第 50 卷 第 1 期 2001 年 1 月
1000-3290/2001/50(1)/0008-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 50, No. 1, January, 2001


# 线性耦合 Oregonator 振子中的 Echo 波*

周天寿† 张锁春

(中国科学院数学与系统科学研究院应用数学研究所,北京 100080)

(1999 年 12 月 27 日收到;2000 年 8 月 25 日收到修改稿)

给出了耦合 Oregonator 振子中的 Echo 波的存在条件及相应周期的精确表达式,并发现该系统中存在两种类型的 Echo 波,其中一种满足漂亮的关系式:$x_1(t)+x_2(t)=2u^+$,$z_1(t)+z_2(t)=2u^+$(这里 $u^+$ 是该系统的均匀正定态的一个分量).

关键词:耦合 Oregonator 振子,Echo 波,激励介质,相位

PACC:0340K

## 1 引 言

单个俄勒冈振子 Oregonator 来源于著名的 Belousov-Zhabotinsky(BZ)反应的 FKN 机制[1,2],它揭示一类非线性现象,是一种典型激励介质的数学模型.近年来已引起众多物理,化学,生物,数学等领域工作者的广泛关注[3—6].

常见的耦合 Oregonator 振子是由单个的 Oregonator 振子以线性差的形式耦合而成.它由下列一组常微分方程来描述:

$$\varepsilon\dot{x}_1 = F(x_1,z_1)+D(x_2-x_1),$$
$$\dot{z}_1 = G(x_1,z_1), \tag{1a}$$
$$\varepsilon\dot{x}_2 = F(x_2,z_2)+D(x_1-x_2),$$
$$\dot{z}_2 = G(x_2,z_2), \tag{1b}$$

其中导数是关于时间 $t$ 的;$F(x,z)=x(1-x)-fz\dfrac{x-\mu}{x+\mu}$,$G(x,z)=x-z$,$(x,z)\in R_+^2=\{(x,z)\mid x>0,z>0\}$,参数满足:$0<\varepsilon<1$,$0<\mu<1$,$0<f<+\infty$,$D>0$ 是耦合系数.

Krinsky[7]曾经通过研究一类简单数学模型中具有'Echo'类型激励性的异位病灶的起源机制,发现即使在并不拥有自发活动的媒介中,脉冲类型的点源也可能出现.这种点源可以是两个相互激励的相邻细胞.每个细胞由一组所谓 BvP 类型[8]方程来描述.后来他又与他的同事通过近似估计和数值模拟,进一步调查了耦合系统中出现的'Echo'波,并近似地给出它可能存在的区域.

本文子系统(1a)描述细胞 1,而子系统(1b)描述细胞 2.所谓 Oregonator 振子中的 Echo 波是指系统(1)中两个相互激励的细胞 1 和细胞 2,周期地在同一轨道上运动,但它们的相位相差一定常数.

Tyson[9]曾猜想系统(1)中存在稳定的 Echo 波,但至今未得到证明.

对于其他一些类似的系统[10—12],有许多作者也调查过其中的 Echo 波.采用的方法一般是近似估计和数值模拟.还有的采用摄动方法(即考虑耦合系数充分小的情形),所得的结果是近似的.

本文通过严格的理论分析,给出了系统(1)产生 Echo 波的一个充分条件(即有关参数所满足的条件)和相应周期的精确表达式,并发现有两种类型的 Echo 波,其中一种满足漂亮的关系式:$x_1(t)+x_2(t)=2u^+$,$z_1(t)+z_2(t)=2u^+$.

## 2 理论分析

### 2.1 均匀正定态的唯一性

设

$$F(x,z)=0, G(x,z)=0, \tag{2}$$

则(2)式在 $R_+^2$ 中有唯一的正解$(x_0,z_0)$,其中

$$x_0=z_0=u^+ \equiv \frac{1-f-\mu+\sqrt{(1-f-\mu)^2+4\mu(1+f)}}{2}, \tag{3}$$

* 国家自然科学基金(批准号:19901034)资助的课题.

†E-mail:zsc@amath6.amt.ac.cn

且 $\mu<u^+<1$. 记 $s^+=(u^+,u^+,u^+,u^+)$，则 $s^+$ 是系统(1)的一个均匀正定态. 下面证明它是(1)式的唯一均匀正定态. 为此令 $H(x)=x(1-x)-fx\dfrac{x-\mu}{x+\mu}$，则 $H(x)=0$ 有唯一的正根 $u^+$，且当 $0<x<u^+$ 时，$H(x)>0$ 而当 $x>u^+$ 时，$H(x)<0$. 但系统(1)的任意正定态须满足

$$H(x_1)+D(x_2-x_1)=0,$$
$$H(x_2)+D(x_1-x_2)=0,$$
$$x_1=z_1, x_2=z_2, x_1>0, x_2>0. \tag{4}$$

假设 $x_2>x_1$，则由(4)式知 $H(x_1)<0$，$H(x_2)>0$. 然而由 $H(x_1)<0$ 和 $x_1>0$ 得出 $x_1>u^+$. 同理 $x_2<u^+$. 因此 $x_2>x_1$ 不可能. 类似地可证 $x_2<x_1$ 也不可能. 只有 $x_1=x_2=z_1=z_2=u^+$. 故对任意 $D>0$，系统(1)存在唯一的均匀正定态.

### 2.2　相容性条件

若系统(1)存在 Echo 波，则此 Echo 波中的两个细胞的相位只能相差半个周期. 事实上，设 $x_1=\phi(t)$，$z_1=\psi(t)$，$x_2=\phi(t-\alpha T)$，$z_2=\psi(t-\alpha T)$是系统(1)的 Echo 波解，其中 $T$ 是 Echo 波的最小正周期，而 $0<\alpha<1$ 为常数. 由系统(1)的第一，第三式可得

$$\begin{aligned}\varepsilon\dot\phi(t-\alpha T)&=F(\phi(t-\alpha T),\psi(t-\alpha T))\\&\quad+D(\phi(t-2\alpha T)-\phi(t-\alpha T)),\\ \varepsilon\dot\phi(t-\alpha T)&=F(\phi(t-\alpha T),\psi(t-\alpha T))\\&\quad+D(\phi(t)-\phi(t-\alpha T)).\end{aligned} \tag{5}$$

两式相减得

$$D(\phi(t-2\alpha T)-\phi(t))=0. \tag{6}$$

因为 $D>0$ 及 $T$ 的假定，于是 $\alpha=\dfrac{T}{2}(\bmod T)$.

### 2.3　在 $s^+$ 处线性化方程的 Echo 波

在 $s^+$ 处，系统(1)的线性化方程为

$$\dot Y=BY, \tag{7}$$

其中

$$Y=(x_1-u^+,z_1-u^+,x_2-u^+,z_2-u^+)^T,$$

$$B=\begin{pmatrix} a-\dfrac{D}{\varepsilon} & b & \dfrac{D}{\varepsilon} & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ \dfrac{D}{\varepsilon} & 0 & a-\dfrac{D}{\varepsilon} & b\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix},$$

这里

$$a=\frac{1}{\varepsilon}\left[1-2u^+-\frac{2f\mu u^+}{(u^++\mu)^2}\right],$$
$$b=-\frac{f}{\varepsilon}\left(\frac{u^+-\mu}{u^++\mu}\right).$$

令 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$，$t'=\omega t$，则可把求(7)式的周期为 $T$ 的 Echo 波($a>1$ 可保证(7)式有周期解存在. 以下假定 $a>1$)转化为求下列方程的周期为 $2\pi$ 的 Echo 波. 为方便，以下仍用 $t$ 代替 $t'$，则有

$$\omega\dot Y=BY. \tag{8}$$

设(8)式的 Echo 波解为 $x_1=p(t)$，$z_1=q(t)$，$x_2=p(t-\pi)$，$z_2=q(t-\pi)$，这里 $p(t)$，$q(t)$是周期为 $2\pi$ 的函数，并设

$$p(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}p_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt},\quad q(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}q_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}, \tag{9}$$

这里 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，代入到(8)式得

$$\mathrm{i}k\omega\begin{pmatrix}p_k\\ q_k\\ p_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi}\\ q_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi}\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}p_k\\ q_k\\ p_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi}\\ q_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi}\end{pmatrix}, \tag{10}$$

其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 又(10)式等价于

$$\begin{pmatrix}\mathrm{i}k\omega-a+\dfrac{D}{\varepsilon}-\dfrac{D}{\varepsilon}(-1)^k & -b\\ 1 & -\mathrm{i}(1+k\omega)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_k\\ q_k\end{pmatrix}=0. \tag{11}$$

为了求得非平凡的 Echo 波解，则至少存在一个非零整数 $k_0$，使得(1)式有非零解. 对于这样的 $k=k_0$，(11)式的系数行列式必为 0. 通过比较实部和虚部，可得

$$k_0^2\omega^2+(a+b)-\frac{D}{\varepsilon}[1-(-1)^{k_0}]=0,$$
$$k_0\omega\left[1-a+\frac{D}{\varepsilon}(1-(-1)^{k_0})\right]=0. \tag{12}$$

当 $k_0$ 为偶数时，(12)式无解(因为 $a>1$)；当 $k_0$ 为奇数时，(12)式变为

$$-a-b+\frac{2D}{\varepsilon}=k_0^2\omega^2,$$
$$k_0\omega\left[1-a+\frac{2D}{\varepsilon}\right]=0. \tag{13}$$

由于 $a+b=-\dfrac{4u^+}{\varepsilon}\left(1+\dfrac{2f\mu}{(u^++\mu)^2}\right]<0$，于是从(13)式可得

$$D=\frac{\varepsilon}{2}(a-1),$$

$$k_0=\mathrm{Int}\left[\frac{T}{2\pi}\sqrt{-(b+1)}\right]. \tag{14}$$

这里 Int 为取整函数. 因此当 $a>1, D=\frac{\varepsilon}{2}(a-1)$ 时,系统(1)在 $s^+$ 处的线性化方程(7)存在 Echo 波. 对于这样的 $k_0$,由(11)式可求得一组解:

$$\begin{pmatrix} p_{\pm k_0} \\ q_{\pm k_0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\pm \mathrm{i}k_0\omega \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

相应的 Echo 波具有形式

$$x_1(t)=u^+ + p_1(t), z_1(t)=u^+ + q_1(t),$$
$$x_2(t)=u^+ - p_1(t), z_2(t)=u^+ - q_1(t), \tag{16}$$

其中

$$p_1(t)=c_1\left(1+\frac{2\pi k_0\mathrm{i}}{T}\right)\mathrm{e}^{\frac{2\pi k_0\mathrm{i}}{T}t}+c_2\left(1-\frac{2\pi k_0\mathrm{i}}{T}\right)\mathrm{e}^{\frac{-2\pi k_0\mathrm{i}}{T}t},$$
$$q_1(t)=c_1\mathrm{e}^{\frac{2\pi k_0\mathrm{i}}{T}t}+c_2\mathrm{e}^{\frac{-2\pi k_0\mathrm{i}}{T}t}. \tag{17}$$

这里 $c_1, c_2$ 为不同时为 0 的任意常数. 此外由(16)式易知

$$x_1(t)+x_2(t)=2u^+,$$
$$z_1(t)+z_2(t)=2u^+. \tag{18}$$

### 2.4 系统(1)的 Echo 波

容易看出,求系统(1)周期为 $T$ 的 Echo 波等价于求下列方程周期为 $T$ 的解:

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)[1-x(t)]-fz(t)\frac{x(t)-\mu}{x(t)+\mu}+D\left[x\left(t-\frac{T}{2}\right)-x(t)\right]x_1(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)-z(t). \tag{19}$$

为研究方便起见,进一步把(19)式改写为

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^2(t)+\varepsilon\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$$
$$=\mu x(t)+f\mu z(t)$$
$$+D\mu\left[x\left(t-\frac{T}{2}\right)-x(t)\right]+(1-\mu)x^2(t)-x^3(t)$$
$$-fx(t)z(t)+D\left[x\left(t-\frac{T}{2}\right)x(t)-x^2(t)\right],$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(t)=x(t)-z(t), \tag{20}$$

同时设 $T$ 为最小的正周期. 又设 $x(t)$ 和 $z(t)$ 的 Fourier 级数展开式分别为

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}r_k\mathrm{e}^{\frac{2\pi k\mathrm{i}}{T}t}, z(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}s_k\mathrm{e}^{\frac{2\pi k\mathrm{i}}{T}t}. \tag{21}$$

把它们代入(20)式的第二式得

$$s_k=\frac{1}{1+\frac{2\pi k\mathrm{i}}{T}}r_k, \tag{22}$$

其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

以下先考虑单向级数的情形(相当于用待定系数法求解). 如考虑正向级数(包括 $k=0$),此时令 $r_k=s_k=0(k=-1,-2,\cdots)$. 我们的目标是希望所有的 $r_k$(从而 $s_k$)能完全确定下来. 为此把(21)式代入(20)式,并结合(22)式,可得

$$\frac{\pi\varepsilon k\mathrm{i}}{T}\sum_{l+j=k}r_lr_j+\frac{2\mu\pi\varepsilon k\mathrm{i}}{T}r_k=\mu r_k+\frac{f\mu}{1+\frac{2\pi k\mathrm{i}}{T}}r_k$$
$$+D_\mu(\mathrm{e}^{-k\pi\mathrm{i}}-1)+(1-\mu)\sum_{l+j=k}r_lr_j-\sum_{l+j+m=k}r_lr_jr_m$$
$$-f\sum_{l+j=k}\frac{1}{1+\frac{2\pi j\mathrm{i}}{T}}r_lr_j+D\sum_{l+j=k}r_lr_j(\mathrm{e}^{-\pi j\mathrm{i}}-1), \tag{23}$$

这里 $k=0,1,2,\cdots$.

(1)当 $k=0$ 时,(23)式变为

$$r_0[r_0^2-(1-f-\mu)r_0-\mu(1+f)]=0. \tag{24}$$

若 $r_0=0$,则由(23)式可推得 $r_k=0(k\geqslant1)$. 由对称性可知,此时(20)式仅有平凡解 $x(t)=z(t)\equiv0$. 不妨设 $r_0\neq0$,由(24)式得

$$r_0=u^+\equiv\frac{1-f-\mu+\sqrt{(1-f-\mu)^2+4\mu(1+f)}}{2}. \tag{25}$$

(2)当 $k\geqslant1$ 时,由(23)式得

$$\left[\mu+(D\mu+u^+)(\mathrm{e}^{-k\pi\mathrm{i}}-1)+2(1-\mu)u^+-3u^{+2}-fu^+-\frac{2\pi\varepsilon k\mathrm{i}}{T}(u^++\mu)+\frac{f(\mu-u^+)}{1+\frac{2\pi k\mathrm{i}}{T}}\right]r_k$$
$$=\sum_{\substack{l+j=k\\ l\bmod k\neq0\\ j\bmod k\neq0}}r_lr_j\left[-1+\mu+\frac{2\pi k\varepsilon\mathrm{i}}{T}+\frac{f}{1+\frac{2\pi j\mathrm{i}}{T}}-D(\mathrm{e}^{-\pi j\mathrm{i}}-1)\right]+\sum_{\substack{l+j+n=k\\ l\bmod k\neq0\\ j\bmod k\neq0\\ n\bmod k\neq0}}r_lr_jr_n. \tag{26}$$

情形 1 若 $r_1=0$,但 $r_2\neq0$. 由(26)式可归纳地推得 $r_{2k-1}=0(k=1,2,\cdots)$. 此时由(25),(21),(22)式得

$$x(t)=u^++\sum_{k=1}^{+\infty}r_{2k}\mathrm{e}^{\frac{4\pi k\mathrm{i}}{T}t},$$
$$z(t)=u^++\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{r_{2k}}{1+\frac{4\pi k\mathrm{i}}{T}}\mathrm{e}^{\frac{4\pi k\mathrm{i}}{T}t}. \tag{27}$$

很明显,它的周期为$\frac{T}{2}$,这与前面的假定相矛盾.故情形 1 不会出现.

情形 2　若 $r_1 \neq 0$,此时由(26)式在 $k=1$ 时可得

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{-b-1}}, \tag{28}$$

$$D = \frac{(1-\varepsilon)\mu + (2-2\mu-f-\varepsilon)u^+ - 3(u^+)^2}{2(u^+ + \mu)} = \frac{\varepsilon}{2}(a-1). \tag{29}$$

其他系数 $r_k(k \geqslant 2)$可由(26)式类推地确定.而相应的 Echo 波解具有形式

$$\begin{aligned} x_1(t) &= u^+ + \sum_{k=1}^{+\infty} r_k e^{\frac{2k\pi i}{T}t}, \\ z_1(t) &= u^+ + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r_k}{1+\frac{2\pi k i}{T}} e^{\frac{2k\pi i}{T}t}, \\ x_2(t) &= u^+ + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{-k\pi i} r_k e^{\frac{2k\pi i}{T}t}, \\ z_2(t) &= u^+ + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r_k}{1+\frac{2\pi k i}{T}} (-1)^{-k\pi i} e^{\frac{2k\pi i}{T}t}, \end{aligned} \tag{30}$$

其中 $r_1$ 为任意常数.注意到由(26)式可归纳地推得

$$r_k = M_k r_1^k \quad (k \geqslant 2), \tag{31}$$

其中 $M_k$ 是一些仅依赖于系统参数的常数.因此为了保证(30)式中有关级数的收敛,$r_1$ 须满足$|r_1|<1$.

情形 3　若存在某个正整数 $n>1$,使得 $r_1 = r_2 = \cdots = r_{2n-1} = 0$,但 $r_{2n} \neq 0$,同情形 2 的处理,此种情形不会出现.

情形 4　若存在某个正整数 $n>1$,使得 $r_1 = r_2 = \cdots = r_{2n} = 0$,但 $r_{2n+1} \neq 0$.此时由(26)式可归纳地推知 $r_{2k} = 0(k>n)$.另一方面,由(26)式中 $k = 2n+1$,可推得

$$T = \frac{2(2n+1)\pi}{\sqrt{-1-b}}, \tag{32}$$

且 $D$ 正好满足(29)式.此外,此时的 Echo 波满足关系式(18).

情形 5　若 $r_k = 0(k=1,2,\cdots)$,此时(19)式有平凡解 $x(t) = z(t) = u^+$.

对负向级数,可进行同样的讨论.

单对正向或负向级数的讨论,只能得到系统(1)的复数解.为了得到实数解,它的一般形式为

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_k e^{\frac{2k\pi i}{T}t}, \\ z_1(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{r_k}{1+\frac{2\pi k i}{T}} e^{\frac{2k\pi i}{T}t}, \\ x_2(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{-k\pi i} r_k e^{\frac{2k\pi i}{T}t}, \\ z_2(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{r_k}{1+\frac{2\pi k i}{T}} (-1)^{-k\pi i} e^{\frac{2k\pi i}{T}t}, \end{aligned} \tag{33}$$

其中 $r_0 = u^+$,$r_k(k \geqslant 2)$由(26)式决定,而 $r_{-k} = r_k$.对 $r_1$,选取$|r_1|<1$,并满足下列方程:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon \frac{d}{dt} |P(t)|^2 = &-3|P(t)|^2[P(t) + \overline{P(t)}] \\ &+ 2(1-\mu-3u^+)|P(t)|^2 \\ &+ f[Q(t)\overline{P(t)} + \overline{Q(t)}P(t)] \\ &+ 2u^+(\mu - fu^+), \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}Q(t) = P(t) - Q(t). \tag{34}$$

这里,$P(t) = \sum_{k \geqslant 1} r_k e^{\frac{2k\pi i}{T}t}$,$Q(t) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{r_k}{1+\frac{2\pi k i}{T}} e^{\frac{2k\pi i}{T}t}$,相应的 Echo 波的周期为 $T = \frac{2\pi}{\sqrt{-1-b}}$,有关参数应满足 $a>1$,$D = \frac{\varepsilon}{2}(a-1)$.另一种形式的 Echo 波为

$$\begin{aligned} x_1(t) &= u^+ + 2\mathrm{Re}(\xi), z_1(t) = u^+ + 2\mathrm{Re}(\eta), \\ x_2(t) &= u^+ - 2\mathrm{Re}(\xi), z_2(t) = u^+ - 2\mathrm{Re}(\eta), \end{aligned} \tag{35}$$

其中 $\xi = \sum_{\substack{k \geqslant 2n+1 \\ k \bmod 2 = 1}} r_k e^{\frac{2k\pi i}{T}t}$,$\eta = \sum_{\substack{k \geqslant 2n+1 \\ k \bmod 2 = 1}} \frac{r_k}{1+\frac{2\pi k i}{T}} e^{\frac{2k\pi i}{T}t}$,而 $r_k(k \geqslant 2n+2)$由(26)式确定,选取 $r_{2n+1}$使$|r_{2n+1}|<1$得,且 $\xi$ 和 $\eta$ 满足形如(34)式的方程.相应的周期为 $T = \frac{2(2n+1)\pi}{\sqrt{-1-b}}$.有关参数仍满足 $a>1$,$D = \frac{\varepsilon}{2}(a-1)$.对这种形式的 Echo 波,明显地满足关系(18).

下面对关系(18)作进一步说明.对一般的耦合系统:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F(X) + K(Y-X), \\ \dot{Y} &= F(Y) + K(X-Y), \end{aligned} \tag{36}$$

其中 $X$,$Y$ 是二维向量,$K$ 为矩阵.若 $F(X)$为奇函数,则由 Coppel[13]的结果知(36)式存在相外解(即 Echo 波),记为$(\widehat{x(t)}, -\widehat{x(t)})^T$,其中$\widehat{x(t)}$为$\frac{dX}{dt} = F(X)$的周期解.明显地关系(18)满足.对于耦合

Oregonator 振子,尽管对应的 $F(X)$ 不是奇函数,但此时的 Echo 波是以它的均匀正定态 $s^+$ 为中心的一条周期轨道. 如果把坐标原点移至 $s^+$ 处,则容易理解此时的 Echo 波中的两个细胞运动在关于原点对称的周期轨道上(它们的相位正好相差半个周期).

由于耦合振子从物理学上可理解为两个耦合的振动摆(即由弹簧联结的两个单摆)[14,15]. 当出现 Echo 波时,两个摆精确地作反向运动. 尽管振动周期有所减少,但由于弹簧的作用,又使得两个摆相协调地周期振动. 而且此时两个摆的位移之和总是为一定常数.

## 3 结 论

已经看到,若 $a>1, D=\frac{\varepsilon}{2}(a-1)$,则系统(1)存在两种类型的 Echo 波,而且 Echo 波中的两个细胞的相位差只能是半个周期. 由于系统(1)在 $s^+$ 处线性化方程的矩阵的特征多项式的四个特征值为

$$\lambda_{1,2}=\frac{a-1\pm\sqrt{(a+1)^2+4(a+b)}}{2},$$

$$\lambda_{3,4}=\frac{a-1-\frac{2D}{\varepsilon}\pm\sqrt{\left(a+1-\frac{2D}{\varepsilon}\right)^2+(b+1)^2}}{2}. \tag{37}$$

当 $a=1$,系统(1)产生 Hopf 分岔. 此时容易证明存在同相波(即两个细胞在同一轨道上周期地运动,且相位差为 0),因此同相波由均匀正定态分岔而来. 当 $D=\frac{\varepsilon}{2}(a-1)$,可想象出(但需要证明),此时 Echo 波或是在同相波的基础上分岔而来(即同相解失去稳定),或是与同相波共存(因为当 $a>1$ 时,对任意的 $D>0$,系统(1)总存在同相波).

从数值计算的结果来看,耦合 Oregonator 振子中的 Echo 波是稳定的,且是唯一的(详见文献[9]中的数值结果). 我们猜想此结果一般地正确,但须严格证明.


[1] V. I. Krinsky, *Biofizika*, **9**(1964), 306.
[2] J. J. Tyson, *J. Phys. Chem.*, **86**(1982), 3006.
[3] J. D. Dockery, J. P Keener, J. J. Tyson, *Phys. D*, **30**(1988), 177.
[4] J. D. Murry, *J. Chem. Phys.*, **61**(1974), 3610.
[5] W. Jahnke, W. E. Skaggs, A. T. Winfree, *J. Phys. Chem.*, **93**(1989), 740.
[6] B. J. Welsh, J. Gomatam, A. E. Burgess, *Nature*, **304**(1983), 611.
[7] V. I. Krinsky, *Biofizika*, **16**(1971), 87.
[8] V. I. Krinsky, A. M. Pertsov, A. V. Reshetilov, *Biofizika*, **17**(1972), 271.
[9] J. J. Tyson, N. Y. Ann, *Acad. Sci.*, **279**(1979), 316.
[10] D. G. Aronson, E. J. Deodell, H. G. Eyherm, *Phys. D*, **25**(1987), 20.
[11] K. Bar-ELI, *Phys. D*, **14**(1985), 242.
[12] R. M Borisyuk, A. B. Kirillov, *Biollogical Cybernetics*, **66**(1992), 319.
[13] W. A. Coppel, Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations, D. C. Heath, Boston, 1965.
[14] P. Wattman, A Second Course in Elementary Differential Equations, (Academic Press INC, 1986).
[15] Suocheng Zhang, Mathematical Theory and Numerical Method on Modern Oscillation Reaction (Henan Science and Technology Press House, 1991), p. 364.


# ECHO WAVES IN THE LINEARLY COUPLED OREGONATORS


ZHOU TIAN-SHOU ZHANG SUO-CHUN

(*Institue of Applied Mathematics*, *Academy of Mathematics and Systerm Sciences*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100080, *China*)



(Received 27 December 1999; revised manuscript received 25 August 2000)



ABSTRACT

This paper gives the conditions of existence of echo wave and the accurate expression of the relative period in the coupled Oregonators and finds that in this system there are two types of echo waves, one of which satisfies the pretty relations $x_1(t)+x_2(t)=2u^+$, $z_1(t)+z_2(t)=2u^+$ (where $u^+$ is a component of the homogeneous positive steady state of the system).



**Keywords**: coupled Oregonators, Echo wave, excitable media, phase

**PACC**: 0340K

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19901034).