

像偶极子法计算导体颗粒簇团的偶极矩

姜泽辉[†] 许素娟

(哈尔滨工业大学, 哈尔滨 150001)

陈 唯 门守强 陆坤权

(中国科学院物理研究所, 北京 100080)

(1999 年 12 月 9 日收到, 2000 年 2 月 24 日收到修改稿)

计算均匀电场中颗粒簇团的偶极矩通常是困难的, 这是因为颗粒间的相互耦合较难处理. 这种相互耦合使颗粒的极化依赖于簇团的结构和大小. 利用像偶极子法对这种耦合加以分析. 首先, 分别考虑了置于纵向和横向电场中的任意间距的等径导体球对, 确定了各球上的像偶极子和像电荷及其分布. 之后, 计算了由 4 个置于正方形顶点和 8 个置于立方体顶点的导体球构成的簇团的偶极矩, 并给出紧凑表达式. 与先前的结果进行了比较, 获得了很好的一致性.

关键词: 偶极矩, 颗粒簇团, 像偶极子法, 分形

PACC: 4110D, 7730

1 引 言

在外电场或磁场作用下微粒结团或成链是一种经常观察到的现象, 如电流变液^[1]和磁流变液^[2]中. 颗粒簇团或链的极化特性对含有簇团或链结构的介质体系的表现介电性能有着重要影响^[3-5]. 因而了解颗粒簇团的极化特性如何随其结构和大小而变化是至关重要的. 确定颗粒簇团的偶极矩是一个电磁学多体问题. 其基本特征是颗粒间存在着复杂的相互作用. 这种相互作用使问题变得复杂而难以处理. 迄今, 除了双球问题外^[6-14], 精确的解析结果尚未见报道. 原因或许是由于缺乏合适的坐标系来对电势进行分离变量.

对于多球结构, 近些年的研究主要集中在颗粒链上. 分析链偶极矩的理论主要有: 1) 多极矩展开^[12, 13]; 2) 电像法^[14, 15]; 3) 最近邻近似^[15], 以及 4) 分形模型^[16, 17]等. 多极矩展开的优点是能直接处理颗粒上的多极矩及颗粒间的多极矩相互作用. 但当颗粒的相对介电常量较高时, 需要计及的高阶多极矩的项数极度增加, 而且数据求和的收敛速度迅速降低^[13]. 这种数据发散导致它难以用于导体球的情况. 电像法是将球链置于两个相距很远的点电荷中

间, 然后根据各球上像电荷的分布确定各球的偶极矩. 由于需要计及的高阶像电荷的数目随颗粒个数的增加而暴涨, 受计算机内存的限制, 这种方法难以用于较长的链. 目前的计算仅限于 2—7 个导体球^[14, 15]. 另外, 这种方法似乎难以用于含两个以上介质球的结构. 基于电像法的最近邻近似只考虑最近邻球之间的相互感应, 由此近似估算了含 N 导体球的链的偶极矩. 按照这一近似, 当 N 较大时链的总偶极矩与 N^3 成正比. 以上三种理论的特点是将颗粒间的相互作用离散化成计算颗粒中的高阶多极矩或高阶像电荷, 但由此带来的困难是难以将结果表示成简洁的解析式. 分形模型揭示了链偶极矩的分形特征, 并以一种迭代方式考虑颗粒间的相互作用^[16, 17]. 其优点是不受颗粒介电常量和个数的限制, 并能给出简洁的表达式. 不足之处是不能分析链内各成员球的极化情况.

对面结构和体结构颗粒簇团的研究较少. 最近, Doyle 和 Jacobs^[3, 4]对密堆积导体小球形成的球形簇团的偶极极化率及其与密堆积率的关系进行了分析, 并在此基础上分析了颗粒结团对金属—绝缘体复合介质等效介电常量的影响. 利用链偶极矩的分形模型, 最近对于按筒立方结构排列的介质或导体小球构成的簇团的偶极矩做了估算, 分析了簇团总

[†]E-mail: zehui.jiang@263.net

偶极矩随簇团的形状、结构和大小的变化情况^[18]. 这种处理同样不能分析簇团内各球的偶极矩,而且缺乏与其他理论和实验结果比较.为此,这里将运用像偶极子法对几种简单结构导体球簇团的偶极矩加以讨论,并与分形模型的结果进行对比.

对处于均匀电场中的一团导体球,外电场的作用是在每个球的球心上激发一个偶极矩.由于球间的相互感应,在每个球内将出现一系列的像偶极矩和像电荷.根据这些像偶极矩和像电荷的分布即可确定出每个球上感应出的偶极矩.确定这些像偶极矩和像电荷需要求解二阶差分方程.本文,首先讨论任意间距的等径导体双球问题,进而讨论简单面结构和体结构簇团的极化.

2 理 论

对于一个半径为 R 的接地导体球,如果距球心 r 处有一点电荷 q ,则在与球心的联线上距球心 $x = R^2/r$ 处产生一象电荷 $q' = -qR/r$.如果将源电荷 q 换成一个点偶极子 p_0 ,按照点电荷的成像原理,则在原像电荷的位置上会产生一个像偶极子^[19]

$$p' = \left(\frac{R}{r}\right)^3 p_0, \quad (1)$$

同时,还伴随一个点电荷

$$q'_p = \frac{R}{r^2} p_0 = \frac{r}{R^2} p'. \quad (2)$$

这个像电荷取正值,当源偶极子背离球心时,相反取

负值,当源偶极子垂直于球心与其联线时, q'_p 取零值.

2.1 导体双球

考虑两个半径为 R , 球心间距为 r 的接地导体球 a 和 b .当均匀外电场 E_0 平行于两球轴线时,即纵向情况, E_0 将在各球球心上激发一个偶极矩 p_1 (见图 1).这是一阶偶极矩与均匀电场中孤立导体球的偶极矩 ($p_0 = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0$) 相同.假定起始时两球均不带电.对于 a 球有

$$p_1 = p_0 = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0, \quad q_1 = 0, \quad x_1 = 0, \quad (3)$$

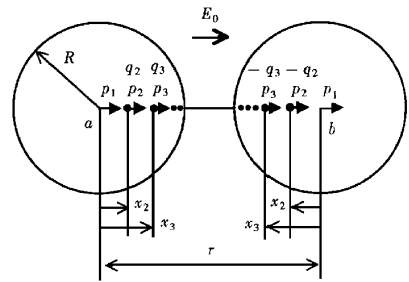


图 1 纵向电场中的导体双球及其像偶极矩和象电荷的分布

其中 q_1 为起始电荷, x_1 为一阶偶极矩和一阶电荷距 a 球球心的位置.由于两球的相互感应, p_1 和 q_1 将在各球上激发出二阶偶极矩 p_2 和电荷 q_2 , p_2 和 q_2 又激发出三阶偶极矩 p_3 和电荷 q_3 , 等等 (见图 1).运用 (1) 和 (2) 式,有

$$\begin{aligned} p_2 &= \left(\frac{R}{r}\right)^3 p_1, & q_2 &= \frac{R}{r^2} p_1, & x_2 &= \frac{R^2}{r}, \\ p_3 &= \left(\frac{R}{r-x_2}\right)^3 p_2, & q_3 &= \frac{R}{(r-x_2)^2} p_2 + \frac{R}{r-x_2} q_2, & x_3 &= \frac{R^2}{r-x_2}, \\ p_4 &= \left(\frac{R}{r-x_3}\right)^3 p_3, & q_4 &= \frac{R}{(r-x_3)^2} p_3 + \frac{R}{r-x_3} q_3, & x_4 &= \frac{R^2}{r-x_3}, \\ & \dots \dots \end{aligned} \quad (4)$$

第 i 阶像偶极矩和像电荷及其位置可以写为

$$p_i = \left(\frac{R}{r-x_{i-1}}\right)^3 p_{i-1} = \left(\frac{x_i}{R}\right)^3 p_{i-1}, \quad (5)$$

$$q_i = \frac{R}{(r-x_{i-1})^2} p_{i-1} + \frac{R}{r-x_{i-1}} q_{i-1} = \frac{p_i}{x_i} + \frac{q_{i-1} x_i}{R}, \quad (6)$$

$$x_i = \frac{R^2}{r-x_{i-1}}. \quad (7)$$

(5)–(7) 式都是连分数,作如下处理可以将其

表述成更紧凑的形式.联合方程(4)(5)(7)不难看出象偶极矩满足如下差分方程:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{p_{i+1}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{p_{i-1}}} = \frac{r}{R} \frac{1}{\sqrt[3]{p_i}} \quad (8)$$

这个方程的解为(见附录 A)

$$p_i = \left(\frac{\sinh \eta}{\sinh i \eta}\right)^3 p_1, \quad (9)$$

其中 η 定义为

$$\cosh \eta = \frac{r}{2R} = x. \quad (10)$$

将方程(9)代入方程(5)可得到

$$x_i = R \frac{\sinh(i-1)\eta}{\sinh i\eta}. \quad (11)$$

最后,通过解差分方程(6)也可将 q_i 表示成双曲函数的形式(见附录 B).

$$q_i = \frac{p_1}{R} \frac{\sinh \eta \sinh(i-1)\eta}{\sinh^2 i\eta}. \quad (12)$$

以上讨论是在两球接地的情况下进行的.对于两个不带电非接地导体球而言,放入电场后各球的总带电量仍然为零.为满足这一电中性条件,各球上需要补充中和电荷.这里只需消去每个球中的 q_i 项.为此,我们采用类似文献[12]中的做法,在球 a 和球 b 的球心上分别放置点电荷 $+q_c$ 和 $-q_c$.这两个电荷又引出另外一套像电荷,其大小(被 q_c 约化)和位置为

$$\lambda_1 = 1, \quad x_1 = 0, \quad (13)$$

$$\lambda_i = \lambda_{i-1} \left(\frac{r - x_{i-1}}{R} \right) = \sinh \eta / \sinh i\eta,$$

$$x_i = R \sinh(i-1)\eta / \sinh i\eta. \quad (14)$$

电中性条件则可以表示为

$$\sum_{i=1}^{\infty} (q_i + q_c \lambda_i) = 0, \quad (15)$$

及

$$q_c = -\frac{p_1}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sinh \eta \sinh(i-1)\eta}{\sinh^2 i\eta} / \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sinh \eta}{\sinh i\eta}. \quad (16)$$

最后,各球的总偶极矩可以通过对所有像偶极矩求和及像电荷(q_i 和 $q_c \lambda_i$)分布来确定.对 a 球有

$$\begin{aligned} p_{\Sigma}^{\parallel}(a) &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i + \sum_{i=1}^{\infty} q_i x_i + \sum_{i=1}^{\infty} (q_c \lambda_i) x_i \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh \eta}{\sinh i\eta} \right)^3 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sinh \eta \sinh^2(i-1)\eta}{\sinh^3 i\eta} \right. \\ &\quad \left. - \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sinh \eta \sinh(i-1)\eta}{\sinh^2 i\eta} \right]^2 / \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sinh \eta}{\sinh i\eta} \right\} p_0. \end{aligned} \quad (17)$$

球 b 的偶极矩与上式相同.球链的总偶极矩为二者之和,

$$p_{\Sigma}^{\parallel} = p_{\Sigma}^{\parallel}(a) + p_{\Sigma}^{\parallel}(b) = 2p_{\Sigma}^{\parallel}(a) = \alpha_{\Sigma}^{\parallel}(x) p_0. \quad (18)$$

横向情况(见图2)的计算相对简单.由于结构的对称性,不需要考虑中和电荷.类似于前面的方法,亦可得到一像偶极矩的无穷集合.其数值仍由方程(5)和(9)给出.唯一不同的是偶数阶像偶极矩的

方向与施加场 E_0 的方向相反.通过求和所有像偶极矩可以得到球 a 和球 b 的横向偶极矩,

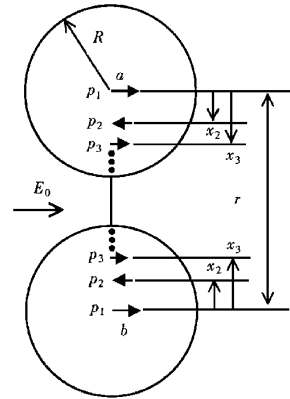


图2 横向电场中的导体双球及其像偶极矩的分布

$$\begin{aligned} p_{\Sigma}^{\perp}(a) &= p_{\Sigma}^{\perp}(b) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} p_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \left(\frac{\sinh \eta}{\sinh i\eta} \right)^3 p_0. \end{aligned} \quad (19)$$

球链的总横向偶极矩为

$$p_{\Sigma}^{\perp} = p_{\Sigma}^{\perp}(a) + p_{\Sigma}^{\perp}(b) = p_{\Sigma}^{\perp}(a) = \alpha_{\Sigma}^{\perp}(x) p_0. \quad (20)$$

Levine 和 McQuarrie^[6]曾通过在双球坐标系中求解 Laplace 方程获得导体双球的纵向和横向偶极矩(文献[6]中方程(24)和(25)).这里得到横向偶极矩(方程(20))与他们的完全相同.纵向偶极矩(方程(18))表述上不同,但数值结果完全一致.同时注意到方程(17)和(19)与文献[20]中关于介质双球偶极矩结果相同,如果将其过渡到导体球的情况(令文献[18]中方程(11)和(12)内的 $\tau \rightarrow 1$).

2.2 导体4球和导体8球

考虑图3所示的情况.4个导体球放在正方形四个顶点上,电场 E_0 沿棱边方向施加.与上节情况

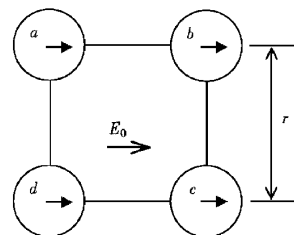


图3 纵向电场中的4球簇团.4个导体球分别放在正方形的4个顶点上

相同各球球心激发出一阶偶极矩 p_1 , 并且各球间的相互作用将感应出各高阶像偶极矩和像电荷. 为了简化起见, 这里只考虑最近邻球之间的相互感应. a, b 两球间的感应与图 1 的情形相同. a, d 两球间的感应与图 2 的情形相同. 为满足电中性条件, 需在 a, d 球球心上放置中和电荷 $+q_c, b, c$ 球球心上放置电荷 $-q_c$. q_c 在 a, b 两球间引起的像电荷与双球的纵向情况相同, 但在 a, d 两球间引起符号交错的

像电荷 (奇数阶为正, 偶数阶为负). 电中性条件可以写为

$$\sum_{i=1}^{\infty} q_i + \sum_{i=1}^{\infty} q_c \lambda_i + \left(\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} q_c \lambda_i - q_c - \sum_{i=2,4,6,\dots}^{\infty} q_c \lambda_i \right) = 0. \tag{21}$$

由此解得

$$q_c^{(4)} = -\frac{p_0}{R} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sinh \eta \sinh(i-1)\eta}{\sinh^2 i \eta}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sinh \eta}{\sinh i \eta} - 1 + \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh \eta}{\sinh i \eta} - \sum_{i=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\sinh \eta}{\sinh i \eta}}. \tag{22}$$

由于 4 个球的地位相同, 因而具有相同的偶极矩,

$$p_4^1(a) = p_0 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh \eta}{\sinh i \eta} \right)^3 - p_0 + p_0 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \left(\frac{\sinh \eta}{\sinh i \eta} \right)^3 + p_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sinh \eta \sinh^2(i-1)\eta}{\sinh^3 i \eta} + q_c^{(4)} R \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sinh \eta \sinh(i-1)\eta}{\sinh^2 i \eta}. \tag{23}$$

对于横向情况, 电场 E_0 垂直于棱边方向施加, 各球间只存在着横向的相互感应, 不需补充中和电荷. 在只考虑最近邻球间相互作用的情况下, 各球的偶极矩为

$$p_4^1(a) = p_0 \left(2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \left(\frac{\sinh \eta}{\sinh i \eta} \right)^3 - 1 \right). \tag{24}$$

依照类似处理, 可以获得图 4 所示的 8 球结构的偶极矩. 中和电荷的大小为

$$q_c^{(8)} = -\frac{p_0}{R} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sinh \eta \sinh(i-1)\eta}{\sinh^2 i \eta}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sinh \eta}{\sinh i \eta} - 2 + 2 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh \eta}{\sinh i \eta} - 2 \sum_{i=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\sinh \eta}{\sinh i \eta}}. \tag{25}$$

各球的偶极矩均为

$$p_8^1(a) = p_0 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh \eta}{\sinh i \eta} \right)^3 - 2p_0 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \left(\frac{\sinh \eta}{\sinh i \eta} \right)^3 + p_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sinh \eta \sinh^2(i-1)\eta}{\sinh^3 i \eta} + q_c^{(8)} R \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sinh \eta \sinh(i-1)\eta}{\sinh^2 i \eta}. \tag{26}$$

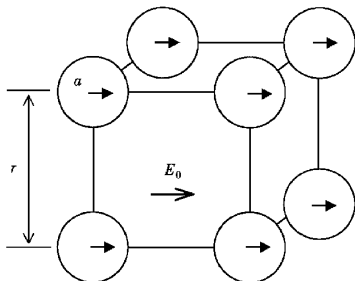


图 4 均匀电场中的 8 球簇团, 8 个导体球分别处于正方体的顶点上

3 讨 论

文献 [18] 中介绍了一种基于链偶极矩分形模型估算颗粒簇团偶极矩的方法. 根据这一方法, 图 3 所示的 4 球结构中每个球的纵向和横向偶极矩表示为

$$p_{4, \text{fractal}}^1(a) = \frac{1}{4} \alpha_{\text{fractal}}^1(x) \alpha_{\text{fractal}}^1(x) p_0, \tag{27}$$

$$p_{4, \text{fractal}}^2(a) = \frac{1}{4} \alpha_{\text{fractal}}^2(x) \alpha_{\text{fractal}}^2(x) p_0. \tag{28}$$

对于图 4 所示的 8 球结构, 每个球的偶极矩表示为

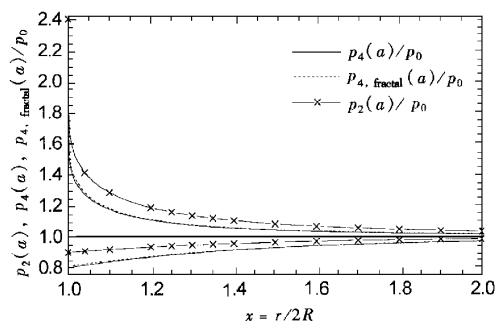


图5 2球及4球结构偶极矩随间距的变化情况. 纵向偶极矩在上半部绘出, 横向偶极矩在下半部绘出, 图中偶极矩均被 p_0 约化

$$p_{8, \text{fractal}}(a) = \frac{1}{8} \alpha_2^2(x) \alpha_2^2(x) \alpha_2^2(x) p_0. \quad (29)$$

图5中给出了4球结构偶极矩随约化间距 $x = r/2R$ 的变化情况. 为了便于比较图5中亦绘出了双球偶极矩(方程(17)和(19))的变化情况. 图5中偶极矩均被 $p_0 = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0$ 约化, p_0 为孤立导体球的偶极矩. 图5中上半部给出纵向偶极矩的变化情况, 下半部给出横向偶极矩的变化情况. 首先, 注意到获得的4球(纵向和横向)偶极矩(实线)与分形结果(点线)基本一致, 只是略小于后者. 这可归因于像偶极子法只考虑了最近邻球之间的相互作用, 即对高阶像偶极矩和像电荷只考虑两球之间的感应, 而未考虑与第三球之间的影响. 如, 对图4所示的结构 a, b 两球互相成像后, 在 a 球上出现的 p_i 和 q_i 还应与 d 球成像. 对这一因素的考虑会使结果更准确, 但却导致表达式过于复杂. 在各球靠的不是十分近的情况下, 忽略这些项亦可得到足够好的近似. 另外, 注意到双球的纵向和横向偶极矩均大于4球的纵向和横向偶极矩. 这是因为纵向电场作用下, 两球间的相互作用使得作用在每个球上的局域场增大(导致双球结构中的纵向约化偶极矩大于1), 而4球结构中, 纵向时同时存在纵向场和横向场, 横向时全部为横向场. 横向场的作用致使局域场减弱(对双球结构, 导致横向约化偶极矩小于1). 最后, 注意到像偶极子法所得结果与分形结果的差别随着球心间距的增大而减小. 这是因为球间相互感应随间距增大而减弱, 像偶极子法所忽略的因素的影响也随之减弱. 类似情况亦存在于8球结构中(见图6), 但两种理论结果的差别却大于4球结构中的, 这可归因于上述所忽略因素的影响随球个数的增加而增大.

这里, 通过解差分方程将像偶极矩和像电荷表

示成双曲函数的形式. 这样可以使结果的表述更紧凑, 同时使计算比直接利用(4)式收敛得更快. 尽管如此, 计算表明当颗粒靠得非常近时数据的收敛速度仍会显著下降. 由于目前缺乏颗粒簇团偶极矩的其他理论和实验结果, 这里只与分形模型的结果进行了比较, 二者符合很好. 如果将更多像偶极矩和像电荷考虑进来, 计算结果会进一步改善. 像偶极子法亦可用于导体球链偶极矩的计算, 将另处讨论.

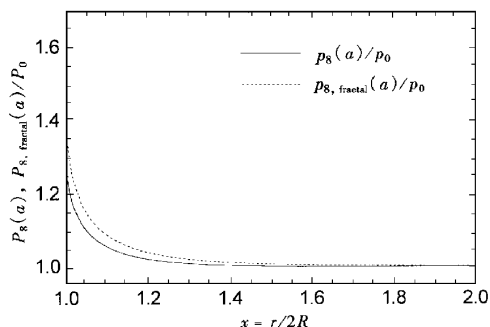


图6 8球结构的偶极矩随间距的变化情况. 图中偶极矩均被 p_0 约化

4 结 论

对偶极矩的计算表明导体球簇团的极化可以利用像偶极子法来处理, 而且通过确定像偶极矩和伴随像电荷及其分布可以对球间相互感应的影响作出很好的估计. 这种方法对双球结构可以得到准确结果, 对较小的簇团亦是有效的, 对含球体个数较多的簇团还应做更细致的分析. 与分形模型相比, 像偶极子法的优点是能分析簇团内每个成员球的极化情况, 并给出形式较紧凑的解析表达式.

附录 A

如果对方程(8)作代换 $1/\sqrt[3]{p_i} = f_i$, 则可将其转化成如下形式:

$$\frac{r}{R} f_i = f_{i-1} + f_{i+1}. \quad (\text{A} \cdot 1)$$

这是一个变系数二阶线性差分方程, 其标准解法可在文献[21]中找到. 为了简明这里采用类似文献[22]中的处理方法. 注意到

$$\begin{aligned} \sin[(i+1)\eta] + \sin[(i-1)\eta] &= 2\cosh\eta \sinh i\eta, \\ \cos[(i+1)\eta] + \cos[(i-1)\eta] &= 2\cosh\eta \cosh i\eta. \end{aligned}$$

可令方程(A.1)的解为

$$f_i = A \sinh i\eta + B \cosh i\eta. \quad (\text{A} \cdot 2)$$

其中 η 如方程(11)所定义. 利用初始条件

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{p_0}} = A \sinh \eta + B \cosh \eta,$$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{p_2}} = \frac{r}{R \sqrt[3]{p_0}} = A \sinh 2\eta + B \cosh 2\eta,$$

可解得

$$A = \frac{1}{\sinh \eta \sqrt[3]{p_0}}, B = 0. \quad (\text{A} \cdot 3)$$

将(A·3)式代入(A·2)式即得最终解方程(9)。

附录 B

方程(6)为关于 q_i 的变系数一阶线性差分方程

$$q_i - \frac{x_i}{R} q_{i-1} = \frac{p_i}{x_i}. \quad (\text{B} \cdot 1)$$

这种方程可以变换为如下形式^[21, 23]:

$$g_i - g_{i-1} = d_i, \quad i = 2, 3, 4, \dots, \quad (\text{B} \cdot 2)$$

其中 $g_i = q_i / \prod_{j=2}^i \frac{x_j}{R}$, $d_i = \frac{p_i}{x_i} / \prod_{j=2}^i \frac{x_j}{R}$. 方程(B·2)的解为 $g_i = c +$

$\sum_{j=2}^i d_j$. 将其还原后得到

$$q_i = c \prod_{j=2}^i \frac{x_j}{R} + \prod_{j=2}^i \frac{x_j}{R} \sum_{k=2}^i \left(\frac{p_k}{x_k} / \prod_{j=2}^k \frac{x_j}{R} \right). \quad (\text{B} \cdot 3)$$

将 x_i, p_i 代入后, 有

$$q_i = c \frac{\sinh \eta}{\sinh i \eta} + \frac{p_0}{R} \frac{\sinh \eta}{\sinh i \eta} \sum_{j=2}^i \frac{\sinh^2 \eta}{\sinh(i-1)\eta \sinh j \eta}. \quad (\text{B} \cdot 4)$$

由于 $q_1 = 0$, 因而 $c = 0$. 同时注意到

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^i \frac{\sinh^2 \eta}{\sinh(i-1)\eta \sinh j \eta} \\ &= \sum_{j=2}^i \left(\frac{\sinh(i-1)\eta}{\sinh i \eta} - \frac{\sinh(i-2)\eta}{\sinh(i-1)\eta} \right) \\ &= \frac{\sinh(i-1)\eta}{\sinh i \eta}. \end{aligned} \quad (\text{B} \cdot 5)$$

将其代入(B·4)即得最后解。

- [1] T. J. Chen, R. N. Zitter, R. Tao, *Phys. Rev. Lett.*, **68** (1992), 2555.
- [2] M. Hagenbuchle, J. Liu, *Appl. Opt.*, **36**(1997), 7664.
- [3] W. T. Doyle, I. S. Jacobs, *Phys. Rev.*, **B42**(1992), 9319.
- [4] W. T. Doyle, I. S. Jacobs, *J. Appl. Phys.*, **71**(1992), 3926.
- [5] T. B. Jones, *Electromechanics of Particles* (Cambridge University Press, New York, 1995), p. 173.
- [6] H. B. Levine, D. A. McQuarrie, *J. Chem. Phys.*, **49** (1968), 4181.
- [7] J. D. Love, *J. Phys.*, **E 8**(1975), 1063.
- [8] J. D. Love, Q. J. Mech, *Appl. Math.*, **28**(1975), 449.
- [9] A. Goyette, A. Navon, *Phys. Rev.*, **B13**(1976), 4320.
- [10] A. V. Paley, A. V. Radchik, G. B. Smith, *J. Appl. Phys.*, **73**(1993), 3446.
- [11] D. J. Jeffery, Y. Onish, *J. Phys.*, **A13**(1980), 2847.
- [12] E. J. Yarmchuk, J. F. Janak, *IEEE Trans. Mag.*, **MAG-18**(1982), 1268.
- [13] T. B. Jones, R. D. Miller, *J. Electrostat.*, **22**(1989), 231.
- [14] T. B. Jones, *J. Appl. Phys.*, **60**(1986), 2226; Addendum, *J. Appl. Phys.*, **61**(1987), 2416.
- [15] R. J. Meyer, *J. Electrostat.*, **33**(1994), 133.
- [16] Z. H. Jiang, X. R. Zhang, J. C. Han, X. D. He, S. Y. Du, *J. Electrostat.*, **39**(1997), 297.
- [17] Z. H. Jiang, X. D. He, J. C. Han, S. Y. Du, *Ann. Phys.*, **266**(1998), 244.
- [18] Z. H. Jiang, X. D. He, J. C. Han, S. Y. Du, *Acta Physica Sinica*, **48**(1999), 1037 (in Chinese [姜泽辉、赫晓东、韩杰才、杜善义 物理学报 **48**(1999), 1037]).
- [19] H. F. M. van den Bosch, K. J. Ptasinski, P. J. A. M. Kerkhof, *J. Appl. Phys.*, **78**(1995), 6345.
- [20] L. Poladian, *Phys. Rev.*, **B44**(1991), 2092.
- [21] C. E. Pearson, *Handbook of Applied Mathematics* (Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1974), p. 336.
- [22] W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity* (Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1989), p. 128.
- [23] H. Levy, F. Lessman, *Finite Differences Equations* (Sir Isaac Pitman & Sons. Ltd., London, 1959), p. 151.

IMAGE DIPOLE METHOD FOR THE DIPOLE MOMENTS OF CONDUCTING PARTICLE CLUSTERS

JIANG ZE-HUI XU SU-JUAN

(*Department of Applied Physics , Harbin Institute of Technology , Harbin 150001 , China*)

CHEN WEI MEN SHOU-QIANG LU KUN-QUAN

(*Institute of Physics , Chinese Academy of Sciences , Beijing 100080 , China*)

(Received 9 December 1999 ; revised manuscript received 24 February 2000)

ABSTRACT

Often it is difficult to calculate the dipole moments of clusters of conducting particles imposed to uniform electric fields , because of the difficulty in handling the mutual coupling between the particles. Such mutual coupling generally causes the polarization of the particles to be dependent upon the structures and the sizes of the clusters. In this paper , an image dipole method is employed for the analysis of this effect. First , a pair of two identical conducting spheres with arbitrary separation immersed in a longitudinal or transverse field is considered , and the image dipoles and image charges , and their distribution induced in each sphere are determined. Then , the dipole moments for the clusters with 4 and 8 spheres arranged on the vertexes of a square or a cube are estimated , and closed-form expressions are given. Comparison with previous calculations is made , and good agreement has been obtained.

Keywords : dipole moment , particle cluster , image dipole method , fractal

PACC : 4110D , 7730