第 49 卷 第 8 期 2000 年 8 月
1000-3290/2000/49(08)/1644-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 8, August, 2000

充满物质的 Friedmann-Robertson-Walker 宇宙的稳定性*

赵 仁 张丽春
(雁北师范学院物理系,大同 037000)
(1999 年 5 月 2 日收到;1999 年 11 月 17 日收到修改稿)

研究了在含有宇宙(学)常数的 Friedmann-Robertson-Walker 宇宙模型中,充满、满足 $p=(\gamma-1)\rho$ 物质宇宙的稳定性.通过计算引力波的扰动,以及 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho=\gamma-1$ 的扰动,得到对于 $\varepsilon=-1$, $\Lambda<0$,满足 Einstein 场方程的宇宙只要 $\gamma\geqslant0$ 是不稳定的.

关键词:充满物质的 Friedmann-Robertson-Walker 宇宙,虫洞,时空稳定性
PACC:9760L,0420

1 引 言

最近 Lorentzian 虫洞的研究逐渐引起人们的注意.由于允许人们回到过去的时间机器,可以通过 Lorentzian 虫洞进出口的相对运动而构造[1,2].在多数情况下,存在 Cauchy 视界,它将具有闭合类时曲线的区域,与具有因果性好的不含闭合类时或类光曲线的区域分开.如果 Cauchy 视界受经典或量子的扰动是不稳定的,则这种不稳定将阻止闭合类时曲线的形成.已有许多作者研究了这个问题[3,4].

对于既无物质又无辐射的 De Sitter 宇宙模型,已研究了当宇宙常数 $\Lambda=0$ 的各向同性均匀宇宙模型的稳定性[5,6],讨论了当 $\Lambda<0$ 的反 De Sitter 宇宙的稳定性[7].本文用这些方法讨论一般的、充满理想流体物质的含有宇宙常数、满足 Einstein 场方程的宇宙模型的稳定性。

2 充满物质的 Friedmann-Robertson-Walker(FRW)宇宙

满足宇宙学原理的四维时空 FRW 线元($c=1$)

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-R^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\varepsilon r^2}+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right),\tag{1}$$

其中 $\varepsilon=0,\pm1$.

由 Einstein 场方程可得[8,9]

$$8\pi G\rho=3\frac{\dot{R}^2}{R^2}+3\frac{\varepsilon}{R^2},\tag{2}$$

$$8\pi GP=-2\frac{\ddot{R}}{R}-\frac{\dot{R}^2}{R^2}-\frac{\varepsilon}{R^2},\tag{3}$$

G 为引力常量,ρ 为能量密度,P 为压强.

文献[10]指出,宇宙充满一般物质时,可采用理想气体的物态方程

$$P=(\gamma-1)\rho,\tag{4}$$

其中 γ 为一常数.由方程(2),(3)和(4)可得

$$R\ddot{R}+\left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)\dot{R}^2+\left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)\varepsilon=0.\tag{5}$$

对含有宇宙常数 Λ 的模型,方程(5)可写为

$$R\ddot{R}+\left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)\dot{R}^2+\left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)\varepsilon-\frac{\gamma}{2}\Lambda R^2=0.\tag{6}$$

对于 $\Lambda<0$,方程(6)的解为

$$R(t)=\alpha\cos(t/\alpha)\quad\varepsilon=-1,\tag{7}$$

其中 $\alpha^2=-3/\Lambda$,所以充满物质的 FRW 时空线元为

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+\alpha^2\cos^2(t/\alpha)[\mathrm{d}\chi^2+\mathrm{sh}^2\chi(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)]\qquad0\leqslant\chi<\infty,\ \varepsilon=-1,\tag{8}$$

其中利用了坐标变换 $\mathrm{sh}\chi=r$.

对方程(8)作共形变换

$$\mathrm{d}t=\alpha\cos(t/\alpha)\mathrm{d}\eta,\tag{9}$$

则方程(8)化为

* 国家自然科学基金(批准号:19773003)及山西省自然科学基金(批准号:971009)资助的课题.

$$ds^2 = \alpha^2\cosh^{-2}\eta[-d\eta^2 + d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \tag{10}$$

其共形因子为

$$a(\eta) = \alpha/\cosh\eta. \tag{11}$$

考虑小的度规扰动 δg_μ^ν，则不被扰动的度规 g_μ^ν 变为 $g_\mu^\nu + \delta g_\mu^\nu$，为方便计，记 $\delta g_\mu^\nu \equiv h_\mu^\nu$，设未被扰动的度规为 Einstein 场方程的解，则在一阶近似下，小的扰动满足方程

$$\delta R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R = \delta T_\mu^\nu, \tag{12}$$

其中

$$\delta R_\alpha^\beta = \frac{1}{2a^2}(h_{\alpha;\gamma}^{\gamma;\beta} + h_{\gamma;\alpha}^{\beta;\gamma} - h_{\alpha;\gamma}^{\beta;\gamma} - h_{;\alpha}^{;\beta}) + \frac{1}{2a^2}h_\alpha^{\beta''} + \frac{a'}{a^3}h_\alpha^{\beta'} + \frac{\alpha'}{2a^3}h'\delta_\alpha^\beta \mp \frac{2}{a^3}h_\alpha^\beta, \tag{13}$$

$$\delta R_0^0 = \frac{1}{2a^2}h'' + \frac{a'}{2a^3}h', \ \delta R_\alpha^0 = \frac{1}{2a^2}(h'_{;\alpha} - h_{;\beta}^{\beta'}), \tag{14}$$

$$\delta R = \frac{1}{a^2}(h_{\alpha;\gamma}^{\alpha;\gamma} - h_{;\alpha}^{;\alpha}) + \frac{1}{a^2}h'' + \frac{3a'}{a^3}h' \mp \frac{2h}{a^3}. \tag{15}$$

在扰动前的参考系为共动坐标，四速度分量为

$$U^i = 0, \quad U^0 = 1/a. \tag{16}$$

考虑小的扰动，我们选择坐标系使得 $h_{0i} = h_{00} = 0$[8].

能动-张量的扰动

$$\delta T_\mu^\nu = (p + p)(U_\mu\delta U^\nu + U^\nu\delta U_\mu) + (\delta p + \delta\rho)U_\mu U^\nu + \delta_\mu^\nu\delta p. \tag{17}$$

利用关系式 $g_{\nu\mu}U^\nu U^\mu = -1$，可得

$$h_{\nu\mu}U^\nu U_\mu + g_{\nu\mu}(U^\nu\delta U^\mu + U^\nu\delta U^\mu) = 0. \tag{18}$$

由于 $h_{00} = h_{0i} = 0$，所以上面的方程中

$$\delta U^0 = 0. \tag{19}$$

因此，把 δT_μ^ν 分别写成

$$\delta T_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta\delta p, \ \delta_0^\beta = -a(p+\rho)\delta U^\beta, \ \delta T_0^0 = -\delta\rho, \tag{20}$$

利用 $\delta p = (dp/d\rho)\delta\rho$，有

$$\delta T_\alpha^\beta = -\delta_\alpha^\beta\frac{dp}{d\rho}\delta T_0^0. \tag{21}$$

把方程(21)代入方程(12)—(15)，可得

$$(h_{\alpha;\gamma}^{\gamma;\beta} + h_{\gamma;\alpha}^{\beta;\gamma} - h_{;\alpha}^{;\beta} - h_{\alpha;\gamma}^{\beta;\gamma}) + h_\alpha^{\beta''} + \frac{2a'}{a}h_\alpha^{\beta'} \mp h_\alpha^\beta = 0 \quad \alpha \neq \beta, \tag{22}$$

$$\frac{1}{2}(h_{;\gamma}^{;\gamma} - h_{\gamma;\alpha}^{\alpha;\gamma}) - h'' - 2\frac{a'}{a}h' \pm h = 3\frac{dp}{d\rho}[\frac{1}{2}(h_{\gamma;\alpha}^{\alpha;\gamma} - h_{;\gamma}^{;\gamma}) + \frac{a'}{a}h' \mp h], \tag{23}$$

并且可得密度的相对变化率为

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{a^2}{9(a'^2 \pm a^2)}\left(h_{\alpha;\beta}^{\beta;\alpha} - h_{;\alpha}^{;\alpha} + \frac{2a'}{a}h' \mp 2h\right), \tag{24}$$

其中 $a' = da/d\eta$. 方程(10)满足 Einstein 方程

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{2}R\delta_\mu^\nu + \Lambda\delta_\mu^\nu = -8\pi G[\gamma\rho U_\mu U^\nu + (\gamma - 1)\rho\delta_\mu^\nu], \tag{25}$$

改写为

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{2}R\delta_\mu^\nu = T_\mu^\nu, \tag{26}$$

其中 $T_\mu^\nu = -8\pi G[\gamma\rho U_\mu U^\nu + (\gamma-1)\rho\delta_\mu^\nu] - \Lambda\delta_\mu^\nu$.

Lifshitz 和 Khalatnikov 定义了三种四维球对称波函数，即标量球对称波函数 Q，矢量球对称波函数 S_μ 和张量球对称波函数 G_μ^ν[5]. 用这些球对称波函数组成张量

$$Q_\mu^\nu = \frac{1}{3}\delta_\mu^\nu Q, P_\mu^\nu = \frac{Q_{;\mu}^{;\nu}}{n^2+1} + Q_\mu^\nu, S_\mu^\nu = S_{;\mu}^{;\nu} + s_{;\mu}^\nu, \tag{27}$$

其中 n 为球对称波函数的阶.

下面分别讨论充满物质的 FRW 宇宙由引力波，以及 $dp/d\rho = \gamma - 1$ 的变化的扰动.

3 引力波的扰动

张量球对称波函数 G_μ^ν 给出了 h_α 的扰动分布

$$h_\alpha^\beta = \nu(\eta)G_\alpha^\beta. \tag{28}$$

对开宇宙($\varepsilon = -1$)，将方程(28)代入(22)式，可得

$$\nu'' + 2\frac{a'}{a}\nu' + (n^2+1)\nu = 0. \tag{29}$$

注意到 $a = \alpha/\cosh\eta, a' - \alpha\mathrm{sh}\eta/\mathrm{ch}^2\eta$，

$$a'/a = -\tanh\eta, \tag{30}$$

所以方程(29)化为

$$\nu'' - 2\tanh\eta\nu' + (n^2+1)\nu = 0. \tag{31}$$

当 η 非常大时，$\tanh\eta \to 1$，方程(31)的渐近表达式为

$$\nu'' - 2\nu' + (n^2+1) = 0, \tag{32}$$

其解为

$$\nu = (C_1 e^{in\eta} + C_2 e^{-in\eta})e^\eta, \tag{33}$$

其中 C_1 和 C_2 为积分常数. 由文献[7]可知：$H = h_i^j h_j^i$，将方程(28)和(33)代入，即可求得 H

$$H = (C_1^2 e^{2in\eta} + 2C_1C_2 + C_2^2 e^{-2in\eta})e^{2\eta}. \tag{34}$$

由此可知，只要 $\Lambda < 0$，在引力波的扰动下，由度规的微小变分构造的标量随时间的增加而无限增加，这样导致度规本身的改变，因此本文所讨论的宇宙

是不稳定的.

4 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho=\gamma-1$ 的扰动

用

$$h_\alpha^\beta = \lambda(\eta)P_\alpha^\beta + \mu(\eta)Q_\alpha^\beta \tag{35}$$

来描述完全流体的扰动. 对于 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho=\gamma-1$,将它和(35)式代入(22)和(23)式,并利用当 η 非常大时,$\tanh\eta\to1$,可得

$$\lambda'' + 2\frac{a'}{a}\lambda' - \frac{n^2+1}{3}(\lambda+\mu) = 0, \tag{36}$$

$$\mu'' + (3\gamma-1)\frac{a'}{a}\mu' + \frac{n^2+1}{3}(3\gamma-2)(\lambda+\mu) = 0, \tag{37}$$

其解为

$$\lambda(\eta) = D_1\mathrm{e}^{\eta} + D_2\mathrm{e}^{x_1\eta} + D_3\mathrm{e}^{x_2\eta}, \tag{38}$$

$$\mu(\eta) = C_3D_1\mathrm{e}^{\eta} + C_4D_2\mathrm{e}^{x_1\eta} + C_5D_3\mathrm{e}^{x_2\eta}, \tag{39}$$

其中

$$C_3 = \frac{n^2+4}{n^2+1},$$

$$C_4 = \frac{27\gamma^2-6[n^2(\gamma-1)+7\gamma-4]}{2(n^2+1)} + \frac{3\sqrt{9\gamma^2-4[n^2(\gamma-1)+7\gamma-5]}}{n^2+1}\left(\frac{3\gamma}{2}-1\right) - \frac{9\gamma}{n^2+1} - 1,$$

$$C_5 = \frac{27\gamma^2-6[n^2(\gamma-1)+7\gamma-5]}{2(n^2+1)} - \frac{3\sqrt{9\gamma^2-4[n^2(\gamma-1)+7\gamma-5]}}{n^2+1}\left(\frac{3\gamma}{2}-1\right) - \frac{9\gamma}{n^2+1} - 1,$$

$$x_1 = \frac{3\gamma+\sqrt{9\gamma^2-4[n^2(\gamma-1)+7\gamma-5]}}{2}, \quad x_2 = \frac{3\gamma-\sqrt{9\gamma^2-4[n^2(\gamma-1)+7\gamma-5]}}{2},$$

D_1,D_2 和 D_3 为积分常数.

标量函数 $H=h_i^jh_j^i$,可由(35)式得

$$H = \lambda^2P_i^jP_j^i + \lambda\mu(P_i^jQ_j^i + Q_i^jP_j^i) + \mu^2Q_i^jQ_j^i. \tag{40}$$

把(38)和(39)式代入(40)式可得,只要 $\Lambda>0$,在 $\eta\to\infty$ 时,由度规的微小变分构造的标量随时间的增加无限增加,这导致度规本身的改变,因此本文所讨论的宇宙是不稳定的.

对于能量密度的相对变化率(24)式可写为

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{a^2}{9(a'^2-a^2)}\left[(n^2+4)(\lambda+\mu) + 3\frac{a'}{a}\mu'\right]Q. \tag{41}$$

由(38)和(39)式可得

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -\frac{\mathrm{ch}^2\eta}{9}(n^2+4)\left[D_1(1+2C_3)\mathrm{e}^{\eta} + D_2\left(1+C_4+\frac{C_4x_1}{n^2+4}\right)\mathrm{e}^{x_1\eta} + D_3\left(1+C_5+\frac{C_5x_2}{n^2+4}\right)\mathrm{e}^{x_1\eta}\right]Q. \tag{42}$$

由(42)式可得,能量密度的相对变化率在 $\eta\to\infty$ 时是发散的,所以此宇宙是不稳定的.

5 讨 论

本文讨论了充满物质含有宇宙常数的宇宙,当压强 P 与能量密度 ρ 满足关系式 $P=(\gamma-1)\rho$,$\gamma\geqslant0$,$\Lambda<0$ 时,不论是引力波的扰动,还是 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho=\gamma-1$ 的扰动都是不稳定的.

对于尘埃物质的扰动,$\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho=0$,它相当于本文所讨论问题中 $\gamma=1$ 的情况.

在经典相对论中,宇宙常数作为常数参数,但是在量子理论中,宇宙常数在暴胀理论中是非常重要的[11],因此,宇宙常数的扰动在量子场理论的观点下是富有意义的. 对宇宙常数的扰动,可取 $P=-\rho=\Lambda/8\pi$,即 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho=-1$,它相当于本文所讨论问题中 $\gamma=0$ 的情况.

本文研究的是一般的情况,所得结论更具有普遍的物理意义.

[1] M. S. Morris, K. S. Thorne, *Am. J. Phys.*, **56**(1988), 395.

[2] M. S. Morris, K. S. Thorne, U. Yurtsever, *Phys. Rev. Lett.*, **61**(1988), 1446.

[3] S. W. Kim, K. S. Thorne, *Phys. Rev.*, **D43**(1991), 3929.

[4] S. W. Hawking, *Phys. Rev.*, **D46**(1992), 603.

[5] E. M. Lifshitz, I. M. Khalatnikov, *Adv. Phys.*, **12**(1963), 185.

[6] J. M. Bardeen, *Phys. Rev.*, **D22**(1980), 1882.

[7] J. M. Xu, L. X. Li, L. Liu, *Phys. Rev.*, **D50**(1994), 488.

[8] P. J. Peebles, Physical Cosmology (Princeton University Press, Princton, 1971).

[9] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology (Wiley, New York, 1972).

[10] J. A. S. Lima, J. A. M. Moreira, J. Santos, *Gen. Rel. Grav.*, **30** (1998), 425.

[11] E. W. Kolb, M. S. Turner, The Early Universe (Addison-Wesley, New York, 1990).

STABILITY OF FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER UNIVERSE FILLED WITH MATTER*

ZHAO REN　ZHANG LI-CHUN

(*Department of Physics, Yanbei Teachers College, Datong* 037000, *China*)

(Received 2 May 1999; revised manuscript received 17 November 1999)

ABSTRACT

The stability of the universe filled with matter, which satisfies $P=(\gamma-1)\rho$, is investigated in Friedmann-Robertson-Walker the universe model containing a cosmological constant. The universe satisfying Einstein field equation is obtained for $\varepsilon=-1$ and $\Lambda<0$. When $\gamma\geqslant 0$, the universe is shown to be unstable by calculating the perturbation of gravitational wave and using the relation $\mathrm{d}P/\mathrm{d}\rho=\gamma-1$.

Keywords: Friedmann-Robertson-Walker universe filling matter, wormhole, stability of a space-time

PACC: 9760, 0420

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19773003) and by the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 971009).