

满足热力学第三定律的修正的黑洞的熵公式

林 海

(北京大学物理系 北京 100871)

(2000 年 2 月 2 日收到 2000 年 3 月 8 日收到修改稿)

认为黑洞的熵正比于视界面积的熵公式 $S = A/4$ 不能满足热力学第三定律,提出了新的熵公式,它既能满足热力学第三定律,又能推出黑洞的温度的表达式.

关键词:黑洞,熵,热力学第三定律

PACC: 0420

1 引 言

在过去的研究中,黑洞的热力学性质得到了深入的探讨,黑洞的温度被视作表面的引力强度^[1],对于史瓦西黑洞即有(本文中取 $h = k = G = c = 1$)

$$T = \frac{g}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M}, \quad (1)$$

其中 M 为黑洞的质量,而黑洞的熵被视作视界面积^[2],即有

$$S = \frac{A}{4}, \quad (2)$$

其中

$$A = 8\pi [M^2 + M(\sqrt{M^2 - J^2/M^2 - Q^2}) - Q^2/2], \quad (3)$$

式中 J, Q 分别为黑洞的角动量和电量.

科学家建立起了与热力学四条定律相对应的黑洞热力学四定律^[3,4]. Hawking^[5]从理论上证明了黑洞热辐射效应的存在,确认了黑洞具有真正的温度.近年来,黑洞温度的研究得到较大的进展,而黑洞的熵的研究却相对没有得到较满意的结果^[6-9].

事实上(2)式中黑洞的熵显然不能满足热力学第三定律^[10],即能斯特定理:一个系统的温度趋于零时,它的熵趋于一个常量.根据 Planck 规范的要求,这个常量为零.因为当黑洞为极端黑洞,即当 $T \rightarrow 0$ 时, $T = \left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_{J,Q} \rightarrow 0$,由(2)(3)两式得 $S \rightarrow \pi\sqrt{Q^4 + 4J^2} \neq 0$.所以这样定义的熵不能满足热力学第三定律,不是普朗克绝对熵.

为了解决这个矛盾,一些科学家,如 Hawking,

Teitelbom, Gibbons 等主张重新定义极端黑洞的熵^[11-15],他们认为应该等于零,而另一些科学家,如 Loran, Hiscock, Zaslavskii 等^[16-21]则主张极端黑洞的熵为 $A/4$.目前还在争论中.

本文同意前一派的观点,并且重新定义了黑洞的绝对熵,它既能满足热力学第三定律,又能推出黑洞的温度以及其他一些热力学性质的表达式.下面将论述推导过程,并且分析从新的熵公式推导出的温度与以前的结果是一样的.

2 新的黑洞的熵公式

本文中要推出的新的熵的表达式,它需要满足如下三个条件:

1) 满足方程

$$dM = TdS + \Omega dJ + VdQ, \quad (4)$$

其中 Ω, V 分别表示黑洞的角速度和电势;

2) 满足极限关系 $T \rightarrow 0$ 则 $S \rightarrow 0$;

3) 在一定条件下能够化为原来的形式,即(2)式.

那么,由(4)式得到

$$T = \left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_{J,Q} = \left(\frac{\partial M}{\partial A}\right)_{J,Q} \left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_{J,Q}, \quad (5)$$

由(3)式得到

$$\left(\frac{\partial M}{\partial A}\right)_{J,Q} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{8\pi M} - \left(\frac{Q^4}{4} + J^2\right) \frac{8\pi}{MA^2} \right], \quad (6)$$

为了满足条件 3),假设新的黑洞的熵表示为

$$S = \frac{A - A_0}{4}, \quad (7)$$

其中 A_0 是一个修正项,它可能是 M, J, Q 的函数.

由(7)式得到

$$\left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_{J,Q} = 4 + \left(\frac{\partial A_0}{\partial M}\right)_{J,Q} \left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_{J,Q}, \quad (8)$$

由(5)和(8)式得到

$$\left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_{J,Q} = 4 + T \left(\frac{\partial A_0}{\partial M}\right)_{J,Q}. \quad (9)$$

将(6)和(9)式代入(5)式得到

$$\left(\frac{\partial A_0}{\partial M}\right) = \frac{32\pi MA^2}{A^2 - 16\pi^2(Q^4 + 4J^2)} - \frac{4}{T}. \quad (10)$$

为了满足条件2),即 $T \rightarrow 0$, 则 $S \rightarrow 0$, 由(7)式, 得到 $T \rightarrow 0$, 则 $A \rightarrow A_0$. 所以 A_0 为黑洞零温时的视界面积, 由(3)式得到

$$A_0 = 4\pi \sqrt{Q^4 + 4J^2}, \quad (11)$$

从而

$$\frac{\partial A_0}{\partial M} = 0. \quad (12)$$

由(10)和(12)式得到

$$T = \frac{A^2 - 16\pi^2(Q^4 + 4J^2)}{8\pi MA^2} = \frac{A^2 - A_0^2}{8\pi MA^2}. \quad (13)$$

当 $T \rightarrow 0$, 有 $T \rightarrow A_0$, $S \rightarrow 0$, 满足条件2), 并且当黑洞不旋转不带电量时(7)式能够转化为(2)式. 所以这个表达式是符合要求得到修正的黑洞的普朗克绝对熵公式.

3 由新的黑洞的熵公式推导的黑洞的温度、热容量、辐射功率

由(13)式得到温度的表达式为

$$T = \frac{1}{8\pi M} \left(1 - \frac{A_0^2}{A^2}\right). \quad (14)$$

当黑洞不旋转不带电量时(14)式与(1)式是相同的.

由(14)式可得到热容量为

$$C_v = C_A = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_A = -\frac{8\pi M^2}{(1 - A_0^2/A^2)}. \quad (15)$$

当黑洞不旋转不带电量时

$$C_v = -8\pi M^2. \quad (16)$$

再由(14)式得到热辐射功率为

$$P = \frac{\partial M}{\partial t} = \sigma AT^4 = \frac{\sigma A}{(8\pi)^4 M^4} \left(1 - \frac{A_0^2}{A^2}\right)^4. \quad (17)$$

当黑洞不旋转不带电量时

$$P = \frac{\sigma}{(8\pi)^3 M^2}. \quad (18)$$

4 讨 论

本文中给出的黑洞的普朗克绝对熵公式当黑洞

不旋转不带电量时是与原有公式一致的. 本文中之所以加一个修正项 A_0 是因为在原定义下 $T \rightarrow 0$, $S \neq 0$ 的原因是角动量和电量的存在, 使得黑洞还有一些原定义下的熵. 如果把这个值减去那么就是绝对熵了. 同时由于这个值与 M 无关, 即 $\frac{\partial A_0}{\partial M} = 0$, 所以能够很快得出温度与视界面积、质量、电量和角动量的关系, 即(13)式, 在这里温度的表达式实际上与原有理论是一样的.

从而后面给出的热容量和辐射功率也是与原有理论是一样的, 这使得新的熵公式并没有触动黑洞的其他热力学性质的修正, 正好那些性质的研究是比较成熟的, 而又能使得这样定义的熵完全满足热力学第三定律. 本文认为这种修正是有意义的.

还需要说明的是, 黑洞的熵是可以减小的, 而视界面积是不能减小的. 在黑洞热力学第三定律中, 要求的是黑洞的熵与背景时空的熵总和不能减小, 即 $S = S_{\text{bh}} + S_{\text{b}}$ 不能减小. 事实上, 通过向黑洞射入电荷和具有角动量的物质, 以增加 Q^2 和 J^2 的值, 从(3)(7)和(11)式能够看出, 黑洞的熵是可能减小的. 另外 Hawking 蒸发也能够使黑洞的熵减小. 所以从这些地方看来把黑洞的熵定义为正比于视界面积甚至是错误的, 因为这样就否定了黑洞的熵能够减小.

最后, 本文认为黑洞的熵的问题还需要进一步研究, 然而究竟新的定义对不对, 需要实验的证据, 然而从新的黑洞的熵推出的一系列热力学性质并没有变, 从而实验证据是很难找的. 新的熵推出的与原有理论有一个不同点是 Ω 和 V 的表达式, 因为 $\frac{\partial A_0}{\partial J}$

$\neq 0$, $\frac{\partial A_0}{\partial Q} \neq 0$ 从而

$$\begin{aligned} \Omega &= -T \left(\frac{\partial S}{\partial J}\right)_{M,Q} = \Omega_{\text{old}} + \frac{T}{4} \left(\frac{\partial A_0}{\partial J}\right)_{M,Q} \\ &= \Omega_{\text{old}} + \frac{4\pi JT}{\sqrt{Q^4 + 4J^2}} \neq \Omega_{\text{old}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= -T \left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)_{M,J} = V_{\text{old}} + \frac{T}{4} \left(\frac{\partial A_0}{\partial Q}\right)_{M,J} \\ &= V_{\text{old}} + \frac{2\pi Q^3 T}{\sqrt{Q^4 + 4J^2}} \neq V_{\text{old}}, \end{aligned}$$

其中 Ω_{old} , V_{old} 表示原有理论下的角速度和电势值. 因此如果能找到角速度和电势观测值偏离原有理论计算量正好分别等于 $\frac{4\pi JT}{\sqrt{Q^4 + 4J^2}}$ 和 $\frac{2\pi Q^3 T}{\sqrt{Q^4 + 4J^2}}$ 时, 那么很有可能原有的定义的确是错误的.

- [1] J. M. Bardeen ,B. Carter ,S. W. Hawking ,*Commun. Math. Phys.* **31**(1973) ,161.
- [2] S. W. Hawking , *Commun. Math. Phys.* **25**(1972) ,152.
- [3] J. Bekenstein ,Ph. D. Thesis(Princeton University ,1972).
- [4] L. Smarr ,*Phys. Rev. Lett.* **30**(1973) ,71.
- [5] S. W. Hawking , *Commun. Math. Phys.* **43**(1975) ,199.
- [6] W. G. Unruh ,R. M. Wald , *Phys. Rev.* **D25**(1982) ,942.
- [7] V. P. Frolov ,D. N. Page , *Phys. Rev. Lett.* **71**(1993) ,3902.
- [8] R. M. Wald ,*Quantum Field Theory in Curved Space – Time and Black Hole Thermodynamics* (University of Chicago Press , Chicago ,1994).
- [9] V. P. Frolov ,I. D. Novikov , *Black Hole Physics* (Kluwer Academic Publishers ,Netherlands ,1998).
- [10] R. M. Wald , *Phys. Rev.* **D56**(1997) ,6467.
- [11] S. W. Hawking ,G. Horowitz ,S. Ross , *Phys. Rev.* ,**D51**(1995) ,4302.
- [12] G. W. Gibbons ,R. E. Kallosh , *Phys. Rev.* **D51**(1995) ,2839.
- [13] C. Teitelbom , *Phys. Rev.* **D51**(1995) ,4315.
- [14] A. Ghosh ,P. Mitra , *Phys. Rev. Lett.* **77**(1996) ,4848.
- [15] A. Ghosh ,P. Mitra , *Phys. Rev. Lett.* **78**(1996) ,1858.
- [16] D. J. Loranz *et al.* , *Phys. Rev.* **D52**(1995) ,4554.
- [17] O. B. Zaslavskii , *Phys. Rev. Lett.* **76**(1996) ,2211.
- [18] O. B. Zaslavskii , *Phys. Rev.* **D56**(1997) ,2188.
- [19] O. B. Zaslavskii , *Phys. Rev.* **D56**(1997) ,6695.
- [20] D. J. Konkowski ,T. M. Helliwell , *Phys. Rev.* ,**D54**(1996) , 7898.
- [21] J. M. Maldacena ,A. Strominger , *Phys. Rev. Lett.* **77**(1996) , 428.

A NEW ENTROPY OF BLACK HOLE IN ACCORDANCE WITH THE THIRD LAW OF THERMODYNAMICS

LIN HAI

(*Department of Physics ,Peking University ,Beijing 100871 , China*)

(Received 2 February 2000 ; revised manuscript received 8 March 2000)

ABSTRACT

I disagree to the former definition of black hole entropy which does not obey the third law of thermodynamics ,and thus propose a new entropy formula which conforms to thermodynamics.

Keywords : black hole , entropy , third law of thermodynamics

PACC : 0420