第 49 卷 第 9 期 2000 年 9 月
1000-3290/2000/49(09)/1657-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 9, September, 2000

利用 Miura 型不可逆变换得到高维可积模型*

楼森岳
(上海交通大学应用物理系,上海 200030)
(宁波大学物理系,宁波 315211)
(2000 年 2 月 24 日收到)

寻找高维可积模型(特别是 3+1 维可积模型)是非线性物理中的一个非常重要的问题.建立了一种利用不可逆形变关系系统寻求高维可积模型的方法.不可逆形变既可以使可积模型成为不可积模型,也可以使不可积模型成为可积模型.利用一种不可逆的 Miura 型形变关系和线性波动方程,得到了一个非平庸的 Painlevé 可积的高维非线性模型.

关键词:高维可织模型,不可逆形变,波动方程,Miura 型变换
PACC:0340K,0230J,0365G

1 引 言

由于孤子理论在场论,凝聚态物理,流体物理,等离子体物理,光学等物理学各分支的广泛应用[1—5],可积系统的研究引起了许多数学家和物理学家的极大兴趣.然而,由于寻找高维可积模型(特别是 3+1 维可积模型)的困难,过去对孤子系统的研究主要被限制于低维(1+1 和 2+1 维)可积模型的研究.最近,我们提出了一些寻求高维可积模型的可能途径.如 1)基于所有已知 2+1 维可积模型都具有一个广义的无中心的 Virasoro 型对称代数[6]

$$[\sigma(f_1),\sigma(f_2)] = \sigma(\dot{f}_2 f_1 - \dot{f}_1 f_2), \quad (1)$$

而所有已知的 2+1 维不可积模型都不具有这样一个对称代数的事实,我们提出了具有广义 Virasoro 对称代数意义下的可积性并建立了寻求在此意义下的可积模型的一般方法[7].2)利用任意一个 1+1 维可积模型的递推算子,可以得到许多任意维度下的高维可积模型(高维破裂孤子方程)[7,8].3)利用内部参数相关的对称约束也可能得到一些特殊类型的高维可积模型[9].4)由于任何低维可积模型都具有一个共形不变的 Schwarz 形式,提出了用高维共形不变量构造高维可积模型的想法并证明了一些相当一般的高维的共形不变模型的 Painlevé 可积性[10].5)在文献[11]中,以 Kadomtsev-Petviashvili 方程为种子,利用推广的 Painlevé 分析方法,得到了许多高维的 Painlevé 可积的可积模型.

通常,从一个复杂的理论出发,利用一些合适的极限过程,很容易得到简单的理论.例如,当 Planck 常数 $\hbar$ 趋向于零时任何量子理论退化成经典理论;当光速趋向于无穷时任何相对论理论简化成非相对论理论.相反,要将一个简单理论形变到一个复杂理论却是相当困难的.幸运的是,在许多情况下从一个简单理论形变到一些复杂理论是可能的也是有意义的.例如,经典的 Yang-Baxter 方程可以被成功地形变到量子的 Yang-Baxter 方程.一些零质量的用共形场论描述的临界理论可以被形变到非零质量的临界理论[12].一些简单非线性 Klein-Gordon 场(如 sine-Gordon 和 ϕ^4 场)的一些精确解可以被形变到许多复杂的非线性 Klein-Gordon 场(如双 sine-Gordon,ϕ^6,$\phi^3+\phi^4$ 和耦合非线性 Klein-Gordon 场)的解[13—16].

在非线性物理中,从一个高维可积模型出发,利用许多不同的途径,可以得到许多低维可积模型.使用经典和非经典的李群方法来约化(1+1)和(2+1)维可积模型时,总是得到一些著名的像 Riccati 方程和 Painlevé Ⅰ-Ⅳ 型方程这样的常微分方程[17—19].这一事实表明 所有 1+1 维和 2+1 维可积模型都可以看成是某些可积常微分方程的形变.如果存在 3+1 维或更高维的可积模型,它们也必可以从低维

* 国家杰出青年基金(批准号:19925522)和国家自然科学基金(批准号:19975025)资助的课题.

可积模型的形变得到. 本文试图从一个平庸的线性低维可积模型的不可逆形变得到一些非平庸的高维的(特别是 3+1 维的)非线性可积模型.

2 一般形变关系

设

$$u_t = F(u) \equiv F(x_0 = t, x_1, x_2, \cdots, x_m, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, \cdots), \tag{2}$$

$u = (u_1, u_2, \cdots, u_p)^{\mathrm{T}}$(上标 T 表示矩阵的转置)是一个低维可积模型,则一个一般的形变关系

$$B(u, v) = 0, \quad 或 \quad u = U(v) \tag{3}$$

将把原模型(2)变成一个新的模型. 新模型 $v = (v_1, v_2, \cdots, v_p)$ 满足的演化方程可以以下述方式得到:首先将变换关系(3)式对 t 求导,然后利用(2)式消去 u_t,最后利用(3)式消去 u,结果为

$$v_t = -(B'_v)^{-1} B'_u F(u)\big|_{u=U(v)} + Q(v) \equiv J(v), \quad (B'_v Q(v) = 0), \tag{4}$$

其中,B'_v 和 B'_u 为列矩阵 B 对 v 和 u 的线性化算子. 如

$$B'_v = \begin{pmatrix} B'_{1v_1} & B'_{1v_2} & \cdots & B'_{1v_p} \\ B'_{2v_1} & B'_{2v_2} & \cdots & B'_{2v_p} \\ & & \cdots & \\ B'_{pv_1} & B'_{pv_2} & \cdots & B'_{pv_p} \end{pmatrix},$$

$$B'_{iv_j} f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} B_i(u, v_j + \varepsilon f)_{\varepsilon=0}. \tag{5}$$

$Q(v)$ 是线性化算子 B'_v 的核及 $(B'_v)^{-1}$ 是 B'_v 的右逆算子,$B'_v(B'_v)^{-1} = 1$. (3)和(4)式的逆形变关系为

$$u_t = F(u) + P(u) \equiv M(u), \ (B'_u P(u) = 0), \tag{4'}$$

其中,$P(u)$ 是线性化算子 B'_u 的核. 从(2),(4)和(4′)式可知,一般情况下形变关系(3)是不可逆的. 仅当算子的核 $Q(v)$ 和 $P(u)$ 规定取作零时,形变关系(3)才是可逆的. 当形变关系不可逆时,形变关系(3)由于变换核的存在并不能保持可积性. 另一方面,由于变换核的出现,我们可以从一些平凡的线性模型得到非平凡的非线性可积模型.

根据上述形变关系,可以从两个不同的角度得到新的可积模型.

(1) 选择相同的源方程及不同的形变关系来得到有意义的新模型. 在文献[20]中,固定一个非常平庸的(0+1)维 Riccati 方程

$$u_t = u^2 \tag{6}$$

为源方程. 源方程(6)等价于一个非常简单的线性方程:$v_{tt} = 0, u = -(\ln v)_t$. 当对(6)式作不同的形变时,得到了许多有意义的(1+1)维和(2+1)维的 sinh-Gordon (SHG) 和 Mikhailov-Dodd-Bullough (MDB)方程. 然而,我们还没有从 Riccati 方程(6)得到一个有意义的 3+1 维可积模型.

(2) 另一方面,也可以固定形变关系(3),由选择不同的源方程来得到新的可积模型.

3 与 Miura 变换相关的形变关系

本节将利用上节第二种方法来得到一些新的可积模型. 为了具体起见,固定形变关系(3)为

$$B_1(u, v) \equiv u_{1xx} u_1 - \frac{a-1}{a} u_{1x}^2 - \left(v_{1x} + \frac{1}{a} v_1^2\right) u_1^2 = 0, \tag{7}$$

$$B_2(u, v) \equiv 2(1-a) u_{1x} u_{2x} + a u_{1xx} u_2 - (a v_{2x} + 2 v_1 v_2) u_1^2 + (a u_{2xx} - 2a v_{1x} u_2 - 2 v_1^2 u_2) u_1 = 0. \tag{8}$$

形变关系的第一式(7)正来自于通常的 Miura 变换. 众所周知 Miura 变换,

$$q = -A v_{1x} - \frac{A}{a} v_1^2, \tag{9}$$

将修正 KdV(MKDV)方程$\left(v_{1t} + v_{1xxx} - \frac{6}{a^2} v_1^2 v_{1x} = 0\right)$的解变换成 KdV 方程$\left(q_t + \frac{6}{aA} q q_x + q_{xxx} = 0\right)$的解. 另一方面,下述变换关系

$$q = -A \frac{u_{1xx}}{u_1} + A \frac{a-1}{a} \frac{u_{1x}^2}{u_1^2}, \tag{10}$$

将 Schwarz KdV 方程($\psi_x = u_1$),

$$\frac{\psi_t}{\psi_x} + \{\psi; x\} = 0, \quad \{\psi; x\} \equiv \frac{\psi_{xxx}}{\psi_x} - \frac{3}{2} \frac{\psi_{xx}^2}{\psi_x^2} \tag{11}$$

的解变换成 KdV 方程($a = \pm 2$)的解. 将(9)和(10)式中的 q 消去,即得形变关系(7). 实际上,Miura 变换(7)不仅仅联系了 KdV 方程和 MKdV 的解,而且也联系了许多其他有意义的物理模型. 如 Sawada-Kortera 方程和 Kaup-Kupershmidt 方程都通过 Miura 变换(7)中的 A 和 a 的不同选择而联系于 Fordy-Gibbon 方程[21]. 变换关系(8)可以看成是(7)式的线性化形式.

为了从(2)式及变换关系(7)和(8)得到一些新的模型,将(7)和(8)式对 t 微分一次,并将 u_{1t} 和 u_{2t} 分别换为原模型(2)中的 $F_1(u)$ 和 $F_2(u)$. 结果为

$$B'_{1u_1}F_1(u)+B'_{1v_1}v_{1t}=0, \tag{12}$$

$$B'_{2u_1}F_1(u)+B'_{2u_2}F_2(u)+B'_{2v_1}v_{1t}+B'_{2v_2}v_{2t}=0. \tag{13}$$

其中各偏线性化算子为

$$B'_{1u_1}=B'_{2u_2}=(au_1\partial_x^2+2(1-a)u_{1x}\partial_x+au_{1xx}-2u_1v_1^2-2au_1v_{1x}), \tag{14}$$

$$B'_{1v_1}=B'_{2v_2}=-u_1^2(2v_1+a\partial_x), \tag{15}$$

$$B'_{2u_1}=(au_2\partial_x^2+2(a-1)u_{2x}\partial_x+au_{2xx}-2au_2v_{1x}-2v_1^2u_2-2u_1(av_{2x}+2v_1v_2)), \tag{16}$$

$$B'_{2v_1}=-(2au_1u_2\partial_x-2u_1(v_2u_1+u_2v_1)). \tag{17}$$

为了得到 v_1 和 v_2 的封闭形式,可以利用形变关系(7)和(8)将(12)和(13)式中的 u_1 和 u_2 消去. 从(7)和(8)式中可得

$$u_1=-\mathrm{e}^{\int^x v_1\mathrm{d}x}f^a\equiv U_1(v),\ f\equiv c_1\int e^{\frac{-2\int v_1\mathrm{d}x}{a}}\mathrm{d}x+c_2, \tag{18}$$

$$u_2=-\mathrm{e}^{\int^x v_1\mathrm{d}x}\Big(f^{a-1}ac_3\int \mathrm{e}^{-\int\frac{2}{a}v_1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-2f^{a-1}ac_1\int v_2\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{a}v_1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+f^{a-1}ac_4+f^av_2\Big)\equiv U_2(v), \tag{19}$$

其中 c_1,c_2,c_3 和 c_4 均为与 x 无关的任意函数. 将(18)和(19)式代入(12)和(13)式即得 v_1 和 v_2 的演化方程为

$$v_{1t}=-(B'_{1v_1})^{-1}B'_{1u_1}F_1(u)+Q_1(v_1)\,|_{u_1=U_1(v)}, \tag{20}$$

$$v_{2t}=(B'_{1v_1})^{-1}((B'_{2u_1}-B'_{2v_1}(B'_{1v_1})^{-1}B'_{1u_1})F_1(u)+B'_{2u_2}F_2(u)+B'_{2v_1}Q_1(v_1))+Q_2(v_1)\,|_{u=U(v)}, \tag{21}$$

其中 $Q_1(v_1)$ 和 $Q_2(v_1)$ 为 B'_{1v_1} 的两个可以不同的核及 $(B'_{1v_1})^{-1}$ 为 B'_{1v_1} 的右逆算子,即

$$B'_{1v_1}Q_1(v_1)=0,\ B'_{1v_1}Q_2(v_1)=0,\quad B'_{1v_1}(B'_{1v_1})^{-1}=1. \tag{22}$$

必须强调的是原始模型即使是非常平庸的,形变后的方程也是非平庸的. 原因是我们选择的变换是不可逆的. 仅当规定变换核取作零时,变换才是可逆的. 使用可逆变换后的方程与原方程完全等价,因此不考虑变换核为零的可逆变换. 为了更清楚的了解上述讨论,下节先给出一个单分量的简单例子.

4　从 Riccati 方程得到 sinh-Gordon 方程

选定(0+1)维的 Riccati 方程

$$\phi_t=f_2\phi^2+f_1\phi+f_0 \tag{23}$$

为源方程,其中 f_0,f_1,f_2 为 t 的任意函数. Riccati 方程(23)是可以线性化的. 实际上,在作变换 $\phi=-\frac{\psi_t}{f_2\psi}$ 后,(23)式成为线性方程

$$\psi_{tt}-(f_1+(\ln f_2)_t)\psi_t+f_0f_2\psi=0. \tag{24}$$

将 ϕ 看成是 $\{x,t\}$ 的函数,并在令 $\phi=\int u_1\mathrm{d}x$ 后,(12)式成为

$$\mathrm{e}^{-\frac{2}{a}\int v\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{a}\int v\mathrm{d}x}v_t\right)_x=\frac{2af_2}{2+a}u_{1x}, \tag{25}$$

其中 u_1 由(18)式给定. 如果取(18)式中的 $c_1=0$,则(25)式成为

$$v_{1t}=\frac{-2a^2f_2c_2^a}{(2+a)^2}\mathrm{e}^{\int v_1\mathrm{d}x}+c_0\mathrm{e}^{-\frac{2}{a}\int v_1\mathrm{d}x}, \tag{26}$$

对 $c_0=0$,(26)式即为著名的 Liouville 场方程. 对于 $c_0\neq0$,(26)式成为

$$w_{x\tau}=\mathrm{e}^w-\mathrm{e}^{-2w/a},$$

$$\tau=-\int^t\left(\frac{2a^2f_2c_2^ac_0^{a/2}}{(a+2)^2}\right)^{\frac{2}{2+a}}\mathrm{d}t,$$

$$w=v_1+\frac{a}{2+a}\ln\frac{a^2f_2c_2^a}{c_0(a+2)^2}. \tag{27}$$

当 $a=2$ 及 $a=1$ 时,(27)式正是(1+1)维的 SHG 和 MDB 方程. 虽然 SHG 和 MDB 方程由平凡的等价于线性方程的 Riccati 方程形变而来,这两个方程是非平庸的. 其根本原因在于变换核 $(c_0\mathrm{e}^{-\frac{2}{a}\int v\mathrm{d}x})$ 的出现使形变关系成为是不可逆的. 更进一步,当 $a\neq1,2$ 时,虽然(27)式来自于一个非常平凡的 C 可积模型(Riccati 方程),但它并不是一个可积模型. 其原因也是由于变换核的出现. 文献[20]已经指出(25)式及(18)式对于 $a=1,2$ 也是可积的. 总之形变关系(17)作用的源方程为 Riccati 方程时仅当变换核为零或变换核不为零但 a=1,2 时才能保持可积性.

5 用 Miura 型变换从线性波动方程得到高维可积模型

从上节知,即使源方程是一个相当平凡的线性方程,利用不可逆的 Miura 型变换,仍可能得到非平庸的非线性可积模型. 根据上述事实,本节试图从线性波动方程得到非平庸的高维可积模型. 一般的线性波动方程可以写成下述二分量的演化方程形式:

$$u_{1t} = u_2 = F_1(u), \tag{28}$$

$$u_{2t} = \Delta u \equiv \sum_{k=1}^{n} u_{1y_ky_k} = F_2(u). \tag{29}$$

将 $F_1(u)=u_2$ 和 $F_2(u)=\sum_{k=1}^{n} u_{1y_ky_k}$ 代入形变关系(12)和(13)并利用(18)和(19)式,即可得到一个相应的非平庸的非线性方程. 显然这个方程具有非局域形式. 为了得到一个局域的偏微分方程的形式,作下述进一步的变换:

$$V = \exp\left(-\frac{2}{a}\int v_1 \mathrm{d}x\right) = V, \int V\mathrm{d}x = \frac{w_1 - c_2}{c_1}, \tag{30}$$

在完成一些仔细和烦琐的计算并在为了简化结果假设(18)和(19)式中的 c_1, c_2, c_3 和 c_4 为常数后可得

$$w_{1t} = w_2, \left(A \equiv c_4 - \frac{c_3c_2}{c_1}, B = a\frac{c_3}{c_1}\right), \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
2w_1w_{1x}(w_1\partial_x - 2w_{1x})w_{2t} = {}& 2w_1w_{1x}(w_1\partial_x - 2w_{1x}) \\
& \cdot \Delta w_1 + 4aw_1w_{1x}(\nabla w_1 \cdot \nabla w_{1x} - w_2w_{2x}) \\
& - 4(a-1)w_{1x}^2((\nabla w_1)^2 - w_2^2) \\
& - (a+2)w_1^2((\nabla w_{1x})^2 - w_{2x}^2) \\
& + 4w_2w_{1x}^2(Bw_1 + (a-1)A) \\
& - 2w_1w_{1x}w_{2x}(Bw_1 + aA).
\end{aligned} \tag{32}$$

为了证明一个模型的可积性,由 Weiss,Tabor 和 Carnevale(WTC)[22] 建立的 Painlevé 检验方法是最有效和简便的方法. 下面证明(31,32)式是 Painlevé 可积的,即(31,32)式具有 Painlevé 性质. 一个模型具有 Painlevé 性质是指该模型的关于一个奇性流形的所有可去奇性都是极点型的. 为了证明(31,32)式的 Painlevé 可积性,直接将(31)($w_2 = w_{1t}$)代入(32)式,所得方程为一个三阶偏微分方程. 因此如果模型具有 Painlevé 性质,则对模型的解关于任意的奇性流形作级数展开后的表达式为

$$w_1 = \sum_{j=0}^{\infty} W_j \phi^{j+\alpha}, \tag{33}$$

其中 α 为负整数. 另外为了保证所有解关于任意奇性流形的可去奇性为极点型的,(33)式这样的表达式应存在一个主枝. 在主枝中应包含三个(与微分方程的阶数相同)任意函数且在其他枝(辅枝)中的自洽条件也应满足. 由标准的领头项分析,将 $w_1 \sim W_0\phi^\alpha$ 代入(32)式并考虑到 $w_2 = w_{1t}$ 后,可得 α 的仅有的可能取值为

$$\alpha = -1, -\frac{a-2}{a}. \tag{34}$$

首先,将 $\alpha = -1$ 及(33)代入(32)式后,发现 W_j 可由下述递推关系

$$(j+1)j(j-1)W_j = H_j(\phi_x, W_0, W_1, \cdots, W_{j-1}) \tag{35}$$

给定,其中,H_j 是关于 $W_0, W_1, \cdots, W_{j-1}$ 及 ϕ 的导数的一个复杂函数. 从(35)式可知,W_j 可以递推得到但是对于 $j=0$ 和 $j=1$,(35)式的左边自然为零,因此自洽性要求 H_0 和 H_1 应恒为零. 即 $j=0,1,-1$ 为展开式(33)的共振点. $j=-1$ 的共振点相应于奇性流形 ϕ 的任意性. 通过考虑将 $\alpha=-1$ 及(33)式代入(32)式后的方程中的 ϕ^{-8} 和 ϕ^{-7} 项的系数,不难发现

$$H_0 \equiv 0, H_1 \equiv 0.$$

因此,$\alpha = -1$ 的展开式(33)即为主枝,其中 W_0,W_1 及 ϕ 即为所需的三个任意函数. 最后,还要考虑辅枝中的自洽条件是否满足. 将 $\alpha = -\frac{a-2}{a} < 0$ 及(33)式代入(32)式后,可得 W_j 的递推关系为

$$j(j+1)\left(j + \frac{a-2}{a}\right)W_j = H_j'(\phi_x, W_0, W_1, \cdots, W_{j-1}), \tag{36}$$

其中,H_j' 也是关于 $W_0, W_1, \cdots, W_{j-1}$ 及 ϕ 的导数的一个复杂函数. 由模型的解没有代数型枝点的要求从辅枝的 α 可知,模型具有 Painlevé 性质必须有

$$0 < a \leqslant 2, \tag{37}$$

或

$$a = \frac{2}{1-n}, n = 2,3,\cdots \tag{38}$$

由 $-\frac{a-2}{a} < 0$ 的条件及(36)式可知,辅枝中仅有的共振点为 $j=0$. 通过计算很容易验证共振条件

$$H_0' \equiv 0$$

也是满足的. 因此,模型(32)中的 a 满足条件(37)或(38)时是 Painlevé 可积的.

6 小结和讨论

本文建立了一种从简单而平庸的可积模型得到非平庸的非线性可积模型的形变方法. 特别选定了一个与 Miura 变换相联系的形变关系. 利用这个形变关系于单分最的 $(0+1)$ 维 Riccati 方程, 可以得到 $(1+1)$ 维的 SHG 方程和 MDB 方程. 利用二分量的形变关系于线性波动方程, 得到了一个任意维度下的非平庸的非线性模型. 利用标准的 WTC 奇性分析方法, 证明当模型参数满足条件 (37) 或 (38) 时, 模型是 Painlevé 可积的. 特别地, 在 (29) 式中取 $\{n=2, y_1=y, y_2=z\}$ 或 $\{n=3, y_1=x, y_2=y, y_3=z\}$ 时, 具有特殊参数值 (37) 和 (38) 的 (32) 式成为两个不同的 $(3+1)$ 维的非平庸的可积模型.

所得模型的非平庸性来自于变换的不可逆性. 仅当变换核规定取为零时, 变换才是可逆的. 采用可逆变换可能对原模型的研究带来方便, 但对于得到非平庸的新的可积模型是没有用的. 因为在可逆变换的情况下, 新模型和原模型是完全等价的. 为了得到新模型, 必须采用不可逆变换. 不可逆变换的使用可能导致三种类型的效应: 1) 不可逆变换可能破坏可积性. 如对 Riccati 方程作变换 (7) 后, 当 $a\neq1,2$ 时所得模型成为不可积的. 又如当 a 不满足条件 (37) 或 (38) 时, 变换使平庸可积的线性波动方程成为不可积的. 2) 不可逆变换的适当选择可以从一些平庸的可积模型中得到一些非平庸的可积模型. 特别地, 当不可逆变换中包含额外的独立变量时, 可以从低维可积模型得到高维可积模型. 3) 如果一个模型的不可积部分正是不可逆变换的变换核的话, 不可逆变换也可能去掉不可积模型的不可积性. 如偏线性化算子 B'_{1u_1} 的核为

$$K(u)\equiv u_1\left(C_1\int u_1^{-2/a}\mathrm{d}x+C_2\right),\qquad(39)$$

其中 C_1 和 C_2 是 x 无关的任意函数. 从 (12) 和 (13) 式易知, 如果将形变关系 (7) 和 (8) 应用到

$$u_{1t}=u_2+u_1\left(C_1\int u_1^{-2/a}\mathrm{d}x+C_2\right),\qquad(40)$$

$$u_{2t}=\sum_{k=1}^{n}u_{1y_ky_k}+u_1\left(C_1\int u_1^{-2/a}\mathrm{d}x+C_2\right),\qquad(41)$$

可以得到与应用到线性波动方程完全相同的结果. 应用标准的 Painlevé 分析方法可知 (40) 和 (41) 式当 $C_1\neq0$ 时并不具有 Painlevé 可积性.

由于 $(1+1)$ 和 $(2+1)$ 维可积模型及其孤子激发已在物理, 化学, 生物等各个领域得到了广泛的应用, 而实际的物理世界又是 $(3+1)$ 维的, 我们希望发展一个良好的 $(3+1)$ 维可积模型理论. 然而在 $(3+1)$ 维可积模型的研究中, 甚至连非平庸可积模型的存在性问题还没有得到完全令人满意的结果. 因此本文提出的得到非平庸的高维可积模型的方法是有意义的, 在进一步的研究中, 我们首先希望进一步研究模型的其他可积性, 然后再探讨模型的可能物理应用. 然而这两个问题的任一个都是非常困难的问题. 要解决这两个问题还有很多难题需要解决, 希望能引起同行的高度重视.

感谢与俞军、诸跃进和阮航宇教授的讨论.

[1] L. Dolan, *Nucl. Phys.*, **B489** (1997), 245; J. Distler, A. Hanany, *Nucl. Phys.*, **B496** (1997), 75; J. Ellis, N. E. Maoromatos, D. V. Nanopoulos, *Int. J. Mod. Phys.*, **A12** (1997), 2639.

[2] I. Loutsenko, D. Roubtsov, *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997), 3011; M. W. Coffey, *Phys. Rev.*, **B54** (1996), 1279; R. Siddhartham, B. S. Shastry, *Phys. Rev.*, **B55** (1997), 12196.

[3] M. Tajiri, H. Maesono, *Phys. Rev.*, **E55** (1997), 3351.

[4] G. C. Das, *Phys. of Plasmas*, **4** (1997), 2095.

[5] M. Gedalin, T. C. Scott, Y. B. Band, *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997), 448; N. Ne, D. Drummond, *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997), 4311; T. Georges, *Optics Lett.*, **22** (1997), 679.

[6] D. David, N. Kamran, D. Levi, P. Winternitz, *J. Math. Phys.*, **27** (1986), 1225; B. Champagne, P. Winternitz, *J. Math. Phys.*, **29** (1988), 1; K. M. Tamizhmani, B. Gramaticos, *J. Math. Phys.*, **32** (1991), 2635; S. Y. Lou, X. B. Hu, *J. Phys.*, *A: Math. Gen.*, **27** (1994), L207; S. Y. Lou, *Phys. Rev. Lett.*, **71** (1993), 4099.

[7] S. Y. Lou, J. Yu, J. Lin, *J. Phys.*, *A: Math. Gen.*, **28** (1995), L191; S. Y. Lou, J. Lin, J. Yu, *Phys. Lett.*, **A201** (1995), 47.

[8] S. Y. Lou, *Sci. China*, *Series*, **A34** (1997), 1317.

[9] S. Y. Lou, *Commun. Theor. Phys.*, **28** (1997), 41.

[10] S. Y. Lou, X. B. Hu, *J. Math. Phys.*, **38** (1997), 6401.

[11] S. Y. Lou, *J. Math. Phys.*, **39** (1998), 2112.

[12] S. Y. Lou, *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998), 5027.

[13] B. M. McCoy, J. H. H. Perk, *Nucl. Phys.*, **B285** (1987), 279.

[14] S. Y. Lou, G. J. Ni, *J. Math. Phys.*, **30** (1989), 1614; *Phys. Lett.*, **A140** (1989), 33.

[15] S. Y. Lou, G. X. Huang, G. J. Ni, *Phys. Lett.*, **A146** (1990), 45; S. Y. Lou, G. J. Ni, G. X. Huang, *Commun. Theor. Phys.*, **17** (1992), 67; S. Y. Lou, W. Z. Chen, *Phys. Lett.*, **A156** (1991), 260.

[16] S. Y. Lou, *J. Phys.*, *A: Math. Gen.*, **32** (1999), 4521.

[17] P. A. Clarkson, M. D. Kruskal, *J. Math. Phys.*, **30** (1989), 2201; P. A. Clarkson, P. Winternitz, *Physica*, D**49** (1991), 257; P. A. Clarkson, E. L. Mansfield, *SIAM J. Appl. Math.*, **54** (1994), 1693; P. A. Clarkson, *Chaos, Solitons & Fractals*, **5** (1995), 2261.

[18] S. Y. Lou, *J. Phys.*, *A*: *Math. Gen.*, **23** (1990), L649; *Phys. Lett.*, **A151** (1990), 133; *Sci. Math. Methods in the Appl. Sci.*, **18** (1995), 789.

[19] S. Y. Lou, H. Y. Ruan, D. F. Chen, W. Z. Chen, *J. Phys.*, *A*: *Math Gen.*, **24** (1991), 1455.

[20] S. Y. Lou, *J. Phys.*, *A*: *Math. Gen.*, **30** (1997), 7259.

[21] A. P. Fordy, J. Gibbons, *Phys. Lett.*, **A75** (1980), 325; S. Y. Lou, *J. Math. Phys.*, **35** (1994), 2336.

[22] J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevale, *J. Math. Phys.*, **24** (1983), 522; A. Ramani, B. Gramaticos, T. Bountis, *Phys. Rep.*, **180** (1989), 159.

OBTAIN HIGH DIMENSIONAL INTEGRABLE MODELS BY MEANS OF MIURA TYPE NONINVERTIBLE TRANSFORMATION*

LOU SEN-YUE

(*Apply Department Physics of Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200030 *and*
Department of Physics, *Ningbo University*, *Ningbo* 315211, *China*)

(Received 24 February 2000)

ABSTRACT

Searching for high dimensional integrable models (especially in 3+1 dimensions) is one of the most important problems in nonlinear physics. In this paper, we establish a method to find some high dimensional integrable models via some noninvertible deformation relations. A noninvertible deformation relation may not only transform an integrable model to a nonintegrable model, but also deform a nonintegrable model to an integrable model. Concretely, starting from a noninvertible Miura type transformation relation and the linear wave equation, we obtain a nontrivial high dimensional Painleve integrable model.

Keywords: high dimensional integrable models, noninvertible deformation, wave equation, Miura type transformation

PACC: 0340K, 0230J, 0365G

* Project supported by the National Science Foundation for Young Scientists of China (Grant No. 19925522), and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19975025).