第 49 卷 第 9 期 2000 年 9 月
1000-3290/2000/49(09)/1714-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 9, September, 2000

附加 Kerr 介质非关联双模相干态场与 V 型三能级原子的相互作用系统中原子(场)的熵特性*

赖振讲 刘自信

(河南师范大学物理系,新乡 453002)

(1999 年 11 月 17 日收到;2000 年 1 月 3 日收到修改稿)

利用附加克尔介质非关联双模相干态场与 V 型三能级原子相互作用系统的态矢量导出了原子(场)熵的计算公式,通过数值计算,绘出并讨论了克尔介质对场熵特性的影响,结果表明强的克尔效应可以使原子呈现布居俘获,且使熵的时间演化周期性变化,弱的克尔效应使原子和光场的关联改善,减小关联起伏.

关键词:原子(场)的熵,非关联双模光场,V 型三能级原子,克尔介质,场和原子的关联

PACC:4250

1 引 言

两能级原子与单模辐射场相互作用除旋波近似外不做任何假设精确可解的 Jaynes-Cummings(J-C)模型是量子光学领域重要的数学模型,自诞生以来人们从理论及实验上做了大量的研究,揭示了该模型中丰富的量子特性,加深了光场与物质相互作用的认识,J-C 模型也由原来的单模场与二能级原子相互作用推广到了三能级与双模场的相互作用,进而又把 J-C 模型由真空环境推广到介质环境.文献[1,2]给出了三能级原子和一模及两模腔场相互作用系统的态矢量,讨论了原子能级布居概率及场的统计特性的时间演化.文献[3,4]研究了充满 Kerr 介质的 V 型三能级原子与关联双模相干态场相互作用,文献[5]讨论了非关联双模场与 V 型三能级原子在 Kerr 介质中的相互作用,讨论了原子能级布居概率与场的量子统计特性.文献[6]在谈到二能级原子与量子场相互作用系统时,认为半经典理论描述原子动力学特性的跃迁概率和感应偶极矩在全量子情况下不足以描述该系统的动力学特性,还应有第三个动力学变量——熵,并第一次计算了原子熵.因为熵是一种偏离纯态的量度,它包含了密度矩阵的高阶统计矩,所以是一种十分灵敏的量子态纯度的测量,文献[7]将熵理论应用于量子光学,在 J-C 模型的框架内研究了光与原子相互作用的子系统的信息关联与演化,即子系统的"约化熵".其定义为

$$S_{f(a)} = -\mathrm{Tr}_{f(a)}[\rho_{f(a)}\ln\rho_{f(a)}].$$

式中约化密度算符 $\rho_{f(a)}$ 为

$$\rho_{f(a)} = \mathrm{Tr}_{a(f)}[\rho],$$

ρ 为光场-原子整个系统的密度算符,下标 f(a)表示光场(原子).若光场和原子初始时处于纯态,彼此无关联,则光场-原子全系统的熵为零,不随时间变化,根据熵的 Araki-Lieb 不等式[7] $|S_a - S_f| \leqslant S \leqslant S_a + S_f$,在 $t>0$ 时

$$S_a = S_f.$$

文献[8]对附加克尔介质双光子与二能级原子相互作用的 J-C 模型的场熵动力学特性进行了研究,讨论了克尔介质非线性相互作用对场熵的影响.本文讨论附加克尔介质非关联双模光场和三能级原子的相互作用系统的场(原子)熵的特性.并研究 Kerr 介质与场的非线性作用对系统中场(原子)熵特性的影响,对于认识克尔介质的在此系统中的作用及光场和原子的关联特性有重要意义.

2 系统态矢量

V 型三能级原子与双模场相互作用系统如图 1 所示,由文献[3,7] Kerr 介质中原子与双模光场相互作用哈密顿在旋波近似下为

* 河南省自然科学基金(批准号:994050400)资助的课题.

$$H_I = x a_1^+ a_1 a_2^+ a_2 + \delta_1 R_{22} + \delta_2 R_{11} + g_1(a_1 R_{20} + R_{02} a_1^+) + g_2(a_2 R_{10} + R_{01} a_2^+), \qquad (1)$$

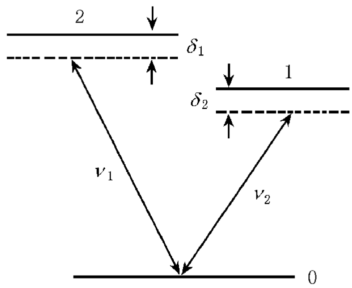

图 1　原子与双模光场相互作用

(1)式中 g_1, g_2 为场与原子的耦合系数,δ_i 为单光子失谐量,$a_1(a_1^+)a_2(a_2^+)$分别为双模光场湮没(产生)算符,x 是与 Kerr 介质的三阶极化系数有关的常数,$R_{ij} = |i\rangle\langle j|$为原子的上升和下降算符(取 $\hbar = 1$).考虑初始时刻原子处于激发态$|2\rangle$,光场处于非关联双模相干态$|\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle$在福克表象中双模场表示为

$$|\psi(0)\rangle_f = \sum_{n_1, n_2} F_{n_1, n_2} |n_1, n_2\rangle,$$

$$F_{n_1, n_2} = \exp\left[-\frac{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2}{2}\right] \frac{\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}}. \qquad (2)$$

t 时刻,系统在相互作用绘景中的态矢量为

$$|\psi_I(t)\rangle = \sum_{n_1, n_2} F_{n_1, n_2} \exp[-i n_2 (n_1 + 1) x t] \cdot [B_2(n_1, n_2, t)|2, n_1, n_2\rangle + B_1(n_1, n_2, t)|1, n_1 + 1, n_2 - 1\rangle + B_0(n_1, n_2, t)|0, n_1 + 1, n_2\rangle]. \qquad (3)$$

将上式代入薛定谔方程

$$i\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = H_I |\psi_I(t)\rangle, \qquad (4)$$

经过运算得到[5]

$$B_2(n_i, \delta_i, t) = \sum_{i=1}^{3} A_i (\lambda_i^2 - [x(n_1 + 1) - \delta_2]\lambda_i - g_2^2 n_2) e^{i\lambda_i t},$$

$$B_1(n_i, \delta_i, t) = g_1 g_2 \sqrt{n_2 (n_1 + 1)} \sum_{i=1}^{3} A_i e^{i\lambda_i t},$$

$$B_0(n_i, \delta_i, t) = g_1 \sqrt{n_1 + 1} \sum_{i=1}^{3} A_i (-\lambda_i + [x(n_1 + 1) - \delta_2]) e^{i\lambda_i t}, \qquad (5)$$

式中

$$A_1 = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)},$$

$$A_2 = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$$A_3 = \frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)},$$

$$r = \left|\left(\frac{Q^2}{4} - R\right)^{\frac{1}{6}}\right| = \left|\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right|,$$

$$u = \frac{1}{3}\arccos\left[\frac{|Q|}{2}\left(\frac{|p|}{3}\right)^{-3/2}\right].$$

$$\lambda_i = y_i - b/3, (i = 1, 2, 3),$$

$$b = -x(n_1 + n_2 + 1) + \delta_1 + \delta_2,$$

$$c = -g_2^2 n_2 - g_1^2 (n_1 + 1) + (x n_2 - \delta_1)[x n_1 + 1) - \delta_2],$$

$$d = g_2^2 n_2 (n_2 x - \delta_1) + g_1^2 (n_1 + 1)[(n_1 + 1)x - \delta_2].$$

$$p = c - b^2/3, Q = d - \frac{bd}{3} + \frac{2b^3}{27}.$$

当 $Q<0$ 时,

$$y_1 = 2r\cos(u), y_2 = 2r\cos\left(u + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$y_3 = 2r\cos\left(u + \frac{4\pi}{3}\right),$$

当 $Q>0$ 时,

$$y_1 = 2r\cos\left(u + \frac{\pi}{3}\right), y_2 = 2r\cos\left(u - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$y_3 = 2r\cos(u - \pi).$$

3　原子的约化密度矩阵及熵的计算公式

根据原子-光场耦合体系在相互作用绘景中的态矢量(3)式,可得整个系统的密度算符

$$\rho(t) = |\Psi_I(t)\rangle\langle\Psi_I(t)|,$$

通过对双模光场求迹,然后把约化密度算符依据原子的(态)基表示,得

$$\rho_a(t) = \begin{bmatrix} \rho_{22}(t) & \rho_{21}(t) & \rho_{20}(t) \\ \rho_{12}(t) & \rho_{11}(t) & \rho_{10}(t) \\ \rho_{02}(t) & \rho_{01}(t) & \rho_{00}(t) \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

式中

$$\rho_{ii}(t) = \sum_{n_1, n_2} |F_{n_1, n_2}|^2 |B_i(n_1, n_2, t)|^2, (i = 2, 1, 0),$$

$$\rho_{21}(t) = \rho_{12}^*(t) = \sum_{n_1, n_2} F_{n_1 - 1, n_2 + 1}^* F_{n_1, n_2} B_1^*(n_1 - 1, n_2 + 1, t) B_2(n_1, n_2, t) \exp[i(n_1 - n_2) x t],$$

$$\rho_{20}(t) = \rho_{02}^*(t) = \sum_{n_1, n_2} F_{n_1 - 1, n_2}^* F_{n_1, n_2} \cdot B_0^*(n_1 - 1, n_2, t) B_2(n_1, n_2, t) \exp[-i n_2 x t],$$

$$\rho_{10}(t)=\rho_{01}^{*}(t)=\sum_{n_1,n_2}F_{n_1-1,n_2}^{*}F_{n_1-1,n_2+1}$$
$$\cdot B_0^{*}(n_1-1,n_2,t)B_1(n_1-1,n_2+1,t)$$
$$\cdot\exp[-\mathrm{i}n_1xt].$$

把(6)式矩阵对角化,设其本征值为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,则熵为

$$S(\rho_a)=-\alpha_1\ln\alpha_1-\alpha_2\ln\alpha_2-\alpha_3\ln\alpha_3, \tag{7}$$

实际上 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是如下三次方程的根,

$$\alpha^3+b_s\alpha^2+c_s\alpha+d_s=0. \tag{8}$$

其中

$$b_s=-1,$$
$$c_s=\rho_{22}\rho_{11}+\rho_{11}\rho_{00}+\rho_{00}\rho_{22}-\rho_{21}\rho_{12}-\rho_{20}\rho_{02}-\rho_{10}\rho_{01},$$
$$d_s=\rho_{22}\rho_{10}\rho_{01}+\rho_{11}\rho_{20}\rho_{02}+\rho_{00}\rho_{21}\rho_{12}-\rho_{22}\rho_{11}\rho_{00}-\rho_{21}\rho_{10}\rho_{02}-\rho_{20}\rho_{01}\rho_{12},$$

由文献[5,9],令 $p_s=c_s-b_s^2/3$,

$$Q_s=d_s-\frac{b_sc_s}{3}+\frac{2b_s^3}{27},R_s=\frac{Q_s^2}{4}+\frac{p_s^3}{27},$$
$$r_s=\left|\left(\frac{Q_s^2}{4}-R_s\right)^{\frac{1}{6}}\right|=\left|\left(\frac{p_s}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right|,$$
$$u_s=\frac{1}{3}\arccos\left[\frac{|Q_s|}{2}\left(\frac{|p_s|}{3}\right)^{-3/2}\right],$$
$$\alpha_i=y_i^s-b_s/3,(i=1,2,3),$$

R_s 的符号直接与三能级原子熵的定义有关,当 $R_s>0$ 时,使得(8)式只有一个实根 α_1,故 α_2,α_3 必为虚部非零的复根,在此情形便失去了三能级原子熵的一般意义. 有兴趣的是 $R_s<0$ 的情况,此时能给出使原子熵有意义的解. 但解的性质仍有赖于 Q_s 的符号,不同的符号将对对角化的约化密度矩阵元中的相位因子给出不同的贡献. 事实上,当 $R_s<0$,$Q_s<0$ 时,

$$y_1^s=2r_s\cos(u_s),y_2^s=2r_s\cos\left(u_s+\frac{2\pi}{3}\right),$$
$$y_3^s=2r_s\cos\left(u_s+\frac{4\pi}{3}\right),$$

当 $R_s<0,Q_s>0$ 时,

$$y_1^s=2r_s\cos\left(u_s+\frac{\pi}{3}\right),y_2^s=2r_s\cos\left(u_s-\frac{\pi}{3}\right),$$
$$y_3^s=2r_s\cos(u_s-\pi).$$

4 数值计算与讨论

对(7)式进行数值计算,设初始时光场为非关联双模相干态,平均光子数为 $\bar{n}_1=\bar{n}_2=10$,原子处于激发态 $|2\rangle$,场与原子的耦合系数 $g_1=g_2=1$,分别取不同的克尔效应强度和单光子失谐量,得到熵的变化,如图 2 和图 3 所示.

图 2 曲线 1 为 $x=0,\delta_1=\delta_2=0$ 的情况下,原子(场)熵的时间演化,把该曲线与文献[7]中的图 10 比较,可以看出单模光场与两能级原子和非关联双模与三能级原子作用系统的熵特性的区别,熵第一次达最小值的时刻不同,前者 $t=10.0$,后者为 14.0,说明多能级原子与多模场相互作用系统中子系统的熵变化趋缓,曲线的极值也发生了变化,两能级单模场作用系统熵的极小值为 0.1[7],当加大平均光子数极小值几乎为零[7],即原子和场此时几乎返回纯态,而三能级非关联双模相互作用系统熵的极小值为 0.76,说明此时原子仍是统计混合态. 而极大值前者为 0.693,后者为 1.08,这些数值说明,系统处于任何可能状态的概率相等时熵最大,即两能级时每个能级占有概率为 1/2 和三能级时每个能级占有概率为 1/3 时其熵所对应的值. 曲线 2 是 $x=0,\delta_1=0.1,\delta_2=-0.1$ 的情况下熵的演化,从图上可以看出,单光子失谐量影响其长时间特性,对短时间特性影响不大.

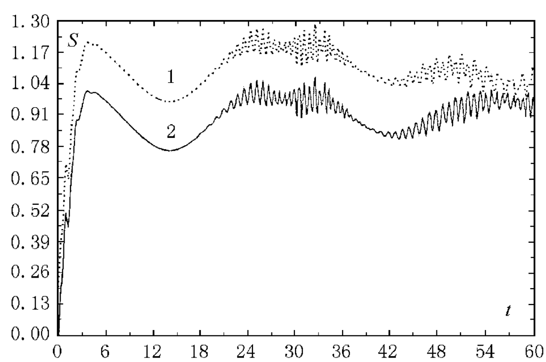

图 2 $\bar{n}_1=\bar{n}_2=10$. $x=0$ 时,熵(S)的时间演化 1.($S+0.2$),$\delta_1=\delta_2=0$;2. $\delta_1$00.1,$\delta_2=-0.1$

图 3 曲线 1 为 $x=0.3,\delta_1=\delta_2=0$ 的情况下熵的时间演化. 该曲线和图 2 中的曲线比较可知,在横坐标 0—3 的范围内曲线的变化率没有减小,即原子进入混合态的速度没有因为附加介质而变小 ;但进入混合态后熵的起伏明显减小,甚至保持极大值不变. 说明在此环境下光与原子的关联比较稳定,使原子经常处于均匀统计混合态. 曲线 2 表示 $x=2.5$,$\delta_1=\delta_2=0$ 的情况下熵的演化,最大熵值为 0.48,最小值为 0.18,且出现周期性变化,说明此时原子处

于非均匀混合态,克尔介质表现出囚禁作用,原子初始所处的激发态占有的概率增大[5],光场与原子的关联程度随克尔效应的增强而减小,且出现周期性变化.

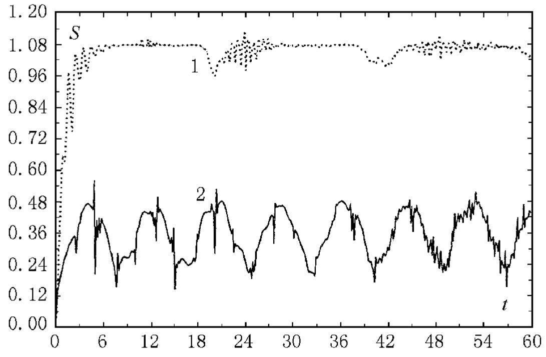

图 3　$\bar{n}_1=\bar{n}_2=10$,$\delta_{1,2}=0$ 时,熵(S)的时间演化　1.$x=0.3$;2.$x=0.5$

图 4 进一步绘出了 $x=5$,$x=10$,$\delta_{1,2}=0$ 两种情况下熵的时间演化,比较图 2 和 3 可以看出熵的最大和最小值随 x 的增大而减小,振荡周期随 x 的增大而增大,说明克尔介质对原子的囚禁程度是随 x 的增强而增强.从物理角度看,这些也是光场量子化的结果.反映在光子数通过 Kerr 介质的三阶极化系数 x 而对不同量子态的相干叠加有不同的相对权重,从而影响熵以及场和原子之间的关联.

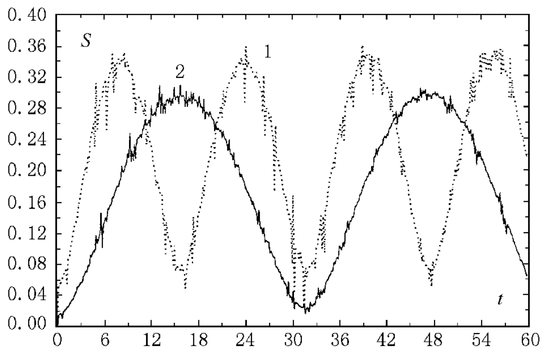

图 4　$\bar{n}_1=\bar{n}_2=10$,$\delta_{1,2}=0$ 时,熵(S)的时间演化　1.$x=3$;2.$x=5$

5　结　　论

本文利用非关联双模相干态与 V 型三能级原子相互作用系统的态矢量,导出了该系统中原子(场)的熵的计算公式,通过数值计算讨论了熵的演化特性,结果表明,强的克尔效应使原子的熵随时间周期性的演化,也说明场和原子的关联周期性变化;弱的克尔效应可以减小熵的起伏,是否可以说改善光场与原子之间的关联有待进一步研究.

[1] Xiao-shen Li, D. L. Lin, Chang-de Gong, *Phys. Rev.*, **A51** (1987), 5209.

[2] Zhen-dong Liu, Xiao-shen Li, D. L. Lin, *Phys. Rev.*, **A51** (5) (1987), 5209.

[3] Gao-xiang Li, Jin-sheng Peng, *Acta Physica Sinica*, **42** (1993), 1443 (in Chinese) [李高翔、彭金生,物理学报,**42** (1993), 1443].

[4] Yun-zhong Lai, Jiu-qing Liang, *Acta Physica Sinica*, **46** (1997), 1710 (in Chinese) [赖云忠、梁九卿,物理学报,**46** (1997), 1710].

[5] Zhen-jiang Lai, Xia Chen, Qing-wu Li, *Acta Sinica Quantum Optica*, **5** (1999), 49 (in Chinese) [赖振讲、陈霞、李庆武,量子光学学报,**5** (1999), 49].

[6] P. K, Aravind, J. O. Hirschfelder, *J. Phys. Chem.*, **88** (1984), 4788.

[7] S. J. D. Phoenix, P. L. Knight, *Ann. Phys.*, **186** (1988), 381.

[8] Mao-fa Fang, Peng Zhou, *Acta Physica Sinica*, **43** (1994), 570 (in Chinese) [方卯发、周鹏,物理学报,**43** (1994), 570].

[9] B. L. Van Der Waerden, Algebra I (Springer-Verlag, 1955).

ENTROPY PROPERTIES OF THE FIELD OR THE ATOM IN THE INTERACTING SYSTEM OF TWO-MODE FIELD WITH THE V-TYPE THREE-LEVEL ATOM IN A KERR-LIKE MEDIUM*

LAI ZHEN-JIANG LIU ZI-XIN

(*Department of Physics*, *Henan Normal University*, *Xinxiang* 453002, *China*)

(Received 17 November 1999; revised manuscript received 3 January 2000)

ABSTRACT

Using the method of the systematic state vector we formulate the entropy of the V-type three-level atom interacting with initially uncorrelated two-mode coherent states of arbitrary detunings in a cavity filled with Kerr-like medium. It is shown by numerical calculation that the behavior of the entropy is strongly affected by the Kerr medium. Weak Kerr medium improves the quantum correlation. Stronger Kerr medium induces strongly periodic fluctuation of the quantum correlation between the atom and the fields.

Keywords: atomic (field) entropy, Kerr-like medium, V-type three-level, atom quantum correlation.

PACC: 4250

* Project supported by the Natural Science Foundation of Henan Province of China (Grant No. 994050400).