

一种新的基于系统变量延迟反馈的控制混沌方法^{*}

罗晓曙¹⁾ 方锦清²⁾ 孔令江¹⁾ 翁甲强¹⁾

¹⁾ 广西师范大学物理与电子科学系 桂林 541004)

²⁾ 中国原子能科学研究院 北京 102413)

(1999 年 12 月 1 日收到, 2000 年 2 月 15 日收到修改稿)

提出了一种新的基于系统变量延迟反馈的控制混沌方法, 给出了三个典型混沌系统的控制结果. 由于控制代价小, 使得这种控制方法十分容易在实际系统中实现, 因而具有较好的应用前景. 同时根据李雅谱诺夫函数的平均值的变化讨论了该法实现混沌控制的物理机理.

关键词: 混沌控制, 延迟反馈, 李雅谱诺夫函数

PACC: 0545, 4265

1 引 言

目前, 混沌控制及其超混沌和时空混沌控制已成为非线性科学中一个研究热点, 该领域的研究已呈现出了十分美好的应用前景^[1], 国内外的科学工作者们已提出了大量的混沌控制方法^[2-11], 适应于各种不同系统的混沌控制. 但目前已有的文献中较少讨论控制的代价问题和实际的可实现问题. 我们认为: 一种控制混沌方法的价值, 并不能仅仅从它的数学的严密性和模型的精确性来体现, 其实现控制的代价和实际的可实现问题也应是衡量控制方法优劣的重要标准之一. 例如建立在精确数学模型和严密数学理论基础上的现代控制理论在实际工程控制中并没有得到广泛的应用, 在混沌控制中也存在同样的问题. 例如 OGY^[2]混沌控制方法, 其控制理论是很严密和完备的, 但是很多情况下, 我们难以在实际系统中找到一个可调的参数来达到混沌控制, 即使找到了一个可调参数, 也并不一定就能达到控制目标. Pyragas^[3]提出的延迟反馈控制法虽然没有给出很完备的理论证明, 但这种方法不仅十分有效, 而且极易实现. 因此, 我们认为, 要使混沌控制在应用方面取得突破, 在设计控制方法时, 要遵循以下两条原则:

1. 控制的代价最小.
2. 物理上易于实现和操作.

2 控制方法与仿真模型

Pyragas 提出的延迟反馈控制混沌方法, 可用下述方程来描述:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= P(y, x) + F(t), \quad \dot{x} = Q(y, x), \\ F(t) &= k(y(t - \tau) - y(t)), \end{aligned} \quad (1)$$

式中反馈量 $F(t)$ 为系统某个变量的延迟值与当前值之差. 通过调整反馈系数 k 使被控系统的最大李雅谱诺夫指数由正值转变为负值, 从而达到混沌控制. 本文根据延迟反馈控制的原理, 提出了一种新的将系统某个(或几个)变量直接延迟反馈实现混沌控制的方法, 大量的数值模拟结果证明, 该方法不仅十分有效, 而且非常容易实现.

考虑如下的 N 维动力学系统:

$$\dot{X}(t) = F(X(t), \alpha, U(t)), \quad (2)$$

式中 $F = [f_1, f_2, \dots, f_n]$, f_i 为非线性函数或线性函数, 但 F 中至少有一个函数 f_q 为非线性函数, $q \in [1, n]$; $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$, 为 n 维状态向量; α 为系统的参数集, $U(t)$ 为输入向量(对自治系统此项为零). 通过适当的变换, 可以将 $U(t)$ 归结为状态向量, 因此, 对非自治系统, 总可以转化为自治系统, 所以下面讨论控制策略时仅涉及自治系统.

本文采用的控制策略是: 将状态向量空间 X 分解为两个子空间 X_A, X_B , 且 $X = X_A \cup X_B$. 其中

^{*} 广西壮族自治区教育厅科学基金(批准号: 9816940)和国家自然科学基金(批准号: 19875080)资助的课题.

$\mathbf{X}_A = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t)]$, $\mathbf{X}_B = [x_{i+1}(t - \tau), x_{i+2}(t - \tau), \dots, x_n(t - \tau)]$, 在某个时刻 t_i 起控后, 系统的演化方程为

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{X}_A(t), \mathbf{X}_B(t - \tau), \boldsymbol{\alpha}] \quad (3)$$

上述方法用方框图表示见图 1.

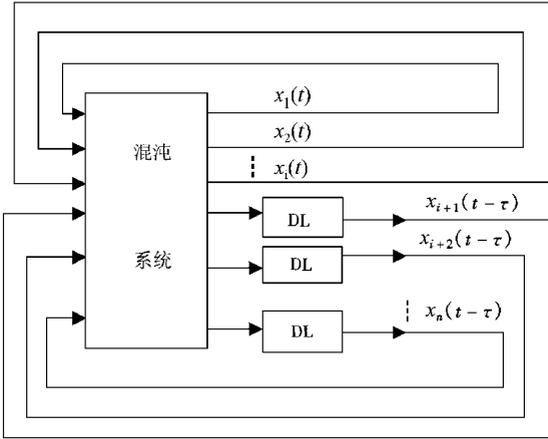


图 1 系统变量直接延迟反馈控制混沌方框图

本工作用三个混沌模型对此方法进行了数值模拟^[12-18], 均取得了很好的控制结果. 三种模型处于混沌态时的方程分别为

1. Lorenz 系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10.0(y - x), \quad \dot{y} = 28.0x - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - 8.0/3.0z; \end{aligned} \quad (4)$$

2. 杜芬 (Duffing) 方程

$$\ddot{x} + 0.3\dot{x} - x + x^3 = 0.4\cos 1.2t, \quad (5)$$

令 $\dot{x} = y$, $z = \cos 1.2t$, $w = \sin 1.2t$, 则可将杜芬方程化为如下的四变量状态变量方程:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \quad \dot{y} = -0.3y + x - x^3 + 0.4z, \\ \dot{z} &= -1.2w, \quad \dot{w} = 1.2z; \end{aligned} \quad (6)$$

3. 强迫布鲁塞尔振子处于混沌状态时耦合形式的方程

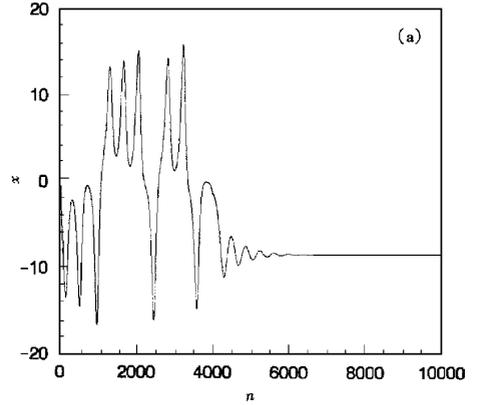
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0.4 - 2.2x + x^2y + 0.07z, \\ \dot{y} &= 1.2x - x^2y, \quad \dot{z} = -0.87w, \quad \dot{w} = 0.87z. \end{aligned} \quad (7)$$

3 控制结果

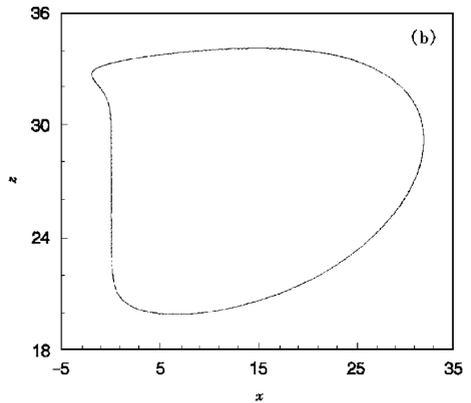
用四阶龙格-库塔法分别求解上述三个方程, 并采用双精度型数据以使控制精度得到保证, 得到三个混沌系统的控制结果分别如下图 2—4 所示.

4 控制机理分析

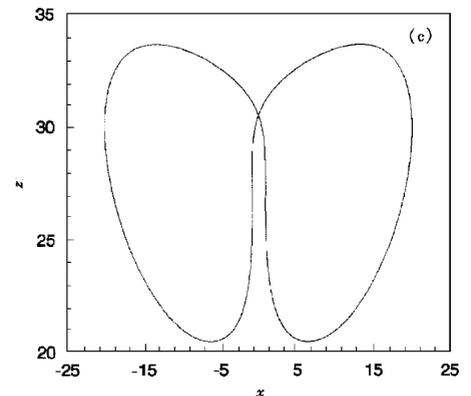
目前在混沌控制机理的分析方面, 绝大多数方法均是采用李雅谱诺夫指数作为判据. 系统受控后, 若其最大的李雅谱诺夫指数由正值转变为负值, 则



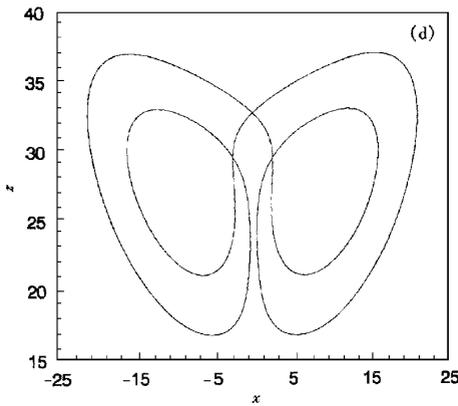
(a) 平衡点的控制结果 受控变量 $x(t - \tau)$; $\tau = 5\Delta t$



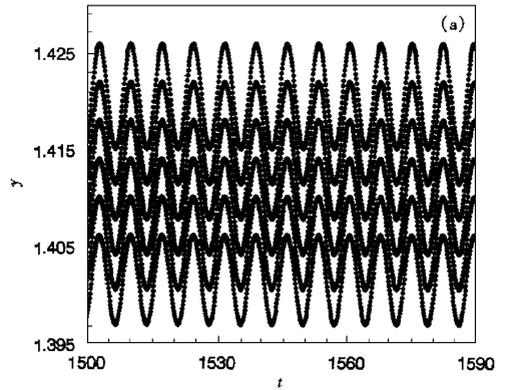
(b) 稳定的 1P 轨道 受控变量 $z(t - \tau)$; $\tau = 20\Delta t$



(c) 稳定的 2P 轨道 受控变量 $z(t - \tau)$; $\tau = 6\Delta t$

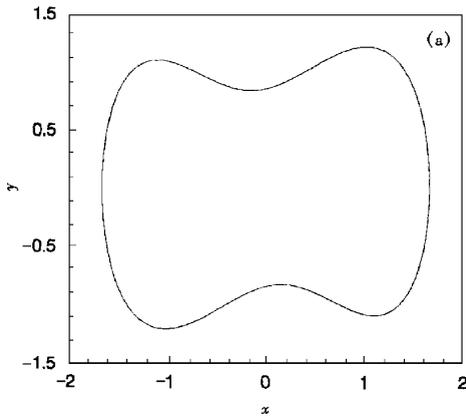


(d) 稳定的 4P 轨道 受控变量 $z(t-\tau); \tau=3\Delta t$

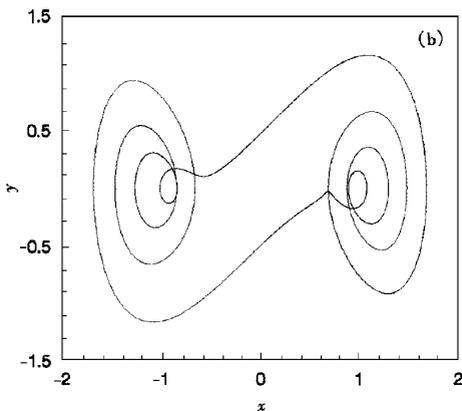


(a) 变量 y 的 6P 轨道 受控变量 $x(t-\tau); \tau=5\Delta t$

图 2 Lorenz 系统的控制结果(积分步长 $\Delta t=0.002$)

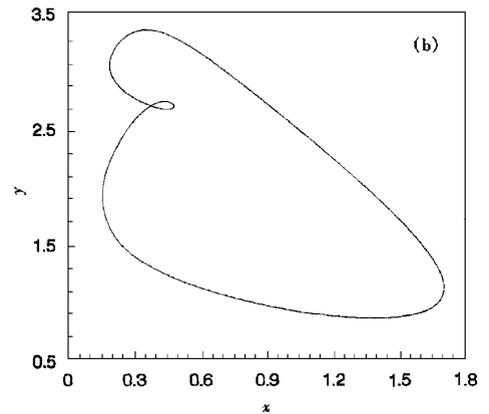


(a) 稳定的 1P 轨道 受控变量 $w(t-\tau); \tau=\Delta t$



(b) 稳定的 8P 轨道 受控变量 $z(t-\tau); w(t-\tau); \tau_z = t; \tau_w = 10\Delta t$

图 3 杜芬方程的控制结果(积分步长 $\Delta t=0.01$)



(b) 稳定的 2P 轨道 受控变量 $w(t-\tau); \tau=2\Delta t$

图 4 强迫布鲁塞尔振子的控制结果(积分步长 $\Delta t=0.02$)

认为系统已从混沌态转变为稳定的周期态. 对此判断仍存在争论, 而且高阶系统的李雅普诺夫指数计算十分困难. 在文献 [4] 中, 我们提出了一种通过减少系统的李雅普诺夫函数(即广义能量函数)的值实现混沌控制的方法, 并用该法分析了几种混沌控制方法的物理机理. 如滤波去^[5]、自适应控制法^[6]、延迟反馈法^[3]等, 发现以上诸法在使系统接近稳定状态的过程中, 其广义能量函数的平均值均呈指数减小. 这一结论与物理系统在能量最低时最稳定的原理是一致的.

下面我们采用上述方法来讨论本文控制方法的物理机理. 对于 Lorenz 系统, 取李雅普诺夫函数为

$$V = 28.0x^2 + 10.0y^2 + 10.0(z - 56.0)^2 \quad (8)$$

则
$$dV/dt = -20.0(28.0x^2 + y^2 + z^2$$

$$- 56 * 8/3z). \quad (9)$$

设 D 为其中 $dV/dt \geq 0$ 的有界域, C 是 V 在 D 中

的最大值,考虑其中有 $V \leq C + \epsilon$ 的有界椭圆 E , 这里 ϵ 是一个小正数,于是 E 外的点 x 也在 D 外,从而 $dV/dt \leq 0$. 如果轨线从这样一点 x 开始,则它的 V 值必定随时间的推移而减小,并在有限的时间内进入 E 内部. 以此类推,所有的轨线都会进入 E 内部,并永远留在其中.

如果采取的控制方法使 V 值减少,显然椭圆 E 的边界将会收缩,使得 $dV/dt \geq 0$ 的区域 D 减少,直至为零,此时系统在演化过程中总能满足 $dV/dt \leq 0$. 根据李雅普诺夫稳定性定理,若 V 是非凸的,则系统必将收敛到李雅普诺夫函数 V 的某个极小值状态,即系统达到某个稳定的状态. 图 5 和图 6 示出了 Lorenz 系统在被控制到平衡点和 2P 轨道时,函数 V 的平均值 \bar{V} 随时间的变化. 由图 5 和图 6 可以看出,随着系统被逐近控制到稳定的周期状态, \bar{V} 的值呈单调减小或振荡减小,可见图 5 和图 6 给出的结果与上述理论分析是一致的.

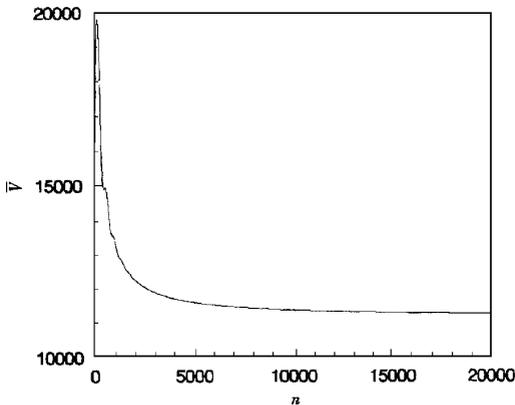


图 5 Lorenz 系统被控制到平衡点时 \bar{V} 随时间的演化

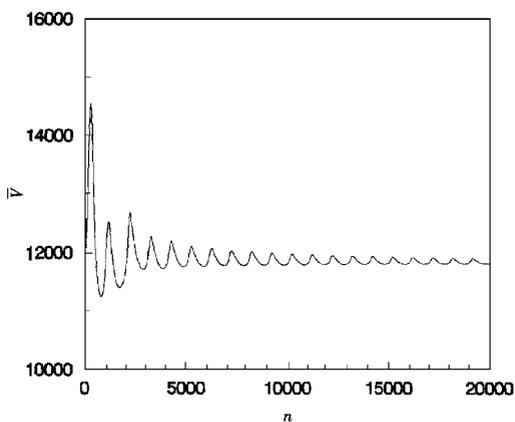


图 6 Lorenz 系统被控制到 2P 时 \bar{V} 随时间的演化

5 结论与讨论

本文采用一种将混沌系统的一个或几个变量直接延迟反馈的方法,成功地实现了连续自治和非自治系统中的混沌行为控制,进一步的数值模拟结果表明,该法也适应于离散混沌系统的控制. 通过对系统不同变量进行延迟和改变延迟时间 τ ,可以得到各种系统内的周期轨道,文中只给出了部分控制结果. 根据对大量控制结果的分析,我们总结出了该法具有如下一些特点和规律:

1. 延迟时间 τ 是一个关键的控制参数. 一般地,对自治连续系统,控制得到的周期轨道 nP 中的 n 与延迟时间 τ 存在近似反比关系,即 $n \propto 1/\tau$;而对于非自治连续动力学系统,当对强迫输入变量进行延迟反馈时,近似有 $n \propto \tau$.

2. 对同一系统的不同变量进行延迟反馈时,在延迟时间 τ 相同的情况下,得到的周期轨道数 n 不同.

3. 当混沌系统中的参数取某些值,使系统处于周期窗口时,采用该法控制时,系统又返回到混沌状态,即该法又能实现反混沌控制. 例如 Lorenz 系统, $\sigma = 10.0$, $\beta = 8/3$, $\rho = 126.52$ 时,为 6P 解,若 $Z(t) = Z(t - \tau)$ ($\tau = 0.002$),则系统的解又为蝴蝶型吸引子,若 $Z(t) = Z(t - 10\tau)$,则得到拟周期的控制结果.

4. 当控制得到的周期轨道在相图中满足对称性时,控制结果与起控时刻(等效于初值)无关;当控制得到的周期轨道在相图中不满足对称性时,控制结果与起控时刻(等效于初值)有关,从而具有二重或多重稳态解. Pyragas 延迟反馈法也存在此问题. 采用多变量延迟可有效地避免多重稳态解,但这又使控制代价增大,对此问题还需进一步研究.

5. 在实际工程问题中,混沌振动常会导致动力系统的非规则运动、机械系统的疲劳断裂以及电路系统的反常噪声,因此,这种混沌行为应设法避免. 由于在本文方法中,只对系统一个变量进行延迟反馈就可抑制掉混沌,因而控制代价很小. 故本文方法十分易于在实际系统中特别是电路系统中完成混沌抑制,只要在某个电压或电流信号的传输路径上设置一个延迟装置即可实现混沌控制,因而该法有很好的应用前景.

- [1] J. Q. Fang , *Progr. Phys.* , **16** (1996) , 191 (in Chinese) [方锦清 物理学进展 , **16** (1996) , 191] .
- [2] E. Ott , C. Grebogi , J. A. Yorke , *Phys. Rev. Lett.* , **64** (1990) , 1996 .
- [3] K. Pyragas , *Phys. Lett.* , **A170** (1992) , 421 .
- [4] X. S. Luo , J. Q. Fang *et al.* , *Acta Physica Sinica (Overseas Edition)* , **8** (1999) 895 .
- [5] X. S. Luo , L. J. Kong , W. L. Qu , *Acta Physica Sinica* , **47** (1998) , 1078 (in Chinese) [罗晓曙、孔令江、屈万里 物理学报 **47** (1998) , 1078] .
- [6] P. Q. Tong , *Acta Physica Sinica* , **44** (1995) , 169 (in Chinese) [童培庆 物理学报 **44** (1995) , 169] .
- [7] Y. Q. Cheng , G. R. Wang , S. G. Chen , *Chin. J. Comput. Phys.* , **14** (1997) , 264 (in Chinese) [成雁翔、王光瑞、陈式刚 计算物理 , **14** (1997) , 264] .
- [8] G. Hu , K. F. He , *Phys. Rev. Lett.* , **71** (1993) 3794 .
- [9] J. Guemez , M. A. Matias , *Phys. Lett.* , **A181** (1993) , 29 .
- [10] Y. H. Liu *et al.* , *Acta Physica Sinica* , **48** (1999) , 795 (in Chinese) [刘玉怀等 物理学报 , **48** (1999) , 795] .
- [11] F. Tang , Q. Qiu , *Acta Physica Sinica* , **48** (1999) , 795 (in Chinese) [唐 芳、邱 琦 物理学报 **48** (1999) , 802] .
- [12] G. R. Wang , S. G. Chen , B. L. Hao , *Acta Physica Sinica* , **32** (1983) , 1139 (in Chinese) [王光瑞、陈式刚、郝柏林 物理学报 **32** (1983) , 1139] .
- [13] G. R. Wang , *Acta Physica Sinica* , **32** (1983) , 960 (in Chinese) [王光瑞 , 物理学报 , **32** (1983) , 960] .
- [14] G. R. Wang , S. Y. Zhang , B. L. Hao , *Acta Physica Sinica* , **33** (1984) , 1008 (in Chinese) [王光瑞、张淑誉、郝柏林 物理学报 **33** (1984) , 1008] .
- [15] G. R. Wang , B. L. Hao , *Acta Physica Sinica* , **33** (1984) , 1321 (in Chinese) [王光瑞、郝柏林 物理学报 , **33** (1984) , 1321] .
- [16] G. R. Wang , S. G. Chen , B. L. Hao , *Chin. Phys. Lett.* , **1** (1984) , 11 .
- [17] G. R. Wang , S. G. Chen , B. L. Hao , *Acta Physica Sinica* , **33** (1984) , 1246 (in Chinese) [王光瑞、陈式刚、郝柏林 物理学报 **33** (1984) , 1246] .
- [18] B. L. Hao , *Progr. Phys.* , **3** (1983) 329 (in Chinese) [郝柏林 , 物理学进展 , **3** (1983) , 329] .

A NEW METHOD FOR CONTROL CHAOS BASED ON DELAY FEEDBACK OF SYSTEM VARIABLES^{*}

LUO XIAO-SHU^{a)} FANG JIN-QING^{b)} KONG LING-JIANG^{a)} WENG JIA-QIANG^{a)}

^{a)} Department of Physics and Electronic Science , Guangxi Normal University , Guilin 541004 , China)

^{b)} China Institute of Atomic Energy , Beijing 102413 , China)

(Received 1 December 1999 ; revised manuscript received 15 February 2000)

ABSTRACT

A new method for control chaos based on delay feedback of system variables is proposed. The control results of three typical chaotic systems are given. The method of control chaos can be easily realized in physical systems , for the control price of this method is low. The mechanism of the method is also discussed based on varied of average value of Lyapunov function.

Keywords : chaos control , delay feedback , Lyapunov function

PACC : 0545 , 4265

^{*} Project supported by the Science Foundation of Education Bureau of Guangxi Zhang Autonomous Region of China (Grant No. 9816940) and by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19875080) .