\Omega(w)$)；

2）若 $w(x,t)$，由方程 $\Omega(w)=w_0(x,t)$ 确定，$\Omega(w)$ 可逆，可取 $\Omega(w)=w$　（作变换 $w\to\Omega^{-1}(w)$）.

由上述方法可得到方程(1)的相似约化.

结论：利用(5)式所得到的相似约化可等同于 CK 方法(4)式相应结果，但由于减少了一个自由度，计算更为简便.

证明：将(5)式代入方程(1)时，至少在最高微分项 $\partial_x^{m_0}u$ 中，会出现 $w_x^{m+m_0}f^{(m+m_0)}(w)$ 及 $C_m^2 w_x^{m+m_0-2}w_{xx}f^{(m+m_0)}(w)$ 两项，从而利用规则 1)，2)，在规范化系数过程中，由 $w_x^{m+m_0-2}w_{xx}=w^{m+m_0}\Gamma(w)$ 决定的 w 为 $w=\theta(t)x+\sigma(t)$ 形式，因此有 $w_{xx}=0$ 及所得相似解为

$$u=\partial_x^m f(w)+\tilde{u}=w_x^m f^{(m)}(w)+\tilde{u}.$$

与 CK 约化法的相似解形式(4)式比较，得到

$$\alpha(x,t)=\tilde{u},\quad \beta(x,t)=w_x^m,$$
$$Q(w)=f^{(m)}(w).$$

这里我们仍以 KdV 方程为例来说明，将(8)式代入(7)式可得

$$\begin{aligned}&w_x^5(f^{(5)}+6f''f''')+w_x^3w_{xx}(18f''^2+6f'f'''+10f^{(4)})+(w_tw_x^2+15w_xw_{xx}^2\\&+10w_x^2w_{xxx}+6w_x^3\tilde{u})f'''+(6w_x^2w_{xx}+18w_xw_{xx}^2)f'f''+(2w_xw_{xx}+w_tw_{xx}\\&+10w_{xx}w_{xxx}+5_xw_{xxxx}+6w_x^2\tilde{u}_x+18w_xw_{xx}\tilde{u})f''+6w_{xx}w_{xxx}f'^2+(w_{xxx}\\&+w_{xx}\tilde{u}_x+w_{xxx}\tilde{u}+w_{xxxxx})f'+\tilde{u}_t+6\tilde{u}\tilde{u}_x+\tilde{u}_{xxx}=0.\end{aligned}\tag{14}$$

欲使(14)式为 f 关于 w 的常微分方程，则要求 f 的各阶导数系数之比仅为 w 的函数，即下列限制条件应满足：

$$w_x^3w_{xx}=w_x^5\Gamma_1(w),\qquad w_tw_x^2+15w_xw_{xx}^2+10w_x^2w_{xxx}+6w_x^3\tilde{u}=w_x^5\Gamma_2(w),$$
$$6w_x^2w_{xx}+18w_xw_{xx}^2=w_x^5\Gamma_3(w),$$
$$2w_xw_{xt}+w_tw_{xx}+10w_{xx}w_{xxx}+5w_xw_{xxxx}+6w_x^2\tilde{u}_x+18w_xw_{xx}\tilde{u}=w_x^5\Gamma_4(w),$$
$$6w_{xx}w_{xxx}=w_x^5\Gamma_5(w),\qquad w_{xxx}+w_{xx}\tilde{u}_x+w_{xxx}\tilde{u}+w_{xxxxx}=w_x^5\Gamma_6(w),$$
$$\tilde{u}_t+6\tilde{u}\tilde{u}_x+\tilde{u}_{xxx}=w_x^5\Gamma_7(w),$$

其中 $\Gamma_i(w)$ $(i=1,2,\ldots,7)$ 为待定函数. 利用规则 1)，2)求解上述方程得

$$\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma_3=\Gamma_5=\Gamma_6=0,\quad \Gamma_4=A,$$
$$\Gamma_7=-\frac{1}{3}(A^2w+B).$$

相似约化为

$$u=\theta^2P(w)-\frac{1}{6\theta}(\theta'x+\sigma'),\quad w=\theta x+\sigma,$$

其中 $\theta=\theta(t)$，$\sigma=\sigma(t)$，$P(w)=f''$ 满足

$$\theta'=A\theta^4,\quad \theta\sigma''-2\theta'\sigma'=2\theta^7(A^2\sigma+B).$$
$$P'''+6PP'+AP-\frac{1}{3}(A^2w+B)=0.$$

进一步讨论可得如下三种情况：

1）$A=B=0$ 时，可得行波型约化

$$u=P-\frac{1}{6}c,\quad w=x+ct.$$
$$P'''+6PP'=0.$$

2）$A=0$，$B\neq0$ 时，相似约化为

$$U=P(w)-2Bt+c,\quad w=x+Bt^2+ct,$$
$$P'''+6PP'-\frac{1}{3}B=0.$$

3）$A\neq0$ 时，不妨设 $A=-\frac{1}{3}$，$B=0$，可得相似约化

$$u=-t^{-2/3}P(w)+\frac{1}{3}t^{-1}x-\frac{2}{3}c,$$
$$w=-t^{-1/3}x+ct^{2/3},$$
$$P'''+6PP'+AP-\frac{1}{3}A^2w=0.$$

显然这些约化结果与 CK 法中使用如下约化形式[13,14]：

$$u=\alpha+\beta Q(w),$$

所得的结果一致，其中 $\alpha=\tilde{u}$，$\beta=w_x^2$，$Q(w)=P(w)=f''(w)$.

感谢导师谷超豪院士、胡和生院士详细指导和热情帮助.

[1] M.L. Wang, *Phys. Lett.*, **A199** (1995), 169.
[2] M.L. Wang, *Phys. Lett.*, **A213** (1996), 279.
[3] M.L. Wang, Y.B. Zhou, Z.B. Li, *Phys. Lett.*, **A216** (1996), 67.
[4] Z.B. Li, M.L. Wang, *Adv. Math.*, **26** (1997), 129.
[5] Z.B. Li, S.Q. Zhang, *Acta Math. Phys. Sin.*, **17** (1997), 1 (in Chinese) [李志斌、张善卿,数学物理学报,**17** (1997), 1].
[6] E.G. Fan, H.Q. Zhang, *Acta Physica Sinica*, **46** (1997), 1254 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆,物理学报, **46** (1997), 1254].
[7] E.G. Fan, H.Q. Zhang, *Phys. Lett.*, **A245** (1998), 389.
[8] J.F. Zhang, *Acta Physica Sinica*, **47** (1998), 1416 (in Chinese) [张解放,物理学报, **47** (1998), 1416].
[9] J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevale, *J. Math. Phys.*, **24** (1983), 522.
[10] J. Weiss, *J. Math. Phys.*, **24** (1984), 1405.
[11] J. Weiss, *J. Math. Phys.*, **25** (1984), 13.
[12] S.Y. Lou, *Phys. Lett.*, **A176** (1993), 96.
[13] P.A. Clarkson, M.D. Kruskal, *J. Math. Phys.*, **30** (1989), 2201.
[14] P.A. Clarkson, J.Phys., **A22** (1989), 2355.
[15] S.Y. Lou, *J. Math. Phys.*, **33** (1992), 4300.
[16] P.A. Clarkson, S. Hood, *J. Phys.*, **A26** (1993), 133.
[17] S.Y. Lou, H.Y. Ruan, *J. Phys.*, **A26** (1993), 4679.

CONNECTIONS AMONG HOMOGENEOUS BALANCE METHOD, WEISS-TABOR-CARNEVALE METHOD AND CLARKSON-KRUSKAL METHOD*

FAN EN-GUI

(*Institute of Mathematics*, *Fudan University*, *Shanghai* 200433, *China*)

(Received 11 December 1999)

ABSTRACT

The homogeneous balance method is extended to search for the Bäcklund transformations and similarity reductions of nonlinear mathematical and physical equations. The corresponding results coincide with those of Weiss-Tabor-Carnevale method and Clarkson-Kruskal method respectively. It is shown that there exist close relations among these three methods.

Keywords: homogeneous balance method, WTC method, CK reduction method

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the National Basic Research Foundation "Mathematical Mechaniration and a Platform for Automated Reasoning" of China (Grant No. G1998030600) and by the National Science Foundation of Post Doctorate Research of China.