三维光子晶体中三能级原子的自发发射*

谢双媛 羊亚平 吴 翔 (同济大学物理系 上海 200092)

(1999年11月7日收到2000年3月6日收到修改稿)

研究了三维光子晶体中三能级原子自发发射的性质.由于各向异性色散关系,能带带边的态密度没有奇异性, 局域场可以消失.在一定条件下弥散场会得到加强,并在辐射场中占主导地位.这些性质将与原子能级和能带带边 的相对位置有关,且有别于各向同性色散关系的光子晶体中原子自发发射的性质.

关键词:光子晶体,三能级原子,自发发射 PACC:4250,4270,3280

1 引 言

光子晶体是一种人造的具有光子能带和能隙的 周期性介质材料.在光子晶体中,频率处于完全能隙 中向各个方向传播的电磁波将被禁止,一般辐射场 的色散关系和电磁波模密度也发生了改变^[1-5].近 年来,许多关于光子晶体中原子自发发射性质的研 究表明^{6-10]},光子晶体的性质能导致一些新的现 象,如光的局域化^[6,7]、光子₋原子束缚态^[8]、部分稳 态原子居于激发态^[6]、占据数的周期性振荡^[9]、自 发发射的相干控制^{10]}等等.在大多数这些研究中, 考虑的是由各向同性色散关系 $\omega_k = \omega_c + A(k - k_0)^2$ 描述的光子晶体.尽管此模型比较简单,但它因 为采用完全球对称 $|k| = |k_0|$ 而过高估计了能带带 边实际的态密度.三维真实光子晶体具有与一个特 殊点 $k = k_0$ 或相关对称点集合有关的点群对称性, 而非球对称性.

本文讨论了三维光子晶体中三能级原子的自发 发射.研究结果表明,不同于各向同性色散关系的情况,当考虑各向异性色散关系时态密度没有奇异性, 局域场可以消失,弥散场在一定条件下会得到加强, 并在辐射场中占主导地位,这些性质依赖于原子能级和能带带边的相对位置.

2 基本理论

本文考虑处于三维光子晶体中的一个三能级原 子的自发发射.如图 1 所示,两个上能级 $|a_1$, $|a_2$ 通过相同的真空模与下能级 $|a_3$ 耦合,其相应的共



图1 三能级原子

振频率分别为 ω_1 和 ω_2 ,假定 $\omega_{1,2}$ 在光子晶体的能 带带边 ω_c 附近 , $|a_3$ 对应的能量本征值为零. 在旋 波近似下 ,系统的哈密顿量为

^{*}上海市教育委员会基金、国家高技术研究发展计划(批准号:863-416-1-5))资助的课题.

场中第 k 个模式的产生算符(湮没)算符. $g_k^{(j)} = (\omega_j d_j/\hbar) (\hbar/2\epsilon_0\omega_kV_0)^{1/2} e_k \cdot u_j$ 为辐射场与原子的耦合 系数 $d_j \pi u_j \beta$ 别为 $|a_j \rightarrow |a_3 (j = 1, 2)$ 跃迁偶极 矩的大小和方向单位矢量 ; V_0 为体积 ; e_k 表示电磁 模 k 两个偏振方向的单位矢量 , ϵ_0 为介电常量.

有研究表明^{1-3]},沿倒格矢 k 空间中的第一布 里渊区主要对称线上有光子能带存在,而且能带带 边与特定的对称点 k_0^i 有限集合相联系,从而形成三 维各向异性能带结构.由文献 3 可知,金刚石周期 性结构在所有第一布里渊区确实具有完全光子能带 结构.在本文中,我们考虑对称点集合 k_0^i 为金刚石 光子晶体第一布里渊区表面的八个对称点.因此,对 于方向靠近 k_0^i (i = 1, 2, ..., 8)之一的k的色散关系 可近似表示为

$$\omega_{\boldsymbol{k}} = \omega_{\mathrm{c}} + A \left| \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_{0}^{i} \right|^{2} , \qquad (2)$$

其中 ω_c 是能带带边的截止频率 ,A 是常系数.

系统在任意时刻 t 的状态矢量可写为

$$| \psi(t) = \sum_{j=1}^{2} A_{j}(t) e^{-i\omega_{j}t} | a_{j} | 0_{f}$$

+ $\sum_{k} B_{k}(t) e^{-i\omega_{k}t} | a_{3} | 1_{k-f}, \quad (3)$

式中态矢量 $|a_j| | 0_{f}$ 表示处于原子的激发态 $|a_j|$, 但无发射光子; $|a_3| | 1_{k_{f}}$ 表示原子处于基态 $|a_3|$ 而且有一个 k模式光子,频率为 ω_{c} . 假定原子初始 时刻处于激发态的叠加态,即 $A_1(0)$, $A_2(0)$ 是满足 归一化条件的任意常数 $|A_1(0)|^2 + |A_2(0)|^2 = 1$, $B_k(0) = 0$. 把(1)和(3)式代入薛定谔方程,可得关 于 $A_1 \leq t$)和 $B_k(t)$ 的演化方程

$$\frac{\partial}{\partial t}A_{1}(t) = -\sum_{k}g_{k}^{(1)}B_{k}(t)e^{-(\omega_{k}-\omega_{1})t},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}A_{2}(t) = -\sum_{k}g_{k}^{(2)}B_{k}(t)e^{-(\omega_{k}-\omega_{2})t},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}B_{k}(t) = g_{k}^{(1)}A_{1}(t)e^{(\omega_{k}-\omega_{1})t}$$

$$+ g_{k}^{(2)}A_{2}(t)e^{(\omega_{k}-\omega_{2})t}.$$
(4)

先对(4)式中第三个方程进行积分,并将其代入前两 个方程,然后利用拉普拉斯变换求解,可得到

$$A_{1}(s) = \frac{A_{1}(0)(s - i\omega_{12} + \Gamma_{22}) - A_{2}(0)\Gamma_{12}}{(s + \Gamma_{11})(s - i\omega_{12} + \Gamma_{22}) - (\Gamma_{12})^{2}}$$
$$A_{2}(s - i\omega_{12}) = \frac{A_{2}(0)(s + \Gamma_{11}) - A_{1}(0)\Gamma_{12}}{(s + \Gamma_{11})(s - i\omega_{12} + \Gamma_{22}) - (\Gamma_{12})^{2}},$$
(5)

其中
$$\Gamma_{mn} = \sum_{k} \frac{g_k^{(m)} g_k^{(n)}}{s - (\omega_1 - \omega_k)}$$
 (*m*, *n* = 1, 2), $\omega_{12} =$

 $\omega_1 - \omega_2$. 在以下讨论中,假设原子两个跃迁的偶极 矩互相平行. 利用色散关系(2)式,用关于*k*的积分 代替对*k*的求和,并改变积分变量 $q = k - k_0^i$,我们 得到

$$\Gamma_{mn} = \frac{-(\beta_m \beta_n)^{3/4}}{\sqrt{\omega_c} + \sqrt{-is - \omega_{1c}}}, \qquad (6)$$

其中 $\omega_{jc} = \omega_j - \omega_c$, $\beta_j^{3/2} = \left[\frac{(\omega_i d_j)^2}{8\pi\varepsilon_0 \hbar A^{3/2}} \left(\sum_{i=1}^8 \sin^2\theta_i\right)\right]$ (*j* = 1,2), θ_i 是原子偶极矩与 k_0^i 之间的夹角.为了简单起见,假 设 $g_k^{(1)} = g_k^{(2)} = g_k$,并有 $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \Gamma_{12}$ = Γ .

振幅 A1(t) A2(t) 可以通过拉普拉斯反演得到

$$A_{1}(t) = \sum_{j} \frac{f_{11}(x_{j}^{(1)})}{G_{1}'(x_{j}^{(1)})} e^{x_{j}^{(1)}t} + \sum_{j} \frac{f_{12}(x_{j}^{(2)})}{G_{2}'(x_{j}^{(2)})} e^{x_{j}^{(2)}t} + \frac{e^{i\omega_{1}c}}{2i\pi} \int_{0}^{\infty} \left[\frac{K_{+}^{1}(x)}{R_{+}(x)} - \frac{K_{-}^{1}(x)}{R_{-}(x)} \right] e^{-xt} dx , \qquad (7)$$

$$A_{2}(t) = e^{-i\omega_{12}t} \left[\sum_{j} \frac{f_{21}(x_{j}^{(1)})}{G_{1}(x_{j}^{(1)})} e^{x_{j}^{(1)}t} + \sum_{j} \frac{f_{22}(x_{j}^{(2)})}{G_{2}'(x_{j}^{(2)})} e^{x_{j}^{(2)}t} \right] + \frac{e^{i\omega_{22}t}}{2i\pi} \int_{0}^{\infty} \left[\frac{K_{+}^{2}(x)}{R_{+}(x)} - \frac{K_{-}^{2}(x)}{R_{-}(x)} \right] e^{-xt} dx. \quad (8)$$

以上函数有如下定义:

$$\begin{split} f_{1n}(x) &= A_{1}(0)(x - i\omega_{12}) - i\beta^{3/2} A_{1}(0) - A_{2}(0)]\gamma_{n} , \\ f_{2n}(x) &= A_{2}(0)x - i\beta^{3/2} A_{2}(0) - A_{1}(0)]\gamma_{n} , \\ f_{5}(x) &= [A_{1}(0) + A_{2}(0)]x - iA_{1}(0)\omega_{12} , \\ G_{n}(x) &= x(x - i\omega_{12}) - i\beta^{3/2} (2x - i\omega_{12})\gamma_{n} , \\ K_{\pm}^{1}(x) &= A_{1}(0)(i\omega_{2c} - x)(\omega_{c} - ix) - i\beta^{3/2} (A_{1}(0) - A_{2}(0))(\sqrt{\omega_{c}} \pm i\sqrt{-ix}) , \\ K_{\pm}^{2}(x) &= A_{2}(0)(i\omega_{1c} - x)(\omega_{c} - ix) - i\beta^{3/2} (A_{2}(0) - A_{1}(0))(\sqrt{\omega_{c}} \pm i\sqrt{-ix}) , \\ R_{\pm}(x) &= (x - i\omega_{1c})(x - i\omega_{2c})(\omega_{c} - ix) + i\beta^{3/2} (2x - i\omega_{1c} - i\omega_{2c})(\sqrt{\omega_{c}} \pm i\sqrt{-ix}) , \\ K(x) &= [A_{1}(0)(i\omega_{2c} - x) + A_{2}(0)(i\omega_{1c} - x)](\omega_{c} - ix) , \end{split}$$

其中 $\gamma_1 = \left(\sqrt{\omega_c} + \sqrt{-ix - \omega_{1c}}\right)^{-1}$, $\gamma_2 =$ $(\sqrt{\omega_{c}} - i\sqrt{ix + \omega_{1c}})^{-1}$.上式中 $x_{i}^{(1)}$ 是方程 $G_{i}(x)$ =0在区域(Im(x) < ω_{1c} 和 Re(x) < 0)范围之外的 根 $x_i^{(1)}$ 都是纯虚根. $x_i^{(2)}$ 是方程 $G_2(x) = 0$ 在区域 ($Im(x) < \omega_{1c}$ 和 Re(x) < 0) 范围内的根; $x_i^{(2)}$ 都是 复根,这些根的数目和性质依赖于能级与能带带边 的相对位置,且直接影响着辐射场,通过数值计算可 知 最少有一个根 最多有两个根存在,在图 2 中 利 用计算结果画出了四条曲线 将整个空间划分为五 个区域 在区域 | 中以及区域 | 与Ⅳ的交线上 有两 个纯虚根存在 ;在区域 Ⅳ 中 ,仅存在一个纯虚根 ;在

0.10

0.08

10

Π

0.0985

Π

区域 Ⅱ 中以及区域 Ⅳ 与 Ⅱ , Ⅲ 与 Ⅴ 的交线上,存在一 个纯虚根和一个复根;在区域Ⅴ中,仅存在一个复 根 :在区域Ⅲ中以及区域Ⅲ与Ⅴ的交线上 ,有两个复 根存在.如果定义

 $\Delta_{\pm} = \frac{\omega_{12}}{2} + \frac{\beta^{3/2}}{\sqrt{\omega_c}} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_{12}}{2}\right)^2 + \frac{\beta^3}{\omega_c}}, 可以严格证明:$ 当 $\omega_{1c} \leq \Delta_{-}$ 时,有两个纯虚根 i b_{1} i b_{2} 分别处于 $b_{1} >$ ω_{12} , max(0, ω_{1c}) < $b_2 < \omega_{12}/2$ 区域内 ; $\exists \Delta_- < \omega_{1c}$ $\leq \Delta_+$ 时,只有一个纯虚根 i b_1 在 b_1 > max(ω_{1c} , ω_{12}) 范围内 ;当 $\omega_{1c} > \Delta_+$ 时 ,没有纯虚根 ,这与在各向同 性色散关系的光子晶体中纯虚根总是存在的情况不 **同**[9]

III





示为

$$E(\mathbf{r}_{,t}) = E_l + E_p + E_d.$$
 (11)
第一部分 E_l 来源于(7)(8)式中 $x_j^{(1)}$ 项,可表

10

$$E_{l}^{j}(r,t) = E_{l}(0) \frac{1}{r} e^{(x_{j}^{(1)} - i\omega_{1})t - r/l_{j}}$$
, (12)

其中 $E_{l}(0)$ 是依赖于 ω_{1} 的常数.因为 $x_{j}^{(1)} = ib_{j}^{(1)}$ 是 纯虚根 ,E(r,t)的频率($\omega_1 - b_i^{(1)}$)位于能隙中 ,所 以它代表一个局域场,局域场的范围由 $l_i =$ [($-ix_i^{(1)} - \omega_{1c}$)/A]^{-1/2}决定. 局域场 $E_i(r, t)$ 不随 时间衰减 使能量局域在原子周围形成光子-原子束

主要结果 3

在空间某点 r 的辐射场可写为[11]

$$E(\mathbf{r}, t) = \sum_{k} \sqrt{\frac{\hbar \omega_{k}}{2\epsilon_{0} V}} e^{-(\omega_{k} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} B_{k}(t) \mathbf{e}_{k} , (9)$$

其中单光子态振幅 B_i(t)为

$$B_{k}(t) = g_{k} \int_{0}^{t} [A_{1}(t')e^{(\omega_{k}-\omega_{1})t'} + A_{2}(t')e^{(\omega_{k}-\omega_{2})t'}]dt'.$$
(10)

因此我们可以从 $A_{1,2}(t)$ 推知辐射场E(r,t)可表

缚缀饰态,并且形成部分稳态原子居于激发态.

E_p(*r*,*t*)来源于(7)(8)式中 *x*⁽²⁾项.*E_p*(*r*,*t*) 表示为

$$E_p^j(r,t) = E_p(0) \frac{1}{r} e^{(x_j^{(2)} - i\omega_1)t + iqr}$$
, (13)

其中 $q = \left[\frac{ix_j^{(2)} + \omega_{1c}}{A}\right]^{1/2}$. $x_j^{(2)} = a_j^{(2)} + ib_j^{(2)}$ 是复 根, E_p^j (r,t)的频率($\omega_1 - b_j^{(2)}$)处于能带中,因此 $E_p^{i}(r,t)$ 表示一个以相速度 $v_p^{i} = \frac{\sqrt{A[\omega_1 - b_j^{(2)}]}}{\operatorname{Re}(\sqrt{\omega_{1c} + ix_j^{(2)}})}$ 和能流速度 $v_e^{i} = \frac{\sqrt{Aa_j^{(2)}}}{\operatorname{Im}(\sqrt{\omega_{1c} + ix_j^{(2)}})}$ 向外传播的指数 脉冲 ,它代表一个传输场.

对于辐射场的第三部分*E_d*(*r*,*t*)来源于(7), (8)式中沿着一阶支点的积分,它代表一个典型的弥 散场。

$$E_{d}(r_{t},t) = \frac{E_{d}(0)}{r} \exp\left(-i\omega_{c}t + \frac{ir^{2}}{4At} + \frac{3i\pi}{4}\right) \int_{0}^{\infty} \left[\frac{K(x)}{R_{+}(x)} - \frac{K(x)}{R_{-}(x)}\right] dx$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[ye^{3\pi i/4} + r/(2\sqrt{At})\right] e^{-y^{2}} dy}{-xt + \left[ye^{3\pi i/4} + r/(2\sqrt{At})\right]^{2}}.$$
 (14)

图 3 是 $E_d(r,t)$ 随时间 t 和距离 r 的演化图. 从图 3 可以看到 随着时间 t 增加 在空间任意点的 $E_d(r,t)$ 先从零增大到最大值 ,然后再从最大值衰 减到零.随着距离原子的距离 r 增大 ,在某一特定 时间的 $E_d(r,t)$ 也表现出同样的行为. $E_d(r,t)$ 最 大值的位置随时间的增加而远离原子 ,如图 3 所示. 我们知道局域场和传输场有确定的频率 $\omega_1 - \text{Im}$ ($x_j^{(i)}$) (i = 1,2),虽然弥散场像传输场一样向外 传播能量 ,但弥散场没有确定的频率.



图 3 $\omega_c = 200\beta, \omega_{12} = 8.6\beta, \omega_{1c} = 0.070131\beta$ 时, $E_d(r, t)$ 随时间 t和距离 r的演化图

图 4 为 $|E_d|^2$ 与 ω_{1c} 的关系图. 从图 4 我们看出 E_d (r,t)在某些区域非常强. 对比图 2 与图 4,我们 注意到弥散场在区域 V 比在区域 I, II 和 III 要强几百倍,弥散场在区域 <math>I, II 和 III 很弱以至于可以忽略. 与区域 <math>V 类似,弥散场在区域 V 也比在区域 I, II 和 III 要强几百倍. 从以上讨论可知,在图 2 中,区 域 I 中的辐射场是有两个局域模式的局域场;在区 域IV中 辐射场由一个局域模式的局域场和一个强 的弥散场组成,辐射场在区域 II 中包括一个局域模 式和一个传输模式;辐射场在区域 V 中由一个传输 模式的传输场和一个强的弥散场组成,在区域 III 中 有两个传输模式.辐射场的性质直接与两个上能级 和能带带边的相对位置有关.我们可以推知在能级 从能隙向能带移动的整个过程中,辐射场从强局域 场和弱弥散场变成强弥散场和弱局域场,然后继续 变成强传输场和弱弥散场.在这个过程中,当局域场 减弱时弥散场增强,能量从局域场传递给弥散场,在 区域 IV 和 V 弥散场增强到最大值并包含大部分能 量 ,局域场继续衰减,当局域场衰减直到消失,传输 场开始出现并逐渐增强时,弥散场开始衰减并把能 量传递给传输场.

在各向同性色散关系的光子晶体中,也存在弥 散场,只是它在整个光子晶体中都很弱,因此可以被 忽略,而且局域场总是存在的^[9].相反在三维各向 异性色散关系光子晶体中,局域场可以消失,弥散场 也可以增强几百倍而不能被忽略,这与能级和能带 带边的相对位置有关.这些不同之处来源于各向同 性色散关系光子晶体和三维各向异性色散关系光子 晶体具有不同的色散关系,因而引起能带带边的态 密度的差别.三维光子晶体中与各向异性色散关系 对应的态密度 $\rho(\omega)$ 正比于($\omega_k - \omega_c$)^{1/2},而与各向 同性色散关系对应的态密度 $\rho(\omega)$ 正比于($\omega_k - \omega_c$)^{1/2},而与各向 同性色散关系对应的态密度 $\rho(\omega)$ 正比于($\omega_k - \omega_c$)^{1/2},因此在 各向同性色散关系情况下局域场总是存在,而在三



图 4 $\omega_c = 100\beta \, \omega_{12} = 1.6\beta \, \mu r \, \sqrt{\beta / A} = 1 \, \mu t = 3$ 时 , $|E_d|^2$ 与 ω_{1c} 的关系图

维各向异性色散关系情况下,频率 ω 可以取 ω_c 而没有奇异性. 当 ω 为 ω_c 时,局域场消失,各向异性的色散关系能引起弥散场变得强烈和显著.

4 结 论

总之,三维光子晶体中三能级原子的自发发射

出现了新的性质.由于由各向异性色散关系决定的 态密度不再具有奇异性,辐射场中的局域场可以消 失,而且在某些情况下弥散场可以在辐射场中占主 导地位,这与能级和能带带边的相对位置有关.这些 性质不同于各向同性色散关系的光子晶体中原子的 自发发射的性质.

- S. John , Phys. Rev. Lett. ,53 (1984), 2169; E. Yablonovitch , Phys. Rev. Lett. ,58 (1987), 2059; S. John , Phys. Rev. Lett. , 58 (1987), 2486.
- [2] E. Yablonovitch , T. Gimitter , Phys. Rev. Lett. , 63(1989), 1950; E. Yablonovitch , T. Gmitter , K. M. Leung , Phys. Rev. Lett. 67(1991), 2295; G. Kweon , N. M. Lawandy , J. Mod. Opt. A1(1994), 311; U. Grünig , V. Lehmann , C. M. Engelhardt , Appl. Phys. Lett. , 66(1995), 3254; I. I. Tarhan , G. H. Watson , Phys. Rev. Lett. 76(1996), 315.
- [3] K. M. Ho, C. T. Chan, C. M. Soukoulis, Phys. Rev. Lett., 65(1990), 3152.
- [4] J. P. Dowling, C. M. Bowden, J. Opt. Soc. Am., B10 (1993), 353 ;M. Scalora, J. P. Dowling, C. M. Bowden, M. J. Bloemer, Phys. Rev. Lett., 73(1994), 1368.
- [5] C. C. Cheng, V. Arbet-Engels, A. Scherer, E. Yablonovitch, *Phys. Scr.*, **T68** (1997), 17.
- [6] S. John, T. Quang, Phys. Rev. ,A50 (1994), 1764.

- [7] S. John, T. Quang, Phys. Rev. Lett., 74(1995), 3419; 76
 (1996), 1320; 78(1997), 1888.
- [8] S. John , J. Wang , Phys. Rev. Lett. ,64 (1990),2418; Phys. Rev. B43 (1991),12772.
- [9] S.-Y. Zhu, H. Chen, H. Huang, Phys. Rev. Lett., 79(1997), 205 ;Y. P. Yang S. Y. Zhu M. S. Zubairy, Opt. Commun., 79 (1999), 166 ; Y. P. Yang J. Z. Xin X. S. Yuan, F. W. Guo, W. Xiang, Acta Physica Sinica, 48(1999), 603(in Chinese I 羊 亚平等 物理学报 48(1999), 603].
- [10] T. Quang, M. Woldeyohannes, S. John, G. S. Agarwal, Phys. Rev.Lett., 79(1997), 5238; X. S. Yuan, Y. P. Yang, L. Z. Xin, W. Xiang, Acta Physica Sinica, 48(1999), 1459(in Chinese] 谢双媛等 物理学报 48(1999), 1459].
- [11] M. O. Scully , M. S. Zubairy, Quantum Optics (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1997), Chap. 10.
- [12] J. Callaway, Quantum Theory of the Solid State (Academic Press, New York, 1976), Chap. 5.

SPONTANEOUS EMISSION FROM A THREE-LEVEL ATOM EMBEDDED IN A THREE-DIMENSIONAL PHOTONIC CRYSTAL*

XIE SHUANG-YUAN YANG YA-PING WU XIANG

(Department of Physics ,Tongji University ,Shanghai 200092 ,China) (Received 7 November 1999 ; revised manuscript received 6 March 2000)

Abstract

We have studied the properties of spontaneous emission from a three-level atom embedded in a photonic crystal. Due to the anisotropic dispersion relation, the density of states lacks singularity. The localized field can disappear and the diffusion field can become intense in some regions. This is different from that in the isotropic dispersion relation case. These properties are directly related to the relative positions of the two upper levels from the band edge.

Keywords : photonic crystal , three-level atom , spontaneous emission PACC : 4250 , 4270 , 3280

^{*} Project supported in part by the Foundation of Shanghai Educational Commission China and by the National High Technology Development Program of China (Grant No. 863-416-1-5).