第 50 卷 第 1 期 2001 年 1 月
1000-3290/2001/50(1)/0013-08

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 50, No. 1, January, 2001

具有广义 Virasoro 对称代数的(3+1)维 Painlevé 可积模型*

林 机 汪克林

(中国科学技术大学非线性中心,合肥 230026)

(2000 年 4 月 29 日收到;2000 年 6 月 6 日收到修改稿)

寻找高维可积模型(特别是 3+1 维可积模型)是非线性物理中的一个非常重要的问题. 建立了一种利用广义 Virasoro 对称性的高维实现首先找到了一些(3+1)维 Virasoro 可积模型,并证明(3+1)维 Virasoro 可积模型均具有 Kac-Moody-Virasoro 对称代数. 更进一步,利用 Weiss-Tabor-Carnevale 的奇性分析方法,证明了其中一个 Virasoro 可积模型也是 Painlevé 可积的.

关键词:广义 Virasoro 代数, Painlevé 性质, (3+1)维可积模型

PACC:0340K, 0230J, 0365G

1 引 言

由于在物理领域(如凝聚态物理,经典和量子场论,光学等)化学,生物和通讯等领域的广泛应用,孤子理论和实验的研究已引起物理学家和教学家的极大兴趣,特别地,对(1+1)和(2+1)维系统已作了深入地研究[1—5],得到了可积模型的众多性质(如具有无穷多对称,Lax 对,Painlevé 性质,多孤子解等). 可是,我们知道,实际的物理空间是(3+1)维甚至是更高维的,人们希望对高维孤子理论也能作一些有益地研究,虽然在这方面已作了一些工作,但进展不大[6]. 目前理论界对高维(大于(2+1)维)情况下的可积模型知之甚少. 除了(2+2)维的自对偶 Yang-Mills[1,7]和一些条件可积模型[8—10]之外,人们还未找到大于(2+1)维的真正的完全可积模型. 近来,楼森岳对如何寻找高维可积模型从多方面进行了有益的探讨:1)对于(1+1)维可积体系,如果知道了体系的强对称算子(或称递推算子),就可以得到体系的无穷多对称和守恒量、双 Hamilton 结构及 Lax 对等可积性质;同时,利用(1+1)维的强对称算子,可以方便地得到一类(2+1)维可积模型[11—13],根据这种思想,从任何一个(1+1)维的强对称算子出发,人们可以得到一类特殊的高维(大于(2+1)维)可积模型[14]. 2)对于任意可积模型,存在无穷多对称和守恒量,事实上,KdV 方程的无穷多对称对应于其 Schwartz 形式的无穷维解空间的共形不变性(Möbious 变换不变性),也就是说,Schwartz KdV 方程的共形不变性对应于 KdV 方程的无穷多对称. 同样地,从 Schwartz KP 方程的共形不变性可导出 KP 方程一类无穷多对称. 从具有共形不变性的 Schwartz 形式出发,可以得到众多在具有 Painlevé 性质意义下的高维可积模型[15]. 3)对(2+1)维可积方程的对称性分析发现,不同的可积模型具有不同的 Kac-Moody-Virasoro(KMV)对称代数,但它们都具有相同的 Virasoro 李对称代数;而所有已知的(2+1)维不可积方程都不具有 Virasoro 对称代数. 因此,楼森岳等[16]提出对高维模型,如果它具有 Virasoro 对称代数,称它是在此意义下可积的. 从 Virasoro 对称代数出发,利用各种不同的实现,得到了众多的具有 Virasoro 对称代数意义下的高维可积模型[17,18]. 然而,到目前为止,从以上不同方法出发而得到的高维(大于(2+1)维)模型只是在特定意义下是可积的,如从具有共形不变性的 Schwartz 形式方程出发,得到的高维模型只是在具有 Painlevé 性质形式意义下可积. 我们知道,对于(1+1)维和(2+1)维的可积模型,总是具有多种可积性质. 因此,希望能找到由以上方法得到的高维模型也具有其他可积性质. 本文从广义 Virasoro 对称代数出发,选择适当的对称实现,得到了一些具有 KMV 对称代数性质

* 国家杰出青年科学基金(批准号:19925522)资助的课题.

和 Painlevé 性质的高维模型.

2 一般理论

广义 Virasoro 对称代数形式为

$$[\sigma(f_1),\sigma(f_2)] = \sigma(\dot{f}_2 f_1 - \dot{f}_1 f_2), \tag{1}$$

其中 f_1 和 f_2 是关于某一独立变量的任意函数,如时间 t,函数 f_1 和 f_2 上的点表示此独立变量对函数 f 的导数,$\sigma(f)$是在广义 Virasoro 对称代数意义下可积模型的对称.

为了获得关于 Virasoro 对称代数(1)式的 k 阶群不变偏微分方程,首先应用定义在空间 $X \otimes U$(X 是自变量空间,U 为应变量空间)上的向量场来实现李对称代数(1)式,本文主要是研究(3+1)维的模型,限制 X 为四维时空,相应的坐标是 x,y,z,t,U 是实标量函数 $u(x,y,z,t)$空间.广义向量场可表为

$$\begin{aligned} V = {}& X(x,y,z,t,u)\partial_x + Y(x,y,t,u)\partial_y \\ & + Z(x,y,t,u)\partial_z + T(x,y,t,u)\partial_t \\ & + U(x,y,t,u)\partial_u . \end{aligned} \tag{2}$$

为了实现李代数(1)式,选择(1)式中的 f 是关于 t 的函数,限制 T,X,Y,Z 和 U 为

$$\begin{aligned} & T = f(t), \\ & \{X,Y,Z,U\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} f^{(i)} X_i, \sum_{i=1}^{n} f^{(i)} Y_i, \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^{n} f^{(i)} Z_i, \sum_{i=1}^{n} f^{(i)} U_i \right\}, \\ & n = 1,2,3,\cdots, \end{aligned} \tag{3}$$

其次还必须给出标量函数 u 的各阶偏导数 u_x,u_y,$\cdots u_{x^i y^j z^m}$,$\cdots$的所有扩张(extension).k 级延长结构的一般形式[19]

$$\begin{aligned} pr^k V = {}& V + U^x \partial_{u_x} + U^y \partial_{u_y} + U^z \partial_{u_z} + U^t \partial_{u_t} \\ & + \cdots + \sum_{1 \leqslant i+j+m+n \leqslant k} U^{x^i y^j z^m t^n} \partial_{u_{x^i y^j z^m t^n}}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} U^x = {}& D_x(U - Xu_x - Yu_y - Zu_z - Tu_t) \\ & + Xu_{xx} + Yu_{xy} + Zu_{xz} + Tu_{xt}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} U^y = {}& D_y(U - Xu_x - Yu_y - Zu_z - Tu_t) \\ & + Xu_{xy} + Yu_{yy} + Zu_{yz} + Tu_{yt}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} U^z = {}& D_z(U - Xu_x - Yu_y - Zu_z - Tu_t) \\ & + Xu_{xz} + Yu_{yz} + Zu_{zz} + Tu_{zt}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} U^t = {}& D_t(U - Xu_x - Yu_y - Zu_z - Tu_t) \\ & + Xu_{xt} + Yu_{yt} + Zu_{zt} + Tu_{tt}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} U^{x^i y^j z^m t^n} = {}& D_x U^{x^{i-1} y^j z^m t^n} - (D_x X) u_{x^i y^j z^m t^n} \\ & - (D_x Y) u_{x^{i-1} y^{j+1} z^m t^n} - (D_x Z) u_{x^{i-1} y^j z^{m+1} t^n} \\ & - (D_x T) u_{x^{i-1} y^j z^m t^{n+1}}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} U^{x^i y^j z^m t^n} = {}& D_y U^{x^i y^{j-1} z^m t^n} - (D_y X) u_{x^{i+1} y^{j-1} z^m t^n} \\ & - (D_y Y) u_{x^i y^j z^m t^n} - (D_y Z) u_{x^i y^{j-1} z^{m+1} t^n} \\ & - (D_x T) u_{x^i u^{j-1} z^m t^{n+1}}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} U^{x^i y^j z^m t^n} = {}& D_z U^{x^i y^j z^{m-1} t^n} - (D_z X) u_{x^{i+1} y^j z^{m-1} t^n} \\ & - (D_z Y) u_{x^i y^{j+1} z^{m-1} t^n} - (D_z Z) u_{x^i y^j z^m t^n} \\ & - (D_z T) u_{x^i u^j z^{m-1} t^{n+1}}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} U^{x^i y^j z^m t^n} = {}& D_t U^{x^i y^j z^m t^{n-1}} - (D_t X) u_{x^{i+1} y^j z^m t^{n-1}} \\ & - (D_t Y) u_{x^i y^{j+1} z^m t^{n-1}} - (D_t Z) u_{x^i y^j z^{m+1} t^{n-1}} \\ & - (D_t T) u_{x^i y^j z^m t^n}, \end{aligned} \tag{12}$$

其中 D_x,D_y,D_z 和 D_t 是全微分.对于每个满足 Virasoro 李代数(1)式的对称,利用(5)—(12)式,即可求得相应的 k 级扩张,群不变量方程的一般形式为

$$\Delta(x,y,z,t,u,u_x,u_y,u_z,u_t,\cdots,u_{x^i y^j z^m t^n},\cdots) = 0, \tag{13}$$

其中函数 Δ 满足

$$pr^{(k)} V \cdot \Delta = 0. \tag{14}$$

接着要做的是寻找(14)式的用自变量 x,y,z,t 和应变量 u 表示的特征解,从特征解中可得到一组积分不变量 $I_r(x,y,z,t,u,\cdots,u_{x^i y^j z^p t^q})$,$(1 \leqslant i + j + p + q \leqslant k, r = 1,2,3,\cdots)$因此群不变量方程(13)式可改写成

$$H(I_1,I_2,I_3,\cdots,I_r,\cdots) = 0. \tag{15}$$

要获得所有的不变量,仅仅需求解下列特征方程:

$$\frac{\mathrm{d}t}{f} = \frac{\mathrm{d}x}{X} = \frac{\mathrm{d}y}{Y} = \frac{\mathrm{d}z}{Z} = \frac{\mathrm{d}u}{U} = \cdots = \frac{\mathrm{d}u_{x^i y^j z^m t^r}}{U^{x^i y^j z^m t^r}} = \cdots \tag{16}$$

具体地,将向量场 V 的各级扩张代入(16)式,然后进行简单的积分计算,就可得到众多的积分不变量,再由不变量方程即能得到一般的群不变量方程,一般地,这样得到的不变量方程往往是与 f 相关的.为了得到在具有广义 Virasoro 对称代数意义下可积的(3+1)维方程,必须从中找出与 f 无关的群不变量方程.我们知道,满足广义 Virasoro 对称代数(1)式的具体实现有很多,对于不同的具体实现,总是能得到相应的不变量和不变量方程的.

3 Virasoro 对称代数的具体实现及其群不变量方程

为了得到具体的群不变量方程,我们选择以下

三种不同的满足对称代数(1)式的具体实现.

3.1　实现一

$$\begin{aligned}\sigma_1 = V_1 = {}& f(t)\partial_t + (c_2 x\dot f + c_5\ddot f)\partial_x + c_3 y\dot f\,\partial_y \\ & + c_4 z\dot f\,\partial_z + (c_1 u\dot f + c_6 xyz^2\ddot f)\partial_u,\end{aligned}\qquad(17)$$

其中 c_1,c_2,c_3 和 c_4 满足 $c_2+c_4+c_3-c_1=1$,$c_2=-1$(如果 $c_5\neq 0$),根据上节的方法,利用(5)—(12)式,计算出(4)式中的相应的各级扩张,实现 σ_1 的 k 级延长结构为

$$\begin{aligned}pr^k V_1 = {}& V_1 + [(c_1-c_2)\dot f\, u_x + c_6 yz^2\ddot f]\partial_{u_x} \\
& + [(c_1-c_3)\dot f\, u_y + c_6 xz^2\ddot f]\partial_{u_y} \\
& + [(c_1-c_4)\dot f\, u_z + 2c_6 xyz\ddot f]\partial u_z \\
& + [(c_1-1)\dot f\, u_t + (c_1 u - c_2 x u_x - c_3 y u_y \\
& - c_4 z u_z)\ddot f + (-c_5 u_x + c_6 xyz^2) f^{(3)}]\partial_{u_t} \\
& + [(c_1-c_2-1)\dot f\, u_{xt} + ((c_1-c_2)u_x \\
& - c_2 x u_{xx} - c_3 y u_{xy} - c_4 z u_{xz})\ddot f \\
& + (c_6 yz^2 - c_5 u_{xx}) f^{(3)}]\partial_{u_{xt}} \\
& + [(c_1-c_3-1)\dot f\, u_{yt} + ((c_1-c_3)u_y \\
& - c_2 x u_{xy} - c_3 y u_{yy} - c_4 z u_{yz})\ddot f \\
& + (c_6 xz^2 - c_5 u_{xy}) f^{(3)}]\partial_{u_{yt}} \\
& + [(c_1-c_4-1)\dot f\, u_{zt} + ((c_1-c_4)u_z \\
& - c_2 x u_{xz} - c_3 y u_{yz} - c_4 z u_{zz})\ddot f \\
& + (2c_6 xyz - c_5 u_{xz}) f^{(3)}]\partial_{u_{zt}} \\
& + [(c_1-c_2-c_3)\dot f\, u_{xy} + c_6 z^2\ddot f]\partial_{u_{xy}} \\
& + [(c_1-c_2-c_4)\dot f\, u_{xz} + 2c_6 yz\ddot f]\partial_{u_{xz}} \\
& + [(c_1-c_3-c_4)\dot f\, u_{yz} + 2c_6 xz\ddot f]\partial_{u_{yz}} \\
& + \sum_{n=2}^{k}(c_1 - nc_2)\dot f\, u_{nx}\partial_{u_{nx}} \\
& + \sum_{n=2}^{k}(c_1 - nc_3)\dot f\, u_{ny}\partial_{u_{ny}} \\
& + \sum_{n=3}^{k}(c_1 - nc_4)\dot f\, u_{nz}\partial_{u_{nz}} \\
& + [(c_1-2c_4)\dot f\, u_{zz} + 2c_6 xy\ddot f]\partial_{u_{zz}} \\
& + [(c_1-c_2-c_3-c_4)\dot f\, u_{xyz} + c_6\ddot f]\partial_{xyz} \\
& + [(c_1-c_2-c_3-2c_4)u_{xyzz}\dot f + 2c_6\ddot f]\partial_{u_{xyzz}} \\
& + \sum_{3\leqslant n+m+r\leqslant k}(c_1 - nc_2 - mc_3 - rc_4)\dot f\, u_{x^n y^m z^r}\partial_{u_{x^n y^m z^r}} \\
& + [(c_1-2c_2-1)u_{xxt}\dot f - ((2c_2-c_1)u_{xx} \\
& + c_2 x u_{xxx} + c_3 y u_{xxy} + c_4 z u_{xxz})\ddot f - c_5 u_{xxx} f^{(3)}]\partial_{u_{xxt}} \\
& + [(c_1-c_2-c_3-1)u_{xyt}\dot f - ((c_2+c_3-c_1)u_{xy} \\
& + c_2 x u_{xxy} + c_3 y u_{xyy} + c_4 z u_{xyz})\ddot f + (c_6 z^2 \\
& - c_5 u_{xxy}) f^{(3)}]\partial_{u_{xyt}} + [(c_1-c_2-c_4-1)u_{xzt}\dot f \\
& - ((c_2+c_4-c_1)u_{xz} + c_2 x u_{xxz} + c_3 y u_{xyz} \\
& + c_4 z u_{xzz})\ddot f + (2c_6 yz - c_5 u_{xxz}) f^{(3)}]\partial_{u_{xzt}} \\
& + [(c_1-c_3-c_4-1)u_{yzt}\dot f - ((c_3+c_4-c_1)u_{yz} \\
& + c_2 x u_{xyz} + c_3 y u_{yyz} + c_4 z u_{yzz})\ddot f \\
& + (2c_6 xz - c_5 u_{xyz}) f^{(3)}]\partial_{u_{yzt}} \\
& + [(c_1-c_2-c_3-c_4-1)u_{xyzt}\dot f \\
& - ((c_2+c_3+c_4-c_1)u_{xyz} + c_2 x u_{xxyz} \\
& + c_3 y u_{xyyz} + c_4 z u_{xyzz})\ddot f \\
& + (2c_6 z - c_5 u_{xxyz}) f^{(3)}]\partial_{u_{xyzt}} \\
& + [(c_1-c_2-c_3-2c_4)u_{xyzzt}\dot f \\
& - ((c_2+c_3+2c_4-c_1)u_{xyzz} \\
& + c_2 x u_{xxyzz} + c_3 y u_{xyyzz} + c_4 z u_{xyzzz})\ddot f \\
& + (2c_6 - c_5)u_{xxyzz}) f^{(3)}]\partial_{u_{xyzzt}} \\
& + \sum_{3\leqslant n+m+r\leqslant k-1}[(c_1 - nc_2 - mc_3 - rc_4 \\
& - 1)\dot f\, u_{x^n y^m z^r t} - (c_2 x u_{x^{n+1} y^m z^r} + c_3 y u_{x^n y^{m+1} z^r} \\
& + c_4 z u_{x^n y^m z^{r+1}} + (c_1 + nc_2 + mc_3 + rc_4)u_{x^n y^m z^r})\ddot f \\
& - c_5 u_{x^{n+1} y^m z^r} f^{(3)}]\partial_{u_{x^n y^m z^r t}} \\
& + \text{terms of higher order } t - \text{derivatives}.\end{aligned}\qquad(18)$$

然后,将(18)式中的相应的各级扩张代入(16)式,求解特征方程,可以得到所有的不变量.以下给出了一些本文要用到的群不变量:

$$I_1 = xf^{-c_2} - c_5\dot f,\ I_2 = yf^{-c_3},\ I_3 = zf^{-c_4},\qquad(19)$$

$$I_4 = uf^{-c_1} - c_6 I_1 I_2 I_3^2\dot f - \frac{1}{2}c_5 c_6 I_2 I_3^2\dot f^2,$$

$$I_5 = u_x f^{c_2-c_1} - c_6 I_2 I_3^2\dot f,\qquad(20)$$

$$I_6 = u_y f^{-c_1+c_3} - c_6 I_1 I_3^2\dot f - \frac{1}{2}c_5 c_6 I_3^2\dot f^2,$$

$$I_7 = u_z f^{-c_1+c_4} - 2c_6 I_1 I_2 I_3\dot f - \frac{1}{2}c_5 c_6 I_2 I_3\dot f^2,\qquad(21)$$

$$
\begin{aligned}
I_8 &= u_t f^{1-c_1} + \dot f\left(-c_1 I_4 + c_2 I_1 I_5 + c_3 I_2 I_6 \right.\\
&\quad \left. + c_4 I_3 I_7\right) - \left(c_6 I_1 I_2 I_3^2 - c_5 I_5\right)\left(f\ddot f - \dot f^2\right),\\
I_9 &= u_{xx} f^{2c_2-c_1}, \qquad (22)\\
I_{10} &= u_{xy} f^{-c_1+c_2+c_3} - \dot f\, c_6 I_3^2,\\
I_{11} &= u_{xz} f^{-c_1+c_2+c_4} - 2\dot f\, c_6 I_2 I_3,\\
I_{12} &= u_{yy} f^{-c_1+2c_3}, \qquad (23)\\
I_{13} &= u_{yz} f^{-c_1+c_3+c_4} - 2c_6 I_1 I_3 \dot f - \frac{1}{2} c_5 c_6 I_3 \dot f^2,\\
I_{14} &= u_{zz} f^{2c_4-c_1} - 2c_6 I_1 I_2 \dot f - \frac{1}{2} c_5 c_6 I_2 \dot f^2, \qquad (24)\\
I_{15} &= u_{xt} f^{c_2+1-c_1} + \left[\left(c_2 - c_1\right) I_5 \right.\\
&\quad \left. + c_2 I_1 I_9 + c_3 I_2 I_{10} + c_4 I_3 I_{11}\right] \dot f\\
&\quad - \left(c_6 I_2 I_3^2 - c_5 I_9\right)\left(f\ddot f - \dot f^2\right), \qquad (25)\\
I_{16} &= u_{xyz} f^{c_2+c_3+c_4-c_1} - 2c_6 I_3 \dot f,\\
J_n^x &= u_{x^n} f^{-c_1+nc_2},\ J_n^y = u_{y^n} f^{-c_1+nc_3},\\
J_n^z &= u_{z^n} f^{-c_1+nc_4},\ (n \geqslant 3), \qquad (26)\\
J_{nmr} &= u_{x^n y^m z^r} f^{-c_1+nc_2+mc_3+rc_4},\\
&\quad (n+m+r \geqslant 3, \text{except for } n = m\\
&\quad = r = 1, n = m = 1/2 r = 1), \qquad (27)\\
I_{17} &= u_{xxt} f^{1-c_1+2c_2} + \left(\left(2c_2 - c_1\right) I_9 + c_2 I_1 J_3^x \right.\\
&\quad \left. + c_3 I_2 J_{210} + c_4 I_3 J_{201}\right) \dot f + c_5 J_3^x \left(f\ddot f - \dot f^2\right),\\
&\qquad (28)\\
I_{18} &= u_{xxxt} f^{1-c_1+3c_2} + \left(\left(3c_2 - c_1\right) J_3^x + c_2 I_1 J_4^x \right.\\
&\quad \left. + c_3 I_2 J_{310} + c_4 I_3 J_{301}\right) \dot f + c_5 J_4^x \left(f\ddot f - \dot f^2\right),\\
&\qquad (29)\\
I_{19} &= u_{xxyt} f^{1-c_1+2c_2+c_3} + \left(\left(2c_2 + c_3 \right.\right.\\
&\quad \left. - c_1\right) J_{210} + c_2 I_1 J_{310} + c_3 I_2 J_{220}\\
&\quad \left. + c_4 I_3 J_{211}\right) \dot f + c_5 J_{310}\left(f\ddot f\right), \qquad (30)\\
I_{20} &= u_{xxzt} f^{1-c_1+3c_2+c_4} + \left(\left(3c_2 + c_4 \right.\right.\\
&\quad \left. - c_1\right) J_{201} + c_2 I_1 J_{301} + c_3 I_2 J_{211}\\
&\quad \left. + c_4 I_3 J_{202}\right) \dot f + c_5 J_{301}\left(f\ddot f\right), \qquad (31)\\
I_{21} &= u_{xyzz} f^{-c_1+c_2+c_3+2c_4} - 2c_6 \dot f,\\
I_{22} &= u_{xzz} f^{-c_1+c_2+2c_4} - 2c_6 \dot f\, I_2, \qquad (32)\\
I_{23} &= u_{yzz} f^{-c_1+c_3+2c_4} - 2c_6 I_1 \dot f - c_5 c_6 \dot f^2. \qquad (33)
\end{aligned}
$$

将以上的群不变量(19)—(33)式代入不变量方程(15),原则上可以获得许许多多具有 Virasoro 对称代数的不变量方程,然而,通常情况下得到的不变量方程是与 f 相关的.根据文献[16]的一般理论,具有 Virasoro 代数(1)式的可积模型应该是与 f 无关的,但要从与 f 有复杂关系的群不变量的组合来得到与 f 无关的不变量方程是不容易的.下面仅给出三种与 f 无关的(3+1)维 Virasoro 可积方程:

(i)如果让 $A = \dfrac{2c_2 - c_1}{2c_6}$,$C = \dfrac{c_3}{2c_6}$,$D = \dfrac{c_4}{2c_6}$,$B = -\dfrac{3c_2 - c_1}{2c_6}$,**从 V_1 不变方程**

$$
\begin{aligned}
&I_{17} J_4^x - I_{18} J_3^x + A I_9 I_{21} J_4^x + B I_{21} J_3^x J_3^x\\
&+ C I_{22} J_4^x J_{210} + D I_{16} J_4^x J_{201} - C I_{22} J_3^x J_{310}\\
&- D I_{16} J_3^x J_{301} = 0. \qquad (34)
\end{aligned}
$$

我们能得到与 f 无关的不变量方程

$$
\begin{aligned}
&2c_6\left(u_{xxt} u_{xxxx} - u_{xxxt} u_{xxx}\right) + \left(2c_2 - c_1\right) u_{xx} u_{xxxx} u_{xyzz}\\
&- \left(3c_2 - c_1\right) u_{xyzz} u_{xxx}^2 + c_3 u_{xzz}\left(u_{xxy} u_{xxxx} - u_{xxxy} u_{xxx}\right)\\
&+ c_4 u_{xyz}\left(u_{xxxx} u_{xxz} - u_{xxxz} u_{xxx}\right) = 0, \qquad (35)
\end{aligned}
$$

其中 c_1,c_3,c_4 和 c_6 是任意常数.相应的 Virasoro 对称为

$$
\begin{aligned}
\sigma &= f(t)\partial_t + \left(c_2 x \dot f + c_5 \ddot f\right)\partial_x + c_3 y \dot f\, \partial_y\\
&\quad + c_4 z \dot f\, \partial_z + \left(c_1 u \dot f + c_6 xyz^2 \ddot f\right)\partial_u. \qquad (36)
\end{aligned}
$$

(ii)如果选择 $A = \dfrac{-c_1 + 2c_2 + c_3}{2c_6}$,$B = -\dfrac{c_4 - c_1 + 2c_2}{2c_6}$,$C = \dfrac{c_3}{2c_6}$,$D = \dfrac{c_4}{2c_6}$,**有不变量方程**

$$
\begin{aligned}
&2c_6\left(u_{xxyt} u_{xxxz} - u_{xxzt} u_{xxxy}\right) + \left(2c_2 + c_1\right.\\
&\left. - c_3\right) u_{xyzz} u_{xxy} u_{xxxz} - \left(2c_2 + c_4 - c_1\right) u_{xyz} u_{xxz} u_{xxxy}\\
&+ c_3 u_{xzz}\left(u_{xxyy} u_{xxxz} - u_{xxyz} u_{xxxy}\right)\\
&+ c_4 u_{xyz}\left(u_{xxyz} u_{xxxz} - u_{xxzz} u_{xxxy}\right) = 0, \qquad (37)
\end{aligned}
$$

其相应的 V_1 不变量方程是

$$
\begin{aligned}
&I_{19} J_{301} - I_{20} J_{310} + A I_{21} J_{210} J_{301} + B I_{21} J_{201} J_{310}\\
&+ C I_{22} J_{301} J_{220} - C I_{22} J_{211} J_{310} + D I_{16} J_{301} J_{211}\\
&- D I_{16} J_{202} J_{310} = 0. \qquad (38)
\end{aligned}
$$

(iii)若取 $c_5 = 0$,$D = A + B - 2C - 1/2c_6$,**从**

$$
I_{17} + A I_{21} I_9 + B I_{22} J_{210} + C I_{16} J_{201} + D I_{23} J_3^x = 0 \qquad (39)
$$

得到与 f 无关的群不变量方程

$$
\begin{aligned}
&u_{xxt} + A u_{xyzz} u_{xx} + B u_{xzz} u_{xxy} + C u_{xyz} u_{xxz}\\
&+ \left(A + B - 2C - 1/2c_6\right) u_{yzz} u_{xxx} = 0, \qquad (40)
\end{aligned}
$$

其中 A,B,C 为任意常数.相应的具有 Virasoro 对称代数的对称为

$$
\sigma = f(t)\partial_t + \left(2c_6\left(A + B - 2C\right) - 1\right) x \dot f\, \partial_x
$$

$$+2c_6Byf\dot{}\,\partial_y+2c_6Czf\dot{}\,\partial_z+((2c_6(A+2B-4C)-2)u\dot{f}+c_6xyz^2\ddot{f})\partial_u. \quad (41)$$

3.2　实现二

选择满足代数(1)式的第二个对称为

$$\sigma=V_2=-f(t)\partial_t-(c_2x\dot{f}+c_5\ddot{f})\partial_x-c_3y\dot{f}\,\partial_y-c_4z\dot{f}\,\partial_z+(c_1u\dot{f}+c_6x\ddot{f}+c_7yz^2\ddot{f}+c_8f^{(3)})\partial_u, \quad (42)$$

其中系数满足 $c_1+c_3+2c_4=1$, $c_2=-1$(如果 $c_5, c_8\neq0$)关系, c_6, c_7 为任意常数. 类似以上的计算过程,可以方便地得到众多的群不变量:

$$I_1=xf^{c_2}-c_5\dot{f},\ I_2=yf^{c_3},\ I_3=zf^{c_4}, \quad (43)$$

$$I_4=uf^{c_1}+(c_6I_1+c_7I_2I_3^2)\dot{f}+\frac{1}{2}c_5c_6\dot{f}^2+c_8(f\ddot{f}-1/2\dot{f}^2),\ I_5=u_xf^{c_2+c_1}+c_6\dot{f}, \quad (44)$$

$$I_6=u_yf^{c_1+c_3}+c_7I_3^2\dot{f},$$

$$I_7=u_zf^{c_1+c_4}+2c_7I_2I_3\dot{f}, \quad (45)$$

$$I_8=u_{xx}f^{c_1+2c_2},\ I_9=u_{xy}f^{c_1+c_2+c_3},$$

$$I_{11}=u_{xz}f^{c_1+c_2+c_4},\ I_{12}=u_{yy}f^{c_1+2c_3}, \quad (46)$$

$$I_{13}=u_{yz}f^{c_1+c_3+c_4}+2c_7I_3\dot{f},$$

$$I_{14}=u_{zz}f^{2c_4+c_1}+2c_7I_2\dot{f}, \quad (47)$$

$$I_{15}=u_{xt}f^{c_2+1+c_1}+[(c_2+c_1)I_5+c_2I_1I_8+c_3I_2I_9+c_4I_3I_{11}]\dot{f}+(c_6+c_5I_8)(f\ddot{f}-\dot{f}^2), \quad (48)$$

$$J_n^x=u_{x^n}f^{c_1+nc_2},\ J_n^y=u_{y^n}f^{c_1+nc_3},$$

$$J_n^z=u_{z^n}f^{c_1+nc_4},\ (n\geqslant3),$$

$$I_{16}=u_{yzz}f^{c_1+c_3+2c_4}+2c_7\dot{f}, \quad (49)$$

$$J_{nmr}=u_{x^ny^mz^r}f^{c_1+nc_2+mc_3+rc_4},$$

$$(n+m+r\geqslant3,\text{except for } m=1/2r=1), \quad (50)$$

$$I_{17}=u_{xxt}f^{1+c_1+2c_2}+((2c_2+c_1)I_8+c_2I_1J_3^x+c_3I_2J_{210}+c_4I_3J_{201})\dot{f}+c_5J_3^x(f\ddot{f}-\dot{f}^2), \quad (51)$$

$$I_{18}=u_{xxxt}f^{1+c_1+3c_2}+((3c_2+c_1)J_3^x+c_2I_1J_4^x+c_3I_2J_{310}+c_4I_3J_{301})\dot{f}+c_5J_4^x(f\ddot{f}-\dot{f}^2),\cdots. \quad (52)$$

将这些群不变量代入(15)式,我们同样能找到许多与 f 无关的不变量方程,这里只给出一个例子:

$$I_{18}J_3^x-I_{17}J_4^x+aI_{14}J_{310}J_3^x+bI_{13}J_{301}J_3^x+cI_5J_3^xJ_3^x+dI_5I_8J_4^x-aI_{14}J_{210}J_4^x-bI_{13}J_{201}J_4^x=0, \quad (53)$$

选择(53)式中的系数为 $a=-c_3/2c_7$, $b=-c_4/2c_7$, $c=-(c_1+3c_2)/c_6$ 和 $d=(c_1+2c_2)/c_6$,即可有(3+1)维不变量方程

$$u_{xxxt}u_{xxx}-u_{xxt}u_{xxxx}+\frac{c_1+2c_2}{c_6}u_xu_{xx}u_{xxxx}-\frac{c_1+3c_2}{c_6}u_xu_{xxx}^2+\frac{c_3}{c_7}u_{zz}(u_{xxy}u_{xxxx}-u_{xxxy}u_{xxx})+\frac{c_4}{c_7}u_{yz}(u_{xxxz}u_{xxx}-u_{xxz}u_{xxxx})=0. \quad (54)$$

3.3　实现三

进一步地选择满足 Virasoro 型代数(1)式的较为复杂的对称形式

$$\sigma=V_3=-f(t)\partial_t-(c_2x\dot{f}+(c_5y^2+c_9z^2)\ddot{f})\partial_x-c_3y\dot{f}\,\partial_y-c_4z\dot{f}\,\partial_z+(c_1u\dot{f}+c_6x\ddot{f}+(c_8y^2+c_{10}z^2)f^{(3)})\partial_u, \quad (55)$$

其中 c_1, c_2, c_3 和 c_4 满足 $c_1+c_2=1$, $c_1+2c_3=2$, $c_1+2c_4=2$,而 c_5, c_6, c_8, c_9 和 c_{10} 是任意常数. 根据求不变量方程的一般方法,通过较为复杂的积分运算,仍然可以得到 k 级扩张的相应的积分不变量(这里仅列出一部分):

$$I_1=xf^{c_2}-(c_5I_2^2+c_9I_3^2)\dot{f},\ I_2=yf^{c_3},\ I_3=zf^{c_4}, \quad (56)$$

$$I_4=uf^{c_1}+c_6I_1\dot{f}+\frac{1}{2}c_6(c_5I_2^2+c_9I_3^2)\dot{f}^2+(c_8I_2^2+c_{10}I_3^2)(f\ddot{f}-\dot{f}^2),$$

$$I_5=u_xf^{c_2+c_1}+c_6\dot{f}, \quad (57)$$

$$I_6=u_{xx}f^{2c_2+c_1},\ I_7=u_{xy}f^{c_1+c_2+c_3}+2c_5I_2I_6\dot{f},$$

$$I_8=u_{xz}f^{c_1+c_2+c_4}+2c_9I_3I_6\dot{f}, \quad (58)$$

$$I_9=u_{zz}f^{2c_4+c_1}+(4c_9I_3I_8+2c_9I_5)\dot{f}-(c_6c_9+4c_9^2I_3^2I_6)\dot{f}^2+2c_{10}(f\ddot{f}-\dot{f}^2), \quad (59)$$

$$I_{10}=u_{yy}f^{c_1+2c_3}+(4c_5I_2I_7+2c_5I_5)\dot{f}-(c_5c_6+4c_5^2I_2^2I_6)\dot{f}^2+2c_8(f\ddot{f}-\dot{f}^2), \quad (60)$$

$$I_{11}=u_{xt}f^{c_2+1+c_1}+[(c_2+c_1)I_5+c_2I_1I_6+c_3I_2I_7+c_4I_3I_8]\dot{f}+(c_6+(c_5I_2^2$$

$$+ c_9 I_3^2) I_6)(f\ddot{f} - \dot{f}^2), \tag{61}$$

$$I_{12} = u_{xxz} f^{2c_2+c_4+c_1} + 2c_9 I_3 I_3^x \dot{f},$$

$$I_{13} = u_{xxy} f^{2c_2+c_3+c_1} + 2c_5 I_2 J_3^x \dot{f},$$

$$J_x^{\,n} = u_{x^n} f^{-c_1+nc_2}, (n \geqslant 3), \tag{62}$$

$$I_{14} = u_{xxt} f^{1+c_1+2c_2} + ((2c_2 + c_1) I_6 + c_2 I_1 J_3^x + c_3 I_2 I_{13} + c_4 I_3 I_{12})\dot{f} + (c_5 I_2^2 + c_9 I_3^2) J_3^x (f\ddot{f} - \dot{f}^2), \tag{63}$$

$$I_{15} = u_{xyy} f^{c_1+c_2+2c_3} + (4c_5 I_2 I_{13} + 2c_5 I_6)\dot{f} - 4c_5^2 I_2^2 J_3^x \dot{f}^2, \tag{64}$$

$$I_{16} = u_{xzz} f^{c_1+c_2+2c_4} + (4c_9 I_3 I_{12} + 2c_9 I_6)\dot{f} - 4c_9^2 I_3^2 J_3^x \dot{f}^2, \tag{65}$$

$$I_{17} = u_{xxxy} f^{c_1+3c_2+c_3} + 2c_5 I_2 J_4^x \dot{f},$$

$$I_{18} = u_{xxxz} f^{c_1+3c_2+c_4} + 2c_9 I_3 J_4^x \dot{f}, \tag{66}$$

$$I_{19} = u_{xxyy} f^{c_1+2c_2+2c_3} + (4c_5 I_2 I_{17} + 2c_5 J_3^x)\dot{f} - 4c_5^2 I_2^2 J_4^x \dot{f}^2, \tag{67}$$

$$I_{20} = u_{xxzz} f^{c_1+2c_2+2c_4} + (4c_9 I_3 I_{18} + 2c_9 J_3^x)\dot{f} - 4c_9^2 I_3^2 J_4^x \dot{f}^2, \tag{68}$$

$$I_{21} = u_{xxxt} f^{1+c_1+3c_2} + ((3c_2 + c_1) J_3^x + c_2 I_1 J_4^x + c_3 I_2 I_{17} + c_4 I_3 I_{18})\dot{f} + (c_5 I_2^2 + c_9 I_3^2) J_4^x (f\ddot{f} - \dot{f}^2). \tag{69}$$

将群不变量(56)—(69)式代入不变量方程(16)式,可以得到一些与 f 无关的(3+1)维具有 Virasoro 代数的可积模型,例如

$$u_{xxt}u_{xxxx} - u_{xxx}u_{xxxt} + Au_x u_{xx} u_{xxxx} + (1 + A) u_x u_{xxx}^2 + C(u_{xxzz}u_{xxx} + u_{xzz}u_{xxxx} - 2u_{xxz}u_{xxxz}) + D(u_{xyy}u_{xxxx} + u_{xxyy}u_{xxx} - 2u_{xxxy}u_{xxy}) = 0, \tag{70}$$

其中 A,C,和 D 是任意常数 和

$$u_{xt} + auu_{xx} + cu_{yy} + cu_{zz} = 0, \tag{71}$$

其中 a 和 c 为任意常数.

4 Painlevé 性质分析

检验一个高维模型是否具有 Painlevé 性质,利用由 Weiss,Tabor,Carnevale[20] 提出的所谓的 WTC 分析方法是既简单又非常行之有效的. 众所周知,偏微分方程具有 Painlevé 性质是指在任意的奇异流形($\phi(x,y,z,t)=0$)上它的解是单值的. 为了简化 Painlevé 分析的计算并不失其一般性,Kruskal 提出奇异流形 $\phi(x,y,z,t)$ 可以用 $\phi(x,y,z,t)=x+\phi_1(y,z,t)$ 代替. 根据以上的思想,利用 WTC 方法,对用代数方法得到的(3+1)维方程进行 Painlevé 分析,发现方程(35)具有 Painlevé 性质. 为了简化计算,令 $v=u_x$,$c_1=-1/2$,$c_2=1/2$,将方程(35)改写为

$$2c_6(v_{xt}v_{xxx} - v_{xxt}v_{xx}) + \frac{3}{2}v_x v_{xxx} v_{yzz} - 2v_{yzz}v_{xx}^2 + c_3 v_{zz}(v_{xy}v_{xxx} - v_{xxy}v_{xx}) + c_4 v_{yz}(v_{xxx}v_{xz} - v_{xxz}v_{xx}) = 0, \tag{72}$$

其中 $c_3+c_4=0$. 利用标准的 WTC 方法,通过领头项分析,在奇异流形 $\phi(x,y,z,t)=x+\phi_1(y,z,t)$ 下,可将 v 展开成

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \phi^{j-2}. \tag{73}$$

这里 $\phi_1=\phi_1(y,z,t)$,$v_j=v_j(y,z,t)$ 是关于 y,z,t 的函数. 把(73)式代入(72)式,能得到 v_j 的以下递推关系:

$$j(j + 1)(j - 2) v_j = F_j(\phi_1, \phi_{1y}, \cdots, v_0, v_1, \cdots, v_{j-1}), \quad (j = 0,1,2,\cdots), \tag{74}$$

显然,方程的共振点是

$$j = -1,0,2, \tag{75}$$

对于共振点 $j=-1$ 和 $j=0$ 分别对应任意的奇异流形 ϕ 和任意函数 v_0. 从递推关系(74)式,有

$$j = 1, v_1 = \frac{\frac{1}{2}(c_3\phi_{1z}v_{0y} + c_4\phi_{1y}v_{0z})}{\phi_{1z}\phi_{1y}}, \tag{76}$$

$$j = 2, 3\phi_{1zz}\phi_{1y}v_0^2 v_1 + 6\phi_{1z}\phi_{1y}v_{0z}v_0 v_1 + 6\phi_{1z}\phi_{1yz}v_0^2 v_1 + 6c_4\phi_{1z}\phi_{1y}v_{1z}v_0^2 - 2c_3\phi_{1zz}v_{0y}v_0^2 + 2c_4\phi_{1z}\phi_{1y}v_{0z}v_0 v_1 - 4c_3\phi_{1z}v_{0z}v_{0y}v_0 - 2c_4\phi_{1yz}v_{0z}v_0^2 + 6c_3\phi_{1z}^{\ 2}v_{1y}v_0^2 - 2c_4\phi_{1z}v_{0z}v_{0y}v_0 - 5\phi_{1z}^{\ 2}\phi_{1y}v_0 v_1^2 + 2c_3\phi_{1z}^{\ 2}v_{0y}v_0 v_1 + 3\phi_{1z}^{\ 2}v_{0y}v_0 v_1 - 2c_4\phi_{1y}v_{0z}^2 v_0 = 0. \tag{77}$$

对于 $j=2$,相容条件(77)必须满足,将(76)式代入(77)式,相容条件(77)式马上得到满足(当 $c_3=c_4=0$). 因此,具有 Virasoro 代数的方程(35)同时具有 Painlevé 性质,也就是说,方程(35)同时在 Painlevé 性质意义下可积.

5 KMV 对称李代数

利用文献[16]中建立的简单的形式级数方法,我们对所有的由对称代数方法得到的(3+1)维模型进行对称分析,发现所有的(3+1)维方程不仅具有

Virasoro 代数,而且还具有 KMV 对称代数. 作为例子,在此给出了方程

$$u_{xt} + uu_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \tag{78}$$

的 KMV 对称李代数结构(上式就是当 $a = c = 1$ 时的方程(71)).

$$[\sigma(f_1),\sigma(f_2)] = \sigma(\dot{f}_1 f_2 - \dot{f}_2 f_1),$$

$$[\sigma(f),J(h)] = J(h\dot{f} - f\dot{h}),$$

$$[L(g_1),L(g_2)] = \frac{1}{2}M(g_1\dot{g}_2 - g_2\dot{g}_1), \tag{79}$$

$$[\sigma(f),L(g)] = L(g\dot{f} - f\dot{g}),$$

$$[\sigma(f),K(m)] = -K(m\dot{f} - f\dot{m}),$$

$$[J(h_1,J(h_2))] = \frac{1}{2}M(h_1\dot{h}_2 - h_2\dot{h}_1), \tag{80}$$

$$[J(h),L(g)] = [M(m),L(g)] = [J(h),L(g)] = [M(m_1),M(m_2)] = 0, \tag{81}$$

其中“ . ”表示相关函数对时间 t 的导数.

$$\sigma(f) = -f(t)\partial_t - \left(x\dot{f} + \left(\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}z^2\right)\ddot{f}\right)\partial_x - y\dot{f}\,\partial_y - z\dot{f}\,\partial_z + \left(u\dot{f} - x\ddot{f} + \left(\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}z^2\right)f^{(3)}\right)\partial_u, \tag{82}$$

$$J(h) = h(t)\partial_y - \frac{1}{2}\dot{h}\ y\partial_x + \frac{1}{2}y\ddot{h}\partial_u,$$

$$L(g) = g(t)\partial_z - \frac{1}{2}\dot{g}\ z\partial_x + \frac{1}{2}z\ddot{g}\partial_u, \tag{83}$$

$$M(m) = -m(t)\partial_x + \dot{m}\,\partial_u. \tag{84}$$

6　总结和讨论

实际上,,利用 Virasoro 对称代数(1)的每一个实现,都能得到相应的(3+1)维在具有 Virasoro 代数意义下的可积模型. 本文通过具体的三种对称实现,得到了六个(3+1)维不变量方程,并利用简单的形式级数方法,发现所有的由 Virasoro 对称代数方法得到的(3+1)维可积模型都具有 KMV 代数结构,也就是说,这些(3+1)维方程是在 KMV 代数意义下可积的. 利用 WTC 奇性分析方法,我们发现方程(35)是在具有 Painlevé 性质意义下可积的. 虽然,我们得到了许多(3+1)维 Virasoro 代数的可积模型和一个在 Painlevé 性质意义下的(3+1)维可积模型,但仍然有许多重要的和有意义的问题需要解决. 如怎样形式的 Virasoro 可积模型是具有 Painlevé 性质?是否能找到在 IST 意义下、或在 Lax 意义下也可积的(3+1)维 Virasoro 代数的可积方程?是否能得到或怎样才能得到(3+1)维 Virasoro 可积方程的多孤子解?

[1] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, London Mathematical Society Lecture Note Series 149(Cambridge University Press, 1991).

[2] Y. S. Kivshar, B. A. Malomed, *Rev. Mod. Phys.*, **61**(1989), 763 and references therein.

[3] S. Y. Lou, G. X. Huang, *Mod. Phys. Lett.*, **B9**(1995), 1231; G. H. Chen *et al.*, *Acta Sinice Physica*, **47**(1998), 1375(in Chinese)[陈光华等,物理学报,**47**(1998),1375]; J. F. Zhang, *Acta Physica Sinica*, **47**(1998), 1416(in Chinese)[张解放,物理学报,**47**(1998),1416].

[4] S. Y. Lou, J. Yu, J. Lin, G. X. Huang, J. K. Zhang, *Mod. Phys. Lett.*, **B10**(1996), 11.

[5] C. H. Gu *et al.*, Soliton Theory and its Applications (Zhejiang Publishing House of Science and Technology, 1990)(in Chinese)[谷超豪等,孤子理论及其应用(浙江科学技术出版社,1990)].

[6] A. S. Fokas, *Phys. Rev. Lett.*, **51**(1983)3; **57**(1986), 159; O. I. Bogoyooleaskii, *Acta Appl. Math.*, **13**(1988), 227.

[7] R. S. Ward, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **A315**(1985), 451.

[8] C. H. Gu, *Lett. Math. Phys.*, **18**(1992), 199.

[9] M. Jimbo, T. Miwa, *Publ. Res. Inst. Math. Soc. Kyoto Univ.*, **19**(1983), 943.

[10] S. Y. Lou, J. P. Weng, *J. Math. Phys.*, **36**(1995), 3492.

[11] F. Calogero, A. Degasperis, *Nuovo Cimento*, **31B**(1976), 201; **39B**(1977), 54.

[12] Y. S. Li, Y. Z. Zhang, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26**(1993), 7487.

[13] S. Y. Lou, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **28**(1995), 5943; S. Y. Lou, H. Y. Ruan, *Commun. Theor. Phys.*, **26**(1996), 51.

[14] S. Y. Lou, *Science in China*, **40**(1997), 1317.

[15] S. Y. Lou, *J. Math. Phys.*, **39**(1998), 2112; S. Y. Lou, *Phys. Rev. Lett.*, **80**(1998), 5027.

[16] S. Y. Lou, X. B. Hu, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **27**(1994), L207.

[17] S. Y. Lou, J. Yu, J. Lin, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **28**(1995), L191; S. Y. Lou, J. Lin, J. Yu, *Phys. Lett.*, **A201**(1995), 47; J. Lin, *Commun. Theor. Phys.*, **25**(1996), 447.

[18] J. Lin, J. Yu, S. Y. Lou, *Acta Physica Scinica*, **45**(1996), 1073(in Chinese)[林机,俞军,楼森岳,物理学报,**45**(1996),1073].

[19] P. J. Olver, Application of Lie groups to differential equations (Springer, Berlin, 1986).

[20] J. Weiss, M. Tabor, J. Carnevale, *J. Math. Phys.*, **24** (1983), 522.

VIRASORO INTEGRABLE AND PAINLEVÉ INTEGRABLE MODELS IN (3+1)-DIMENSIONS*

LIN JI WANG KE-LIN

(*Center of Nonlinear Science, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*)

(Received 29 April 2000; revised manuscript received 6 July 2000)

ABSTRACT

Seeking higher-dimensional integrable models is very important in nonlinear science. In this paper, using the generalized Virasoro type algebra, many (3+1)-dimensional Virasoro models are integrable under the meaning that they possess infinitely many symmetries. All of the (3+1)-dimensional models are proved to have Kac-Moody-Virasoro symmetry algebra. In addition, using WTC Painlevé analytical approach, a (3+1)-dimensional Virasoro model is integrable under the meaning that it possesses the Painlevé property.

Keywords: generalized Virasoro algebra, Painlevé property, (3+1)-dimensional integrable model

PACC: 0340K, 0230J, 0365G

* Project supported by the Outstanding Youth Foundation (Grant No. 19925522).