第 49 卷 第 9 期 2000 年 9 月
1000-3290/2000/49(09)/1670-09
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 49, No. 9, September, 2000

Sen 时空中的陀螺进动效应

彭 毅
(东南大学物理系, 南京 210096)
梁志彬
(南京师范大学数科院, 南京 210080)
荆继良 黄亦斌
(中国科学技术大学天文与应用物理系, 合肥 230026)
(2000 年 1 月 19 日收到; 2000 年 2 月 29 日收到修改稿)

采用 Frenet-Serret 形式研究了 Sen 时空中的陀螺进动效应, 得出了沿圆轨迹以任意常数角速度运动的轨道陀螺进动的一般公式, 当陀螺在赤道平面上沿短程线运动时, 由一般公式出发可得到精确的轨道周期进动角公式. 作为特例, 研究了静态 dilaton 时空中的陀螺进动效应. 将所得结果分别与 Kerr-Newman 和 Reissner-Nordström 时空中的情形相比较, 发现 dilaton 耦合使陀螺进动速率减慢, 轨道周期进动角减小.

关键词: Sen 时空, Frenet-Serret 标架, Fermi-Walker 移动
PACC: 0420J, 9760L, 1125M

1 引 言

人们从弦理论出发已经得到一些有意义的经典黑洞解. 研究发现弦理论中不带电(或磁)荷的静态和稳态黑洞度规解与广义相对论的 Schwarzschild 和 Kerr 黑洞度规具有相同的形式. 这是因为弦理论的运动方程采取了运动方程加普朗克标度修正项的形式, 只要曲率不是很大, 则所有广义相对论的真空解都是弦理论的近似解[1]. 但是如果黑洞中含有电(或磁)荷, 情况就有所不同, 此时弦理论中的 dilaton 场与电磁场耦合, 所得到的黑洞时空度规与同类 Einstein 荷电黑洞度规有较大差别, 如弦理论中的静态荷电 dialton 黑洞解[2] 与广义相对论中描述静态荷电黑洞的 Reissner-Nordström 解就明显不同. 1992 年 Sen 从弦理论的一个较一般的低能有效作用量出发, 生成了一个弦理论的荷电旋转黑洞解[3]:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\Sigma - a^2\sin^2\theta}{\Delta}\mathrm{d}t^2 - \frac{\Delta}{\Sigma}\mathrm{d}r^2 - \Delta\mathrm{d}\theta^2 - \frac{\sin^2\theta}{\Delta}[(r^2+a^2-2\beta r)^2 - \Sigma a^2\sin^2\theta]\mathrm{d}\varphi^2 + \frac{2a\sin^2\theta}{\Delta}[(r^2+a^2-2\beta r)-\Sigma]\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi], \quad (1)$$

其中 $\Sigma = r^2 + 2mr + a^2$, $\Delta = r^2 - 2\beta r + a^2\cos^2\theta$. m, β, α 为参数. 该度规描述了一个质量为 M, 电荷为 Q, 角动量为 J, 磁矩为 μ 的弦黑洞. 这些量分别为

$$M = \frac{m}{2}(1+\mathrm{ch}\alpha) = m\,\mathrm{ch}^2\frac{\alpha}{2},$$
$$Q = \frac{m}{\sqrt{2}}\mathrm{sh}\alpha = \sqrt{2}m\,\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2},$$
$$J = \frac{ma}{2}(1+\mathrm{ch}\alpha) = ma\,\mathrm{ch}^2\frac{\alpha}{2}, \quad (2)$$
$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}ma\,\mathrm{sh}\alpha.$$

很显然该解与广义相对论中描述旋转荷电黑洞的 Kerr-Newman 解不同.

可见弦理论中附加 dilaton 场及其他物质场能够改变黑洞的时空结构, 进而会产生不同于一般 Einstein-Maxwell黑洞时空的量子和经典引力效应. 人们研究发现 dilaton 耦合使静态荷电黑洞的某些热力学性质, 特别是在极端极限情况下被极大的改变了[4]. 本文研究 Sen 时空中的一类典型又十分重要的经典引力效应——陀螺进动效应, 探讨耦合对陀螺进动现象的影响.

计算陀螺进动的方法过去通常采取的是 PPN (参数化后牛顿近似) 法[5]. 1989 年 Rindler 和 Perlick[6] 采用旋转坐标法计算引力场中陀螺的进动, 分别得到 Minkowski 时空中的 Thomas 进动公式, Schwarzschild 时空中的 Fokker-de sitter 进动公式以及 Kerr 时空中的 Schiff 进动公式. 1993 年, Iyer 和 Vishveshwara[7] 又从新的角度对这一问题进行了细致研究. 他们的方法是采用优美而协变的 Frenet-Serret 形式对陀螺进动现象进行一般的描述. 当把

这个方法运用到 Minkowski 时空、Schwarzschild 时空和 Kerr 时空时所得的结果与文献[6]一致. 1996 年 Nayak 和 Vishveshwara[8] 又用这一方法研究了 Kerr-Newman 时空和 Reissner-Nordström 时空中的陀螺进动问题.

采用 Frenet-Serret 形式研究陀螺进动问题突出的优点是：1）它是与坐标无关的. 2）它直接给出了粒子世界线的几何信息. 3）它给出进动角速度的精确表达式,无需近似,结果也具有更大的适用范围,不仅适用于赤道面而且也适用离开赤道面的情况. 这几点都是其他方法所不具有的,因而很有意义.

2　Frenet-Serret 形式与陀螺进动

2.1　Frenet-Serret 形式

四维 Riemann 空间中的一条任意类时曲线 Γ 上的每一点都可以建立一个正交标架. 如果以 Γ 上一点的单位切矢量为第零类时标架基矢量,即令 $e_{(0)}{}^{\mu} \equiv U^{\mu} \equiv \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}$,以 Γ 的第一、第二、第三法线为类空标架基矢量,就可以建立一类非常重要的标架——Frenet-Serret 标架,标架基矢量之间满足下列 Frenet-Serret（F-S）方程

$$\dot{e}^{\mu}_{(0)} = k e^{\mu}_{(1)}, \tag{3a}$$

$$\dot{e}^{\mu}_{(1)} = \tau_1 e^{\mu}_{(2)} + k e^{\mu}_{(0)}, \tag{3b}$$

$$\dot{e}^{\mu}_{(2)} = \tau_2 e^{\mu}_{(3)} - \tau_1 e^{\mu}_{(1)}, \tag{3c}$$

$$\dot{e}^{\mu}_{(3)} = -\tau_2 e^{\mu}_{(2)}, \tag{3d}$$

且有

$$e^{\mu}_{(0)} e_{(0)\mu} = 1, e^{\mu}_{(i)} e_{(i)\mu} = -1, \tag{3e}$$

其中,$\dot{e}^{\mu}_{(\alpha)} \equiv \frac{\mathrm{D}e^{\mu}_{(\alpha)}}{\mathrm{D}\tau} = e^{\mu}_{(\alpha);\nu} U^{\nu}$, k, τ_1, τ_2 分别是曲线上该点曲率及第一、第二挠率,它们是由曲线的内禀性质决定的,与坐标无关. 因而被称作 F-S 标量. 由微分几何知识可知 k, τ_1, τ_2 唯一决定一条曲线. 可以证明[9]这样定义的 $e_{(\alpha)}$ 满足正交关系 $e^{\mu}_{(\alpha)} \cdot e_{\mu}^{(\beta)} = \delta_{\alpha}^{\beta}$.

如果 Γ 是短程线则有 $k = \tau_1 = \tau_2 = 0$；对于类时圆 $k =$ 常数, $\tau_1 = \tau_2 = 0$；对于螺旋线有 $k =$ 常数, $\tau_1 =$ 常数, $\tau_2 = 0$. 下面考虑 Γ 是黎曼空间中的一条类时 Killing 曲线时的情形：设 ξ^{μ} 是时空中一个类时 Killing 矢量, η 是一类空 Killing 矢量,则它们的组合

$$\chi^{\mu} = \xi^{\mu} + \omega\eta^{\mu}. \tag{4}$$

当 ω 是常数时,仍是 Killing 矢量. 以 χ^{μ} 为切矢量的类时曲线 P 就是时空中的一条类时 Killing 曲线. 在曲线上建立 F-S 标架,令

$$e^{\mu}_{(0)} \equiv U^{\mu} = \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} \equiv e^{\psi}\chi^{\mu}, \tag{5}$$

e^{ψ} 为归一化因子,若令 $F_{\mu\nu} = e^{\psi}(\xi_{\mu;\nu} + \omega\eta_{\mu;\nu})$,则可以得到如下关系式[7]：

$$k^2 = F^2_{\mu\nu} e^{\mu}_{(0)} e^{\nu}_{(0)}, \tag{6}$$

$$\tau_1^2 = k^2 - \frac{F^4_{\mu\nu} e^{\mu}_{(0)} e^{\nu}_{(0)}}{k^2}, \tag{7}$$

$$\tau_2^2 = -\frac{(k^2 - \tau_1^2)^2}{\tau_1^2} + \frac{F^6_{\mu\nu} e^{\mu}_{(0)} e^{\nu}_{(0)}}{k^2 \tau_1^2}, \tag{8}$$

$$\dot{k} = \dot{\tau}_1 = \dot{\tau}_2 = 0. \tag{9}$$

此处 $(F^n)_{\mu\nu} \equiv F_{\mu}^{\lambda_1} F_{\lambda_1}^{\lambda_2} \cdots F_{\lambda_{n-1}\nu}$. 可见沿 Killing 轨迹 k, τ_1, τ_2 为恒量.

当(4)式中 ω 不是常数但满足 $L_{\chi}\omega = 0$ 即 ω 的李导数为零时, χ^{μ} 称为准 Killing 矢量. 值得指出的是此时(6)—(9)式仍然适用,这样我们就可以将运用于 Killing 轨迹的 F-S 形式直接推广到准 Killing 轨迹的情形. 为了将 F-S 形式与陀螺进动联系起来,我们必须再了解 Fermi-Walker 移动的概念.

2.2　Fermi-Walker 移动

考虑 $\chi^{\mu} = \chi^{\mu}(\tau)$ 的类时曲线 Γ,令它的单位切矢量为 $e^{\mu}_{(0)} \equiv U^{\mu} \equiv \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}$,在 Γ 上定义一矢量场 F^{μ},如果 F^{μ} 满足方程

$$\dot{F}^{\mu} \equiv \frac{\mathrm{D}F^{\mu}}{\mathrm{D}\tau} = F_{\nu}(e^{\mu}_{(0)} e^{\nu}_{(1)} - e^{\nu}_{(0)} e^{\mu}_{(1)}) \tag{10}$$

就称矢量 F^{μ} 经历了 Fermi-Walker（F-W）移动,这里 $e^{\mu}_{(1)}$ 是第一单位法矢量,且 $e^{\mu}_{(1)} = \frac{\mathrm{D}U^{\mu}}{\mathrm{D}\tau}$,如果 F 与 $e_{(0)}$ 正交则由(10)式得

$$\dot{F}^{\mu} \equiv \frac{\mathrm{D}F^{\mu}}{\mathrm{D}\tau} = F_{\nu} e^{\mu}_{(0)} e^{\nu}_{(1)} = F_{\nu} U^{\mu} \frac{\mathrm{D}U^{\nu}}{\mathrm{D}\tau}, \tag{11}$$

则称 F^{μ} 经历了 Fermi 移动. 我们已知在引力场中,一个陀螺的自旋矢量 S^{μ} 按如下规律进动[10]：

$$\frac{\mathrm{D}S^{\mu}}{\mathrm{D}\tau} = S_{\nu} \frac{\mathrm{D}U^{\nu}}{\mathrm{D}\tau} U^{\mu} \tag{12}$$

比较(11)式可知,引力场中的陀螺是经历 Fermi 移动的.

F-W 移动的一个重要性质就是单位切矢量 $e_{(0)}$

自动经历 F-W 移动,而且 F-W 移动类似平移,保持了矢量的模和两矢量内积的不变. 这样我们就可以在曲线 Γ 上一点建立一正交标架 $f'_{(\alpha)}=(e'_{(0)},f'_{(i)})$ 然后沿 Γ F-W 移动这标架. 可见 F-W 移动不仅为我们提供一沿 Γ 的正交标架同时又提供了一个与 Γ 正交的空间三基矢 $f'_{(i)}$,它对一个世界线是曲线 Γ 的观察者构成一空间参考系. 由(12)式知 $f'_{(i)}$ 在物理上可由三个相互正交的陀螺来实现[11].

由此可见,在空间曲线 Γ 上可以建立两类参考系,一类是曲线的内禀参考系 F-S 系,一类是 F-W 移动系. 它们的时轴重合,可以证明[12] F-W 系上的观察者发现 F-S 系以角速度

$$\omega_{FS}=\tau_2 e_{(1)}+\tau_1 e_{(3)} \tag{13}$$

旋转. 而由于 F-W 系可用一组陀螺来实现,所以也可以说 F-S 系上的观察者发现他所携带的陀螺以角速度

$$\Omega=-\omega_{FS}=-(\tau_2 e_{(1)}+\tau_1 e_{(3)}) \tag{14}$$

进动.

F-S 形式为人们研究时空中的陀螺进动问题提供了十分优美的数学形式. 下面就用 F-S 形式具体研究 Sen 时空中的陀螺进动问题.

3 Sen 时空中的陀螺进动

3.1 沿类时 Killing 轨迹运动的陀螺进动

一般的稳态轴对称时空度规为

$$\mathrm{d}s^2=g_{00}\mathrm{d}t^2+2g_{03}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi+g_{33}\mathrm{d}\varphi^2+g_{11}\mathrm{d}r^2+g_{22}\mathrm{d}\theta^2, \tag{15}$$

$$\det g_{\mu\nu}\equiv g=g_{11}g_{22}\Delta_3, \tag{16}$$

其中 $\Delta_3\equiv g_{00}g_{33}-g_{03}^2$,这样的时空存在一类时 Killing 矢量 $\xi^\mu=(1,0,0,0)$. 我们考虑能层外的一个静态观察者,它的世界线就是 ξ^μ 的积分曲线,该观察者具有固定的空间坐标(r,θ,φ),它相对于遥远恒星是静止的. 由(7)—(9)及(3)式可证得沿 Killing 轨迹 ξ^μ 的 F-S 标量为

$$k^2=-\frac{1}{4g_{00}^2}[g^{11}g_{00,1}^2+g^{22}g_{00,2}^2], \tag{17}$$

$$\tau_1^2=\frac{g_{03}^2}{4\Delta_3}\frac{\left[g^{\mu\nu}g_{00,\mu}\left(\ln\frac{g_{03}}{g_{00}}\right)_{,\nu}\right]^2}{g^{\mu\nu}g_{00,\mu}g_{00,\nu}}, \tag{18}$$

$$\tau_2^2=\frac{1}{4\Delta_3 g_{11}g_{22}}\frac{[g_{00,1}g_{03,2}-g_{00,2}g_{03,1}]^2}{g^{\mu\nu}g_{00,\mu}g_{00,\nu}}. \tag{19}$$

F-S 基矢量为

$$e'_{(0)}=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}(1,0,0,0), \tag{20a}$$

$$e'_{(1)}=\frac{-1}{2kg_{00}}(0,g^{11}g_{00,1},g^{22}g_{00,2},0), \tag{20b}$$

$$e'_{(2)}=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}\sqrt{-\Delta_3}}(-g_{03},0,0,g_{00}), \tag{20c}$$

$$e'_{(3)}=\frac{\sqrt{g^{11}}\sqrt{g^{22}}}{2kg_{00}}(0,-g_{00,2},g_{00,1},0). \tag{20d}$$

(17)—(20)式完全描述了静态观察者的世界线以及由观察者所携带的陀螺的进动. 将(1)式度规分量代入(17)—(20)式可得 Sen 时空中类时 Killing 轨迹的 F-S 标量为

$$k^2=\frac{1}{\left(1-\frac{2Mr}{\Delta}\right)^2}\cdot\frac{M^2}{\Delta^5}[\Sigma\varepsilon^2+4a^4r^2\sin^2\theta\cos^2\theta], \tag{21}$$

$$\tau_1^2=\frac{M^2a^2\sin^2\theta}{\Delta^5}\cdot\frac{\Sigma}{(\Sigma\varepsilon^2+4a^4r^2\sin^2\theta\cos^2\theta)}\cdot\frac{(r^2+a^2\cos^2\theta)^4}{\left(1-\frac{2Mr}{\Delta}\right)^2}, \tag{22}$$

$$\tau_2^2=\frac{4M^2a^2r^2\varepsilon^2\cos^2\theta}{\Delta^3[\Sigma\varepsilon^2+4a^4r^2\sin^2\theta\cos^2\theta]}. \tag{23}$$

这里 $\varepsilon=r^2-a^2\cos^2\theta$. 为保持 $e_{(i)}$ 构成右手系,k,τ_1,τ_2 都被取为非负的. F-S 基矢量为

$$e'_{(0)}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2Mr}{\Delta}}}(1,0,0,0), \tag{24a}$$

$$e'_{(1)}=\frac{(0,\Sigma\varepsilon,-2a^2r\sin\theta\cos\theta,0)}{\sqrt{\Delta(\Sigma\varepsilon^2+4r^2a^4\sin^2\theta\cos^2\theta)}}, \tag{24b}$$

$$e'_{(2)}=\frac{1}{\sin\theta\sqrt{\left(1-\frac{2Mr}{\Delta}\right)\Sigma}}\cdot\left(-\frac{2Mar\sin^2\theta}{\Delta},0,0,1-\frac{2Mr}{\Delta}\right), \tag{24c}$$

$$e'_{(3)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}[\Sigma\varepsilon^2+4a^4r^2\sin^2\theta\cos^2\theta]}}\cdot(0,2a^2r\sin\theta\cos\theta,\varepsilon,0). \tag{24d}$$

(21)—(24)式表明具有固定空间坐标(r,θ,φ)的观察者不仅具有加速度$(k\neq0)$,而且相对于他所携带的陀螺还有一角速度$(\tau_1,\tau_2\neq0)$.

当观察者位于赤道平面上时,$\theta=\frac{\pi}{2}$,方程(22),(23)退化为(取 $a=\frac{J}{M}>0$)

$$\tau_1 = \frac{Ma}{\left(r+\frac{Q^2}{M}\right)^{\frac{5}{2}}\cdot r^{\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{2M}{r+\frac{Q^2}{M}}\right)^{-1},\tag{25}$$

$$\tau_2 = 0.\tag{26}$$

静态观察者的基矢量总是指向固定的遥远恒星，因此由(14)式知静态观察者将发现陀螺相对于遥远恒星以角速度 $-\tau_1$ 进动. 即

$$\Omega = -\tau_1 \boldsymbol{e}_{(3)} = -\frac{Ma}{\left(r+\frac{Q^2}{M}\right)^{\frac{5}{2}} r^{\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{2M}{r+\frac{Q^2}{M}}\right)^{-1} e_{(3)},\tag{27}$$

其中 $e_{(3)}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(0,0,1,0)$，可见 $e_{(3)}$ 垂直于赤道平面，陀螺环绕 $e_{(3)}$ 进动，但转动方向与黑洞自转方向相反. 当 $Q=0$ 时，可得

$$\Omega = -\tau_1 = \frac{-Ma}{r^3}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1},\tag{28}$$

与 Kerr 时空中结果一致[8].

(21)—(24)式在赤道面以外的地方也适用，因而是 Sen 时空中沿 Killing 轨迹陀螺进动普遍而精确的表达式. 当 $a=0$ 时，对应于静态时空，由(22)，(23)式知 $\tau_1=\tau_2=0$，陀螺不发生进动. 这说明进动是由于时空旋转所引起的，这对 Sen 时空中的惯性系拖曳现象是一个很好的说明.

3.2　轨道陀螺的进动

稳态轴对称时空里除了有一类时 Killing 矢量 ξ 外，还有一类空 Killing 矢量 η，它们的线性组合 $\chi^\mu=\xi^\mu+\omega\eta^\mu$（$\omega$ 是常数）也是该时空中的一个 Killing 矢量. 取适当的坐标可使 η 成为轴向 Killing 矢量，即 $\eta^\mu=(0,0,0,1)$，这代表空间中的一个圆轨道，同时有 $\chi^\mu=(1,0,0,\omega)$. 如果一观察者的世界线恰好是轨迹 χ，则表示该观察者以任意常数角速度 ω 沿圆轨道运动. 我们可以利用(7)—(9)式直接计算轨迹 χ 的 F-S 标量，但是利用旋转坐标系[6]可以更方便也更直观的得到这些量.

对(15)式进行坐标变换

$$t'=t,\ r'=r,\ \theta'=\theta,\ \phi'=\phi-\omega t,\tag{29}$$

即除了方位角 ϕ 变化外，其余都保持不变. 新的坐标系里的固定网格点（$r,\theta,\phi'=\mathrm{const}$）相对于原坐标系以角速度 ω（关于坐标时 t）旋转. 因而在原坐标系来看这是一个旋转系. 在旋转系下度规(15)式变为

$$\mathrm{d}s^2 = g_{0'0'}\mathrm{d}t'^2+2g_{0'3'}\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}t'+g_{3'3'}\mathrm{d}\phi'^2 + g_{11}\mathrm{d}r^2+g_{22}\mathrm{d}\theta^2,\tag{30}$$

其中 $g_{0'0'}=g_{00}+2\omega g_{03}+\omega^2 g_{33}\equiv W$，$g_{0'3'}=g_{03}+\omega g_{33}\equiv N$，$g_{3'3'}=g_{33}$. 这仍是一个稳态轴对称度规. 考虑新度规下的类时 Killing 矢量 $\xi'=(1,0,0,0)$，它正好对应于原坐标系中的矢量 $\chi^\mu=\xi^\mu+\omega\eta^\mu=(1,0,0,\omega)$. 因为曲线的 F-S 标量是不随坐标而变化的，故要求出沿轨迹 $\xi+\omega\eta$ 的 k,τ_1,τ_2，只需求出旋转系中沿轨迹 ξ' 的 k,τ_1,τ_2，即可. 而这只需用 $g_{0'0'},g_{0'3'},g_{3'3'}$ 取代(17)—(19)式中的 g_{00},g_{03},g_{33} 即可得到，因而有

$$k^2=-\frac{1}{4W^2}\left[g^{11}W_{,1}^2+g^{22}W_{,2}^2\right],\tag{31}$$

$$\tau_1^2=\frac{N^2}{4\Delta_3'(g^{11}W_{,1}^2+g^{22}W_{,2}^2)}\times\left(\frac{g^{11}W_{,1}N_{,1}+g^{22}W_{,2}N_{,2}}{N}-\frac{g^{11}W_{,1}^2+g^{22}W_{,2}^2}{W}\right)^2,$$

$$\tau_2^2=\frac{g^{11}g^{22}(W_{,1}N_{,2}-W_{,2}N_{,1})^2}{4\Delta_3'(g^{11}W_{,1}^2+g^{22}W_{,2}^2)},\tag{33}$$

其中 $W_{,a}\equiv g_{00,a}+2\omega g_{03,a}+\omega^2 g_{33,a}$，$N_{,a}\equiv g_{o3,a}+\omega g_{33,a}$ $(a=1,2)$，$\Delta_3'\equiv g_{0'0'}g_{3'3'}-g_{0'3'}^2=\omega g_{33}-N^2$. 在旋转系中 F-S 矢量由(20)式可得

$$e'^{\mu}_{(0)}=\frac{1}{\sqrt{W}}(1,0,0,0),\tag{34a}$$

$$e'^{\mu}_{(1)}=-\frac{1}{2kW}(0,g^{11}W_{,1},g^{22}W_{,2},0),\tag{34b}$$

$$e'^{\mu}_{(2)}=\frac{1}{\sqrt{W}\sqrt{-\Delta_3'}}(-N,0,0,W),\tag{34c}$$

$$e'^{\mu}_{(3)}=\frac{\sqrt{g^{11}}\sqrt{g^{22}}}{2kW}(0,-W_{,2},W_{,1},0).\tag{34d}$$

由 $e^{\mu}_{(\alpha)}=\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\cdot e'^{\nu}_{(\alpha)}$ 变换到原来坐标系中可得

$$e^{\mu}_{(0)}=\frac{1}{\sqrt{W}}(1,0,0,\omega),\tag{35a}$$

$$e^{\mu}_{(1)}=-\frac{1}{2kW}(0,g^{11}W_{,1},g^{22}W_{,2},0),\tag{35b}$$

$$e^{\mu}_{(2)}=\frac{-1}{\sqrt{W}\sqrt{-\Delta_3'}}(N,0,0,-p),\tag{35c}$$

$$e^{\mu}_{(3)}=\frac{\sqrt{g^{11}g^{22}}}{2kW}(0,-W_{,2},W_{,1},0).\tag{35d}$$

这里 $P\equiv W-\omega N=g_{00}+\omega g_{03}$. 现在具体到 Sen 时空中，将(1)式中度规分量代入(37)式中可得

$$W=1-\omega^2\sin^2\theta\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}r\right)$$

$$-\frac{2Mr}{\Delta}(1-\omega a\sin^2\theta), \tag{36a}$$

$$W_{,1}=\frac{2M\varepsilon}{\Delta^2}(1-\omega a\sin^2\theta)^2-2\left(r+\frac{Q^2}{2M}\right)\omega^2\sin^2\theta, \tag{36b}$$

$$W_{,2}=-2\sin\theta\cos\theta\left[\Sigma\omega^2+\frac{2Mr}{\Delta^2}\left\{\omega\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}r\right)-a\right\}^2\right], \tag{36c}$$

$$N=\frac{2Mra\sin^2\theta}{\Delta}(1-\omega a\sin^2\theta)-\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}r\right)\omega\sin^2\theta, \tag{37a}$$

$$N_{,1}=-2\sin^2\theta\left[\left(r+\frac{Q^2}{2M}\right)\omega+\frac{M\varepsilon a}{\Delta^2}(1-\omega a\sin^2\theta)\right], \tag{37b}$$

$$N_{,2}=2\sin\theta\cos\theta\left[\frac{2Mra\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}r\right)}{\Delta^2}\cdot(1-\omega a\sin^2\theta)-\frac{2\omega Mra^2\sin^2\theta}{\Delta}-\omega\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}r\right)\right], \tag{37c}$$

$$\Delta_3'=-\Sigma\sin^2\theta, \tag{38}$$

$$P=1-\frac{2Mr}{\Delta}(1-\omega a\sin^2\theta). \tag{39}$$

将(36)—(39)式代入(31)—(33)式可得 F-S 标量为

$$k^2=\frac{S_1}{\Delta S_2}, \tag{40}$$

$$\tau_1^2=\frac{\Sigma S_3}{\Delta S_1 S_2}\sin^2\theta, \tag{41}$$

$$\tau_2^2=\frac{M^2 S_4}{\Delta^5 S_1}\cos^2\theta, \tag{42}$$

其中

$$S_1=\Sigma\left[\frac{M\varepsilon}{\Delta^2}(1-\omega a\sin^2\theta)^2-\left(r+\frac{Q^2}{2M}\right)\omega^2\cdot\sin^2\theta\right]^2+\cos^2\theta\sin^2\theta\left[\frac{2Mr}{\Delta^2}\left\{\omega\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}\right)-a\right\}^2+\Sigma\omega^2\right]^2,$$

$$S_2=\left[1-\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}r\right)\omega^2\sin^2\theta+\frac{2Mr}{\Delta}(1-\omega a\sin^2\theta)^2\right]^2,$$

$$S_3=\left\{\left[\frac{M\varepsilon}{\Delta^2}(1-\omega a\sin^2\theta)^2-\omega^2\left(r+\frac{Q^2}{2M}\right)\sin^2\theta\right]\cdot\left[\left(r+\frac{Q^2}{2M}\right)\omega-\frac{2M\left(r+\frac{Q^2}{2M}\right)r\omega}{\Delta}\cdot(1-\omega a\sin^2\theta)-\frac{M\varepsilon}{\Delta^2}\left\{\omega\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}r\right)-a\right\}(1-\omega a\sin^2\theta)\right]+\cos^2\theta\left[\frac{2Mra}{\Delta^2}\cdot(1-\omega a\sin^2\theta)^2-\omega\right]\left[\frac{2Mr}{\Delta^2}\left\{\omega\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}r\right)-a\right\}^2+\Sigma\omega^2\right]\right\}^2,$$

$$S_4=\left\{\frac{2Mra\varepsilon(1-\omega a\sin^2\theta)^2}{\Delta}-\omega\varepsilon\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}r\right)(1-\omega a\sin^2\theta)+2a\omega r\left(r+\frac{Q^2}{2M}\right)\cdot\left[\omega\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}r\right)-a\right]\sin^2\theta\right\}.$$

将(36)—(39)式代入(35)式便可直接得到圆轨迹的 F-S 基矢量.

当稳态观察者的世界线就是时空中的轨迹 χ 时,(35)式及(40)—(42)式就完全描述了这一世界线及其上的陀螺进动.这些公式在 r,θ 取任意固定值时都是适用的,因而也可以用来讨论在赤道面以外的情况.特别是当稳态观察者的世界线是时空中一条准 Killing 轨迹时这些公式也是成立的.这使我们可以用这些公式来处理短程线(即 $k=0$)的情况,此时为确保 $k=0$,ω 就可能不再是常数,而成为 r,θ 的函数.下面研究两个特例.

1. 在赤道平面上

此时 $\theta=\frac{\pi}{2}$,由(40)—(42)式可得

$$k^2=\frac{\Sigma}{r^2+\frac{Q^2}{M}r}\cdot\frac{\left[\frac{M}{\left(r+\frac{Q^2}{M}\right)^2}\cdot(1-\omega a)^2-\left(r+\frac{Q^2}{2M}\right)\omega^2\right]^2}{\left[1-\omega^2\left(r^2+a^2+\frac{Q^2r}{M}\right)-\frac{2M}{r+\frac{Q^2}{M}}(1-\omega a)^2\right]^2}, \tag{43}$$

$$\tau_1^2 = \frac{\left[\omega\left(r+\frac{Q^2}{2M}\right)-\frac{2M\left(r+\frac{Q^2}{2M}\right)}{r+Q^2/M}\cdot\omega(1-\omega a)-M\left\{\omega\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}r\right)-a\right\}\frac{1-\omega a}{\left(r+\frac{Q^2}{M}\right)^2}\right]^2}{\Delta\left[1-\omega^2\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}r\right)-\frac{2M}{r+\frac{Q^2}{M}}(1-\omega a)^2\right]^2}, \tag{44}$$

$$\tau_2 = 0. \tag{45}$$

由(35)式可得

$$e^{\mu}_{(0)} = \frac{(1,0,0,\omega)}{\sqrt{1-\omega^2\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}r\right)-\frac{2M}{r+\frac{Q^2}{M}}(1-\omega a)^2}}, \tag{46a}$$

$$e^{\mu}_{(1)} = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}}(0,1,0,0), \tag{46b}$$

$$e^{\mu}_{(2)} = \frac{\left(\left[-\omega\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}r\right)-\frac{2Ma}{\left(r+\frac{Q^2}{M}\right)}(1-\omega a)\right],0,0,1-\frac{2M}{r+\frac{Q^2}{M}}(1-\omega a)\right)}{\sqrt{\Sigma\left[1-\omega^2\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}r\right)-(1-\omega a)^2\cdot\frac{2M}{r+\frac{Q^2}{M}}\right]}}, \tag{46c}$$

$$e^{\mu}_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(0,0,1,0). \tag{46d}$$

由上式可见 $e_{(3)}$ 垂直于赤道平面，$\tau_2=0$，由(14)式可知陀螺以角速度

$$\Omega = \mp\left|\frac{\omega\left(r+\frac{Q^2}{2M}\right)-\frac{2M\left(r+\frac{Q^2}{2M}\right)}{r+\frac{Q^2}{M}}\cdot\omega(1-\omega a)-M\left[\omega\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}r\right)-a\right]\cdot\frac{1-\omega a}{\left(r+\frac{Q^2}{M}\right)^2}}{\sqrt{\Delta}\left[1-\omega^2\left(r^2+a^2+\frac{Q^2}{M}r\right)-\frac{2M}{r+\frac{Q^2}{M}}(1-\omega a)^2\right]}\right| \tag{47}$$

围绕 $e_{(3)}$ 进动.

2. 沿圆短程线运动

此时，$k=0$，由(43)式可得

$$\omega = \left(a \pm \left(r+\frac{Q^2}{M}\right)\sqrt{\frac{r+\frac{Q^2}{2M}}{M}}\right)^{-1}. \tag{48}$$

符号 +（−）对应于正向（反向）旋转轨道，在视界外应有

$$a < \left(r+\frac{Q^2}{M}\right)\sqrt{\frac{r+\frac{Q^2}{2M}}{M}},$$

把(48)式代入(44)式可得

$$\tau_1^2 = \frac{Mr+\frac{Q^2}{2}}{r\left(r+\frac{Q^2}{M}\right)^3}. \tag{49}$$

可见在这种情况下，陀螺进动角速度与中心质量的角动量无关. 同时 $e_{(1)}$，$e_{(3)}$ 仍然分别是(46b)，(46d)的形式，与 ω 无关. 当 $Q=0$ 时有

$$\tau_1^2 = \frac{M}{r^3}, \tag{50}$$

退回到 Kerr 时空中的情况[7,6].

经过一个周期，在旋转系上测得的进动角为

$$\Delta\varphi' = \Omega\Delta\tau = \mp|\tau_1|\sqrt{g_{00}}\cdot\frac{2\pi}{|\omega|}$$

$$= \mp 2\pi \frac{r + \frac{Q^2}{2M}}{\sqrt{r^2 + \frac{Q^2}{M} r}} \left[1 \pm \frac{2a}{r + \frac{Q^2}{M}} \sqrt{\frac{M}{r + \frac{Q^2}{2M}}} - \frac{M\left(3r + \frac{Q^2}{M}\right)}{\left(r + \frac{Q^2}{M}\right)\left(r + \frac{Q^2}{2M}\right)} \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{51}$$

则在原来的系中测得的总进动角为

$$\Delta\varphi = \mp 2\pi \left\{ \frac{r + \frac{Q^2}{2M}}{\sqrt{r^2 + \frac{Q^2}{M} r}} \left[1 \pm \frac{2a}{r + \frac{Q^2}{M}} \sqrt{\frac{M}{r + \frac{Q^2}{2M}}} - \frac{M\left(3r + \frac{Q^2}{M}\right)}{\left(r + \frac{Q^2}{M}\right)\left(r + \frac{Q^2}{2M}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}. \tag{52}$$

3.3 静态荷电 dilaton 时空中的陀螺进动效应

当 $Q \neq 0, J = 0$ 时,(1)式成为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r + \frac{Q^2}{M}}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r + \frac{Q^2}{M}}\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(1 + \frac{Q^2}{Mr}\right) d\Omega . \tag{53}$$

(53)式描述了静态荷电 dilaton 时空. 做为 Sen 时空的特例,只需令 $a = 0$,Sen 时空中的结果便退化为本时空中对应的结果,这里为讨论方便只给出以下一些结果.

令 $a = 0$ 由(48)式可得到在赤道面上沿圆短程线轨道运动的 Kepler 频率为

$$\omega = \pm \left[\left(r + \frac{Q^2}{M}\right) \sqrt{\frac{r + \frac{Q^2}{2M}}{M}} \right]^{-1} . \tag{54}$$

上式代入(44)式并令 $a = 0$ 可得

$$\tau_1^2 = \frac{Mr + \frac{Q^2}{2}}{r\left(r + \frac{Q^2}{M}\right)^3}, \tag{55}$$

与 Sen 时空中的结果(49)式相同. 可见这种情况下陀螺进动角速度并不受时空旋转的影响,注意到由 K-N 时空退化为 R-N 时空时,也具有这种性质[8].

最后令 $a = 0$,由(52)式可得陀螺沿圆短程线轨道运动一周的进动角为

$$\Delta\varphi = - 2\pi \left\{ \frac{r + \frac{Q^2}{2M}}{\sqrt{r^2 + \frac{Q^2}{M} r}} \left[1 - \frac{M\left(3r + \frac{Q^2}{M}\right)}{\left(r + \frac{Q^2}{M}\right)\left(r + \frac{Q^2}{2M}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}. \tag{56}$$

4 讨 论

广义相对论中与电磁耦合的稳态和静态黑洞分别由 Kerr-Newman(K-N)解和 Reissner Nordström (R-N)解所描述,这两个解与弦理论中描述稳态和静态荷电黑洞的解不相同,这是因为弦理论中引入了标量 dilaton 场和反对称张量场等物质场. 这些物质场尤其是 dilaton 场与电磁场耦合会显著影响时空的结构. 将本文结果与文献[8]的结果进行比较将能使我们看到这些附加物质场对陀螺进动的影响.

由(55)式,当$\frac{Q}{r}$较小时,取一级近似可得

$$|\tau_{1SD}| \approx \sqrt{\frac{M}{r^2}}\left(1 - \frac{5Q^2}{4Mr}\right), \tag{57}$$

下标 SD 表示静态 dilaton 时空. R-N 时空中对应的结果为

$$|\tau_{1RN}| \approx \sqrt{\frac{M}{r^2}}\left(1 - \frac{Q^2}{2Mr}\right), \tag{58}$$

显然有

$$|\tau_{1SD}| < |\tau_{1RN}| . \tag{59}$$

静态荷电 dilaton 时空只是比 R-N 时空多引入标量 dilaton 场,且 dilaton 场与电磁场耦合,因而(59)式表明 dilaton 耦合使进动速率降低. 由于陀螺进动速率与黑洞角动量无关,故比较 Sen 时空与 K-N 时空中的陀螺进动速率时也有同样的结果.

对于稳态时空,如果$\frac{M}{r}$,$\frac{Q}{r}$都较小时,(52)式近似为

$$\Delta\varphi_{sen} \approx \pm \left(\frac{3\pi M}{r} \mp \frac{2\pi a\sqrt{Mr}}{r^2} - \frac{7\pi Q^2}{2r^2} \pm \frac{5\pi a Q^2\sqrt{Mr}}{2Mr^3} \right). \tag{60}$$

上式第一项绝对值为$\frac{3\pi M}{r}$，这正是 Schwarzschild 时空中的 Fokker-de Sitter 进动的近似值，这项可以看成是黑洞质量所引起的进动. 第二项绝对值为$\frac{2\pi a\sqrt{Mr}}{r^2}$，这项可以看成是黑洞自转角动量所引起的进动. 两项合起来的值就是 Kerr 时空中的 Schiff 进动值. 而 K-N 时空中对应的进动值，在$\frac{Q}{r}$，$\frac{M}{r}$都较小时为

$$\Delta\varphi_{\mathrm{KN}} \approx \pm\left(\frac{3\pi M}{r} \mp \frac{2\pi a\sqrt{Mr}}{r^2} - \frac{2\pi Q^2}{r^2} \pm \frac{\pi a Q^2\sqrt{Mr}}{Mr^3}\right). \tag{61}$$

(60)式与(61)式的前两项相同，且都有相同的含义. 后两项在 K-N 时空中分别代表电荷及电荷与黑洞角动量耦合对陀螺进动的贡献，而在 Sen 时空中，由于这两项都含有电荷，显然还应包含 dilaton 耦合的贡献，因而使得这两式后两项系数不同，比较这两式有

$$|\Delta\varphi_{\mathrm{KN}}| - |\Delta\varphi_{\mathrm{Sen}}| \approx \frac{3\pi Q^2}{2r^2}\left(1 \mp \frac{a}{\sqrt{Mr}}\right). \tag{62}$$

由于 $a \leqslant M - \frac{Q^2}{2M}$，且视界外有 $r \geqslant M - \frac{Q^2}{2M}$，因而不论陀螺做正向公转(对应上面符号)还是做反向公转(对应下面符号)均有

$$|\Delta\varphi_{\mathrm{KN}}| > |\Delta\varphi_{\mathrm{Sen}}|, \tag{63}$$

可见由于引入了 dilaton 场，使得陀螺的周期进动角减小.

对于静态时空由(56)式知$\frac{Q}{r}$较小时有

$$\Delta\varphi_{\mathrm{SD}} \approx \frac{3\pi M}{r} - \frac{7\pi Q^2}{2r^2}. \tag{64}$$

R-N 时空中对应的进动角为

$$\Delta\varphi_{\mathrm{RN}} \approx \frac{3\pi M}{r} - \frac{2\pi Q^2}{r^2}, \tag{65}$$

显然有

$$\Delta\varphi_{\mathrm{SD}} < \Delta\varphi_{\mathrm{RN}}. \tag{66}$$

这进一步表明 diaton 耦合使得周期进动角变小.

以上所讨论的是一类特殊情况，即在赤道面上沿圆短程线运动的陀螺进动，结果表明不论是静态还是稳态时空，dilaton 耦合都使得进动速率减慢，周期进动角减小.

[1] D. Garfinkle, G. Horowitz, A. Stromingor, *Phys. Rev.*, **D43**(1991), 3140.

[2] J. Horne, G. Horowitz, *Phys. Rev.*, **D46**(1992), 1340.

[3] A. Sen, *Phys. Rev. Lett.*, **69**(1992), 1006.

[4] J. Koga, K. Maeda, *Phys. Rev.*, **D52**(1995), 7066.

[5] C. W. Misher, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation (Freeman. San. Francisco 1973), p. 1117.

[6] W. Rindler, V. Perlick, *Gen. Rel. Grav.*, **22**(1990), 1067.

[7] B. R. Iyer, C. V. Vishveshwara, *Phys. Rev.*, **D48**(1993), 5706.

[8] K. R. Nayak, C. V. Vishveshwara, *Class. Quantum Grav.*, **13**(1996), 1783.

[9] J. Synge, Relativity The General Theory (North-Holland Publishing Company. Amsterdam 1960), p. 8.

[10] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, translated by Zhen-Long Zou *et al*. (Science Press, Beijing, 1980), p. 140[温伯格，引力论和宇宙论，邹振隆等译(科学出版社，1980)，p. 140].

[11] C. W. Misher, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation (Freeman. San. Francisco 1973), p. 171.

[12] J. Synge, Relativity The General Theory (North-Holland Publishing Company. Amsterdam 1960), p. 140.

THE EFFECT OF GYROSCOPIC PRECESSION IN SEN SPACETIME

PENG YI
(*Department of Physics, Southeast University, Nanjing* 210096, *China*)
LIANG ZHI-BIN
(*Institute of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing* 210080, *China*)
JING JI-LIANG HUANG YI-BIN
(*Department of Astronomy and Applied Physics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*)
(Received 19 January 2000; revised manuscript received 29 February 2000)

ABSTRACT

The effect of gyroscopic precession in Sen spacetime is investigated using Frenet-Serret formalism, and general precession formulas for circular orbits with arbitrary constant angular speed are deduced. The precession angle on the equatiorial plane and along the circular geodesics can be obtained easily from the general formulas. The effect of gyroscopic precession in static dilaton spacetime is also studied as a special case. Comparing these results with those in the Kerr-Newman and Reissner-Nordström spacetime respectively, we find that dilaton coupling will decrease the effect of precession.

Keywords: Sen spacetime, Frenet-Serret tetrad, Fermi-Walker transport
PACC: 0420J, 9760L, 1125M