第 49 卷 第 8 期 2000 年 8 月
1000-3290/2000/49(08)/1484-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 8, August, 2000

光学简并参量振荡中的量子非破坏性测量*

王丹翎　龚旗煌
(北京大学物理系,人工微结构和介观物理国家重点实验室,北京　100871)
汪凯戈　杨国健
(北京师范大学物理系,北京　100875)
(1999 年 11 月 19 日收到;2000 年 1 月 12 日收到修改稿)

应用非线性量子光学的全量子理论,对光学简并参量振荡中的量子非破坏性测量(QND)问题进行了研究. 发现测量系统在共振情况下,在阈值附近存在着最佳的 QND 测量;而在失谐情况下,系统的最佳 QND 测量位于非线性共振点(NDR).

关键词:量子光学,非线性共振,光学参量振荡
PACC:4250,4265Y,4265P

1　引　　言

近年来,有关光学系统中的量子非破坏性测量(QND)研究有了很大的发展[1]. 在这种测量中通常采用'信号'光和'探测'光相互耦合的双光束耦合模型. 量子非破坏性测量是指由测量引起的噪声不会耦合回待观测的信号,从而不影响对此信号光束精确测量的重复性[2]. 人们曾研究过 $\chi^{(2)}$ 非线性介质中的 QND 测量[3—8],发现在光学简并参量放大(DOPA)中可执行 QND 的测量[5],这是因为在这种参量放大的模型中,信号光与探测光通过同一个腔模耦合,但由于此时腔模没有被抽运光场所激励,工作在阈值以下,因此仍可看作是一个参量放大过程.

在本文中,我们将讨论光学简并参量振荡(DOPO)中的量子非破坏性测量. 简并光学参量振荡是指在某些非线性晶体上同时入射一个频率为 2ω 的强抽运波和一个频率为 ω 的信号波,当满足一定的相位匹配条件时,信号波将被放大,并伴随有与信号波同频率的空闲波产生;若将上述晶体放在一谐振腔内,并使谐振腔谐振于信号波或空闲波,此时只要参量放大增益系数超过某一阈值,就可以在信号波或空闲波的频率上产生参量振荡(OPO)[9]. DOPO 与前述 DOPA 的主要区别有两点[5]:第一,前者使用的是半开放腔,后者为封闭腔(只是此时腔模工作在阈值以下);第二,由于 DOPO 讨论的是阈值以上的静态操作,因而有两个腔模,而上述 DOPA 讨论的是阈值以下的静态操作,此时只有一个腔模. 在此模型中信号光由输入光束(抽运光束)携带,另一束由 DOPO 产生的光束就用来作为探测光. 又因为腔模工作在阈值以上,由半经典的理论得到期望值远大于相应的涨落,所以可采用线性近似理论.

2　光学简并参量振荡模型(DOPO)

在相互作用绘景中 DOPO 的哈密顿量为[10]

$$H = \hbar\Big[\sum_{j=1}^{2}\kappa_j\Delta_j a_j^{+}a_j + (\mathrm{i}g/2)(a_1^{+2}a_2 - a_1^{2}a_2^{+}) + \mathrm{i}(\varepsilon_2 a_2^{+} - \varepsilon_2^{*}a_2)\Big], \tag{1}$$

式中 a_j, a_j^{+} 分别为频率是 ω_j ($\omega_2\approx2\omega_1$) 的腔模 j 的湮没与产生算符;ε_2 为相干驱动场在频率为 $2\omega_0$ 时的振幅;g 为非线性耦合系数;κ_j 为相应模 j 的衰变比. 此时失谐参数为

$$\Delta_1 = (\omega_1-\omega_0)/\kappa_1, \quad \Delta_2 = (\omega_2-2\omega_0)/\kappa_2. \tag{2}$$

定义归一化的无量纲变量

$$A_1 = g\langle a_1\rangle/\sqrt{2\kappa_1\kappa_2}, \quad A_2 = g\langle a_2\rangle/\kappa_1,$$
$$E_2 = g\varepsilon_2/(\kappa_1\kappa_2),$$
$$\tau = \kappa_1 t, \ \kappa = \kappa_2/\kappa_1. \tag{3}$$

* 国家自然科学基金(批准号:19774013)资助的课题.

可得归一化的半经典动力学方程为

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau)A_1 = E_1 - (1+\mathrm{i}\Delta_1)A_1 + A_1^* A_2,$$
$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau)A_2 = \kappa[E_2 - (1+\mathrm{i}\Delta_2)A_2 - A_1^2]. \tag{4}$$

其在阈值以上精确的静态解为[10]

$$|A_1|^2 = (\Delta_1\Delta_2 - 1) + \sqrt{E_2^2 - (\Delta_1+\Delta_2)^2},$$
$$|A_2|^2 = 1 + \Delta_1^2, \tag{5}$$

其中 A_j 相应的位相满足方程

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\phi_2} = \frac{E_2}{1+\mathrm{i}\Delta_2}\left(1+\mathrm{i}\Delta_1 + \frac{|A_1|^2}{1+\mathrm{i}\Delta_2}\right)^2,$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2} = \frac{(1+\mathrm{i}\Delta_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\phi_1}}{\sqrt{1+\Delta_1^2}}, \tag{6}$$

式中 E_2 定义为实数.

对于共振情况,即失谐 $\Delta_1=\Delta_2=0$,上述静态解简化为

$$A_1 = \sqrt{E_2 - 1}, \quad A_2 = 1. \tag{7}$$

当失谐 Δ_1,Δ_2 满足 $\Delta_1\Delta_2>1$ 时,静态解之间存在着双稳态,并且出现在 $|E_2|^2=(\Delta_1+\Delta_2)^2$ 和 $|E_2|^2=(1+\Delta_1^2)(1+\Delta_2^2)$ 之间,分别为双稳的上支与下支.文献[10]中已经证明了此时的静态解是稳定的.

因为假设是半开放的腔模,所以输入、输出场的边界条件为

$$E_j^{\mathrm{out}} + E_j^{\mathrm{in}} = 2A_j \quad (j=1,2), \tag{8}$$

在光学简并参量振荡(DOPO)模型中,$E_1^{\mathrm{in}}=0$,因此第一个输出光的位相 ϕ_1^{out} 总是与 ϕ_1 相同,即输出场1与腔内场没有相移;第二个输出光束的位相由方程(8)得到.

于是,由静态解的方程得出

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}\phi_2^{\mathrm{out}}) &= \arg[(1-\mathrm{i}\Delta_2)A_2 - A_1^2]\\ &= \exp(\mathrm{i}\phi_2)\times\arg\{(1-\mathrm{i}\Delta_2)|A_2| - |A_1|^2\exp[\mathrm{i}(2\phi_1-\phi_2)]\}\\ &= \exp(\mathrm{i}\phi_2)\times\arg[|A_2|^2 - |A_1|^2 + \mathrm{i}(\Delta_1|A_1|^2 - \Delta_2|A_2|^2)].\end{aligned} \tag{9}$$

将(6)式代入上式,且考虑到第二个腔模的位相可以表示为

$$\exp(\mathrm{i}\phi_2) = E_2[|A_2|^2 + |A_1|^2 + \mathrm{i}(\Delta_1|A_1|^2 - \Delta_2|A_2|^2)]/|A_2E_2^2|. \tag{10}$$

当满足条件

$$\Delta_1|A_1|^2 = \Delta_2|A_2|^2 \tag{11}$$

时,第二个光束的输入场与腔内场、输出场与腔内场的相移就会消除.事实上,条件(11)式即为非线性共振(NDR)条件.根据此NDR条件,两失谐 Δ_1,Δ_2 必须同号,因此满足NDR条件的输入场静态解变为

$$E_2 = (1+\Delta_2/\Delta_1)\sqrt{1+\Delta_1^2}. \tag{12}$$

同时,腔内场满足NDR条件的静态解变为

$$|A_1| = \sqrt{\Delta_1\Delta_2 + \Delta_2/\Delta_1};$$
$$\exp(\mathrm{i}2\phi_1) = (1-\mathrm{i}\Delta_1)/\sqrt{1+\Delta_1^2};$$
$$A_2 = \sqrt{1+\Delta_1^2};\ \phi_2 = 0. \tag{13}$$

由本文以下部分可以看到,DNR条件对QND测量非常重要.

3　QND的测量

Holland等[11]提出了实现光学系统QND测量的三个判据,其实际上是输入场与输出场涨落的正交分量之间的关联系数.在频率域中,可定义哈密顿算符 p 和 q 的关联系数为

$$C^2(p,q) \equiv \frac{|\langle pq\rangle_{\mathrm{sym}}(\omega)|}{V(p)V(q)}, \tag{14}$$

$$\langle pq\rangle_{\mathrm{sym}} \equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\langle p(t)q + qp(t)\rangle, \tag{15}$$

$$V(p) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\langle p(t)q\rangle, \tag{16}$$

其中　$V(p)$ 为可观测量 $\hat{p}$ 的压缩谱.同理,可以得到 $V(q)$ 的表达式.

定义涨落算符为 $\delta a_j \equiv a_j - \langle a_j\rangle$,则哈密顿正交算符为

$$\chi_j = \frac{1}{2}[\delta a_j\exp(-\mathrm{i}\theta_j) + \mathrm{H.c.}], \tag{17}$$

其中 θ_j 表示涨落的正交位相.应该指出的是,方程(17)同样适用于输入、输出场.

假设光束1为探测场,光束2作为信号场,则QND测量的三个关联系数为

$$C_1^2 \equiv C^2(\chi_2^{\mathrm{in}},\chi_1^{\mathrm{out}}),\ C_2^2 \equiv C^2(\chi_2^{\mathrm{in}},\chi_2^{\mathrm{out}}),$$
$$C_3^2 = C^2(\chi_2^{\mathrm{out}},\chi_1^{\mathrm{out}}). \tag{18}$$

C_1^2 和 C_2^2 这两个判据分别表示测量的有效性和非破坏性，而 C_3^2 则用于线性系统条件方差的计算，它表示了系统量子态准备的好坏

$$V_C\langle\chi_2^{out}\mid\chi_1^{out}\rangle = V(\chi_2^{out})(1-C_3^2). \qquad (19)$$

由(18)和(19)式可知，当不等式 $C_2^2+C_1^2>1$ 和 $V_C<1$ 成立时，就可认为系统能够实现 QND 测量. 理想情况下实现最佳 QND 测量的条件为：$C_1^2=C_2^2=1$，且 $V_C\langle\chi_2^{out}\mid\chi_1^{out}\rangle=0$.

对量子涨落进行线形化处理，则可以由系统的线形漂移矩阵、扩散矩阵来描述上述三个判据[12]. 对于 DOPO 的情况，这些矩阵可以写为

$$M=\begin{pmatrix}-(1+\mathrm{i}\Delta_1) & A_2 & A_1^* & 0\\ A_2^* & -(1-\mathrm{i}\Delta_1) & 0 & A_1\\ -2\kappa A_1 & 0 & -\kappa(1+\mathrm{i}\Delta_2) & 0\\ 0 & -2\kappa A_1^* & 0 & -\kappa(1-\mathrm{i}\Delta_2)\end{pmatrix}, \qquad (20)$$

$$D=(g^2/2\kappa_1\kappa_2)\begin{pmatrix}A_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_2^* & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \qquad (21)$$

要实现理想的 QND 测量，需要寻找合适的参数和选择相应的涨落正交位相. 定义输入场、输出场的涨落与期望值之间的位相差异为

$$\Delta\theta_j=\theta_j-\phi_j \quad (j=1,2), \qquad (22)$$

式中 $\Delta\theta_j=0(\pm\pi/2)$ 分别代表正交振幅分量与正交位相分量.

以下讨论静态工作区域的两种最佳 QND 测量情况：

3.1 共振的情况($\Delta_1=\Delta_2=0$)

当信号光和探测光的正交位相取为 $\Delta\theta_j=\pi/2$，$-\pi/2$ 时，三个判据的零频表达式为

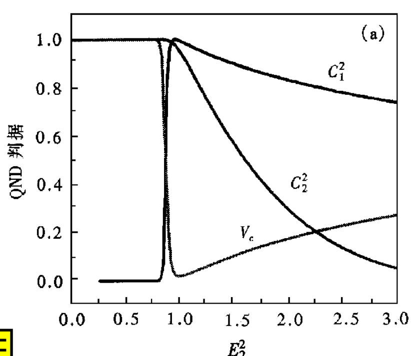
$$C_1^2=\frac{2}{|A_1|^2+2},\quad C_2^2=\frac{(|A_1|^2-1)}{|A_1|^4-1},$$

$$V_C=\frac{|A_1|^2}{|A_1|^2+2}, \qquad (23)$$

探测光和信号光的相应压缩式为

$$V_1=\frac{|A_1|^2(|A_1|^2+2)}{(|A_1|^2+1)^2},\quad V_2=\frac{|A_1|^4+1}{(|A_1|^2+1)^2}. \qquad (24)$$

此时的真空涨落为 1. 图 1(a)和图 1(b)分别是 QND 的判据和压缩，从图 1 中发现最佳 QND 测量出现在阈值附近，而在远离阈值的地方没有 QND 效果. 测量的有效性由判据 C_1^2 决定，并且与探测光的压缩有关，因为探测光的压缩变化可说明由测量所引起的噪声是否能在共轭正交探测光束中避开. 然而，随着信号光压缩的增大将会减弱信号光本身并最终破坏对它的测量.



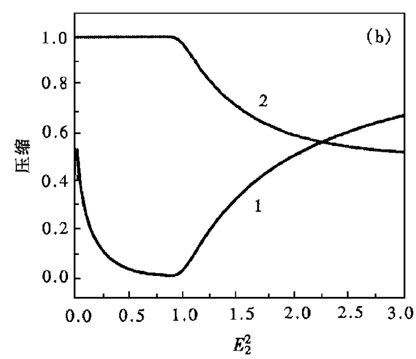


图 1 在共振和零频情况 (a) 为 QND 判据；(b) 为两模的压缩 此时以输入场强度为自变量

3.2　失谐情况

我们主要讨论失谐时非线性共振(NDR)情况下的静态解.

研究发现,当信号光、探测光 $\Delta\theta_j$ 取为零时,存在着合适的 QND 测量值. 仍取零频,可以将 NDR 下的三个判据简化为

$$C_1^2 = \frac{2\Delta_1\Delta_2(1+\Delta_1^2)}{\Delta_1^2+2\Delta_1^3\Delta_2+\Delta_2^2},\ C_2^2 = \frac{\Delta_2(1+\Delta_1^2)}{2\Delta_1+\Delta_2+\Delta_1^2\Delta_2},$$

$$V_c = \frac{(\Delta_1+\Delta_2)^2}{\Delta_1^2+2\Delta_1^3\Delta_2+\Delta_2^2}. \tag{25}$$

上式可由图 2 说明. 很明显,我们可以看到在很大的参量范围内都存在着最佳的 QND 测量. 为了更清楚地说明此情况的 QND 测量,我们分别取不同的失谐参量,结果见表 1.

表 1 是对图 2 的证实,其中 $|E_2^{in}|^2$ 的理论值由(12)式得到,因而当满足非线性共振条件时可以实现最佳的 QND 测量;其中 $|E_2^{in}|^2$ 的实验值是指通过数值模拟所计算的实际值. 图 3 给出了 $\Delta_1=10$, $\Delta_2=2$ 时,NDR 下系统的动力学特征和 QND 测量效果.

表 1　参量振荡的 QND 测量

	Δ_1	Δ_2	$C_1^2+C_2^2$	V_c	$\lvert E_2^{in}\rvert^2$(实验值)	$\lvert E_2^{in}\rvert^2$(理论)
1	2	2	1.9183	0.1233	104.03	103.99
2	3	2	1.7588	0.1971	27.73	27.78
3	4	1	1.6048	0.1633	26.60	26.56
4	8	1	1.7403	0.0718	82.27	82.27
5	10	1	1.7962	0.0572	122.24	122.21
6	10	2	1.8702	0.0337	144.45	145.44

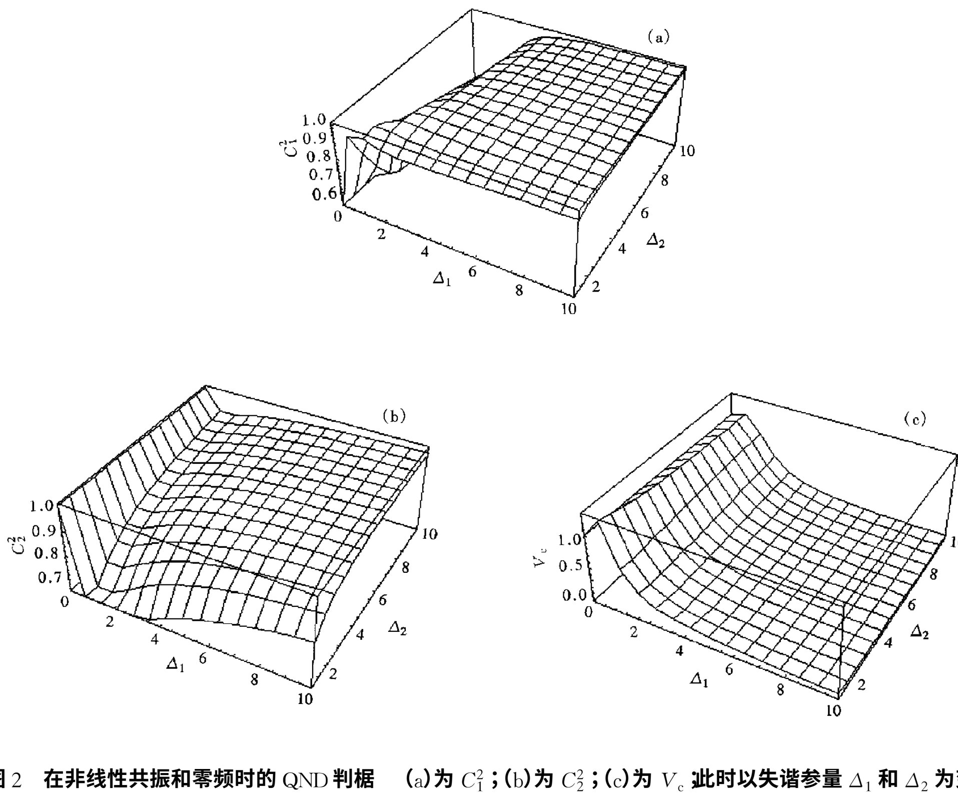


图 2　在非线性共振和零频时的 QND 判据　(a)为 C_1^2;(b)为 C_2^2;(c)为 V_c 此时以失谐参量 Δ_1 和 Δ_2 为变量

4　结　　论

我们研究了光学简并参量放大情况的 QND 测量,发现对于共振情形,系统在阈值附近存在着最佳的 QND 测量,这与文献中所说的工作在阈值以下的封闭腔时的 DOPA 相较,DOPO 要求半封闭腔一端有一个具有较高反射率的反射镜,且对探测光有较高的透过率;在失谐的情况下,最佳的 QND 测量存在于非线性共振点,此结果与正交 Kerr 散射模型[12—14]相一致.

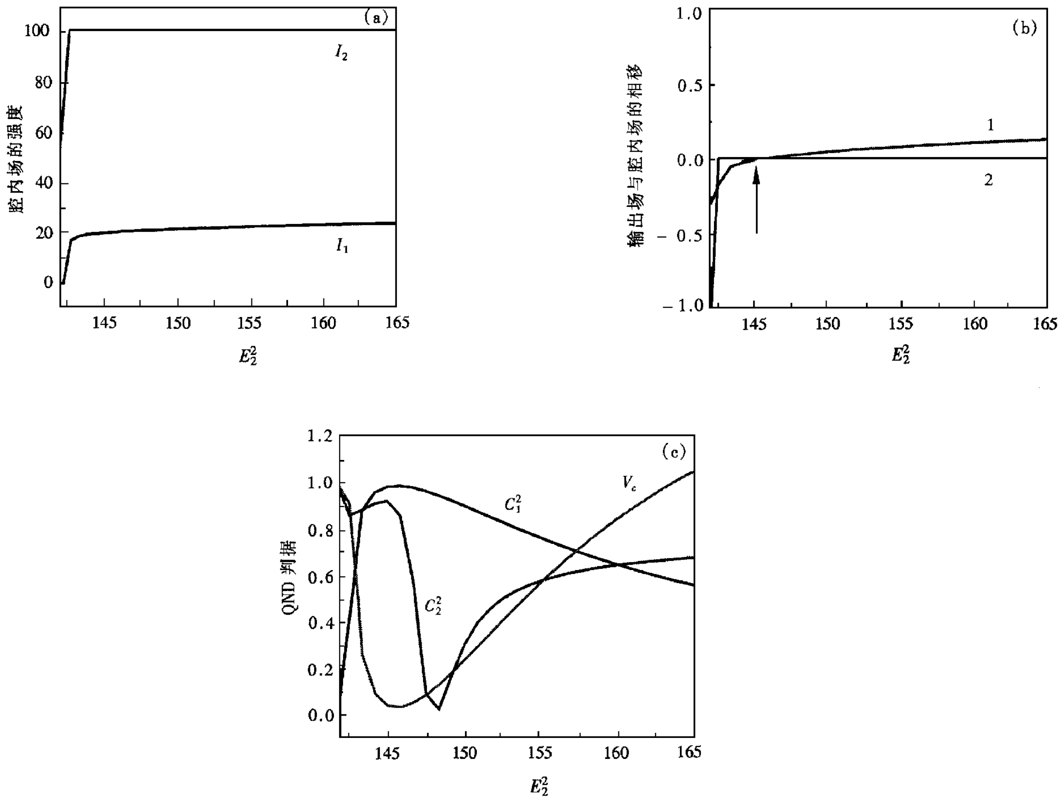


图 3 在 $\Delta_1=10$ 和 $\Delta_2=2$ (*a*)静态时的强度;(*b*) 输出场与腔内场的相移;(*c*) *QND* 判据. 以上均以输入场强度为自变量

[1] P. Grangier, J. A. Levenson, J. P. Poizat, *Nature*, **396** (1998), 537.

[2] V. B. Brangisky, Yu. I. Vorontsov, *Usp. Fiz. Nauk*, **41** (1974), 114.

[3] A. La Porta, R. E. Slusher, B. Yurke, *Phys. Rev. Lett.*, **62** (1989), 28.

[4] M. Dance, M. J. Collett, D. Walls, *Phys. Rev. Lett.*, **66** (1991), 1115.

[5] P. Smith, M. J. Collett, D. F. Walls, *Opt. Commun.*, **102** (1993), 105.

[6] S. F. Pereira, Z. Y. Ou, H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.*, **72** (1994), 214.

[7] K. Bencheikh, J. A. Levenson, Ph. Grangier, O. Lopez, *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995), 3422.

[8] R. Bruckmeier, H. Hansen, S. Schiller, *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997), 1463.

[9] Y. H. Zou, T. H. Sun, Laser Physics (Peking University Press, Beijing, 1991) (in Chinese) [邹英华、孙 亨,激光物理学(北京大学出版社,北京,1991)].

[10] C. Fabre, E. Giacobino, A. Heidmann, L. Lugiato, S. Reynaud, M. Vadacchino, Wang Kaige, *Quantum Opt.*, **2** (1990), 159.

[11] M. J. Holland, M. J. Collett, D. F. Walls, M. D. Levenson, *Phys. Rev.*, **A42** (1990), 2995.

[12] K. G. Wang, G. J. Yang, *Commun. Theor. Phys.*, **31** (1999), 347.

[13] P. Grangier, J. F. Roch, S. Reynaud, *Opt. Commun.*, **72** (1989), 387.

[14] C. A. Blockley, D. F. Walls, *Opt. Commun.*, **79** (1990), 241.

QUANTUM NONDEMOLITION MEASUREMENTS IN DEGENERATE OPTICAL PARAMETRIC OSCILLATOR*

WANG DAN-LING　GONG QI-HUANG
(*Department of Physics, State Key Laboratory for Artificial Microstructure and Mesoscopic Physics, Peking University, Beijing*　100871, *China*)
WANG KAI-GE　YANG GUO-JIAN
(*Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing*　100875, *China*)
(Received 19 November 1999; revised manuscript received 12 January 2000)

ABSTRACT

The knowledge about nonlinear quantum optics is applied to the study of the degenerate optical parametric oscillator as a quantum non-demolition (QND) measurement device. We find that the model can perform a perfect QND measurement at the threshold in the resonant case, and the optimum QND measurement occurs at the nonlinear double resonances in the detuning case.

Keywords: quantum optics, nonlinear double resonances, optical parametric oscillator
PACC: 4250, 4265Y, 4265P

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19774013).